НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
**СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра прикладной математики

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РИСКОВ

Методические указания к практическим занятиям
для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Составители:
Б.П. Титаренко, Ю.П. Галагуз, Ю.Г. Жеглова

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2020

УДК 519.21
ББК 22.171
М34

Рецензент — кандидат физико-математических наук *Ю.В. Осипов*,
доцент кафедры прикладной математики НИУ МГСУ

М34 **Математическая теория рисков** [Электронный ресурс] : методические указания к практическим занятиям для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / сост. : Б.П. Титаренко, Ю.П. Галагуз, Ю.Г. Жеглова ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра прикладной математики. – Электрон. дан. и прогр. (0,8 Мб). – Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020. – Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS. – Загл. с титул. экрана.

Приведены варианты заданий, примеры решения задач.
Для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

Учебное электронное издание

Редактор, корректор *М.Л. Манзюк*
Компьютерная верстка *А.Г. Сиволобовой*
Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2013, Adobe InDesign CS6, ПО Adobe Acrobat.

Подписано к использованию 04.02.2020. Объем данных 0,8 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет»
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ В СТРОИТЕЛЬНЫХ ПРОЕКТАХ

Одной из самых важных проблем в строительстве, как и во многих других областях, является высокая степень риска успешного осуществления проектов. Современные строительные (девелоперские) проекты разрабатываются и реализуются в ситуациях большой неопределенности. В рамках классического инструментария управления проектами важное место занимают методы управления рисками проекта. Это раздел управления проектами, включающий в себя задачи и процедуры, связанные с определением, анализом и разработкой соответствующих мер реагирования на риски в проекте.

Основные понятия и процедуры управления рисками

Риск проекта — это возможность возникновения нежелательных событий, которые могут негативно воздействовать на достижение целей проекта.

Формализуя понятие риска, можно выделить **три его составляющих**:

– рисковое событие (A) — это случайное событие, связанное с любым проектным решением, нарушающее нормальное выполнение проекта и вызывающее увеличение сроков выполнения работ, увеличение их стоимости, снижение качества и другие неблагоприятные последствия;

– вероятность риска (P) — вероятность наступления рискового события. Она отражает частоту наступления рискового события или степень нашей уверенности в его наступлении;

– ущерб от риска (U) — потери (прежде всего финансовые) в результате наступления рискового события.

Итак, риск — это совокупность трех составляющих:

$$R = \{A, P, U\}.$$

В рассматриваемой модели риска $R = \{A, P, U\}$ интегральной численной характеристикой будет величина $O = PU$, которую назовем **опасностью риска** (получается путем перемножения вероятности риска на ущерб от его возникновения).

В литературе еще используются термины **важность**, **значимость**.

С помощью введенной характеристики риски можно ранжировать, присваивая им ранги в порядке убывания их опасности.

Риск имеет **ранг I**, если он находится в ряду

$$O(1) > O(2) >\ldots> O(I) >\ldots> O(N)$$

на I месте.

При анализе рисков часто проводят их классификацию, формируя кластеры в соответствии с величиной опасности.

Управление рисками проекта создания делового центра «Парус»

О проекте

Бизнес-центр «Парус» хорошо знаком деловой Москве. Облицованный красным гранитом монументальный фасад венчает стеклянная башня, которая хорошо просматривается при движении со стороны Ленинградского проспекта в центр города. Введенный в эксплуатацию в 2014 году, «Парус» и сегодня не теряет своей актуальности. Спокойная рабочая атмосфера, надежное окружение, безупречное внимание персонала обеспечивают минимальную ротацию арендаторов. «Парус» это:

– 9-этажное здание класса «А», общая площадь — 17 600 м^2 с подземным гаражом;

– 6 лифтов;

– коммуникации. Комплекс оборудован современными инженерными системами (центральным кондиционированием, приточно-вытяжной вентиляцией, системой центрального отопления и автономного пожаротушения);

– услуги. Круглосуточная инженерная диспетчерская и технический персонал, переговорные комнаты, подземная парковка.

Предлагаются офисы различной планировки от 105 м^2. Все офисы оборудованы отдельными туалетами и комнатами для приема пищи. Прямая аренда от собственника. Сотрудничество с брокерами. Арендуемая площадь помещений определяется по замерам БТИ. Предоставляется одно парковочное место на 100 м^2 арендуемой площади. Отделка офисов выполнена в соответствии с международными стандартами и представлена как классическими, так и современными интерьерами.

Деловой центр «Парус» располагается на первой линии одной из центральных магистралей города в трех минутах ходьбы от станций метро «Белорусская» в окружении офисов всемирно известных компаний и современных офисных зданий, адрес: 125047, г. Москва, 1-я Тверская-Ямская д. 23, стр. 1.

Район Тверской, где расположено здание бизнес-центра «Парус», постоянно развивается и за последние несколько лет подтвердил заслуженную репутацию одного из престижных административных районов Москвы.

Транспортная доступность: метро «Белорусская» — «Кольцевая» — 3 мин пешком; Метро «Белорусская» — «Радиальная» — 5 мин пешком. Аэроэкспресс до международного аэропорта Шереметьево — 5 мин пешком. Наземный общественный транспорт, такси.

Паспорт проекта

	Паспорт инициатора инвестиционного проекта	
	Инициатор инвестиционного проекта *СП «Стройсервис»* *Инвестиционная деятельности в области гражданского строительства* *103050, г. Москва, ул. Тверская, 24/2* *ОАО* *Контактные тел: 8-495-299-65-90*	
	Паспорт инвестиционного проекта	
	Создание делового центра «Парус»	
	Описание целей инвестиционного проекта *Создание многофункционального современного делового центра для различных целей и задач*	
	Маркетинговая информация *Новизна и перспективность идеи.* *Основными потребителями станут новаторские фирмы.* *Рынок деловой недвижимости неуклонно растет в условиях перехода к рыночной экономике*	
	Стоимость проекта *6 млн долларов*	
	Сроки и этапы реализации проекта *2012—2014 гг.* *Из-за многократного изменения концепции проекта, проблем финансирования и других проблем организационного и экономического характера разрабатываемые варианты планов проекта практически не работали*	
	Направления использования инвестиций *Строительство.* *Подготовка производства.* *Закупка оборудования и технологий.* *Приобретение лицензий.* *Приобретение недвижимости.* *Пополнение оборотных средств*	
	Ожидаемый финансовый результат от реализации проекта *Срок окупаемости — 35 мес.* *Ежегодный предполагаемый доход: 3,18 млн долларов (с учетом НДС);* *Эксплуатационные издержки в год: 1,19 млн долларов*	
	Степень проработки инвестиционного проекта *– идея проекта;* *– бизнес-план;* *– проектно-сметная документация;* *– конструкторская документация;* *– подготовка производства*	
	Технические характеристики инвестиционного проекта	
	Земельный участок / объект недвижимости	
	Площадь 22 325 м^2	

На основе информации о проекте и изучения опыта применения инструментария управления рисками разработан следующий реестр рисков.

Реестр рисков

Инвестиционная деятельность всегда сопряжена с определенным набором рисков. Оценка рисков инвестиционных проектов в строительной сфере весьма сложна, поскольку строительство — процесс долгосрочный с наиболее отдаленным и трудно прогнозируемым результатом. В связи с неопределенностью будущих событий инвестор вынужден выявлять, измерять и управлять рисками инвестиционных проектов.

В основе рисков лежат такие два фактора, как вероятность и опасность. При этом вероятность характеризует возможность получения определенного конкретного результата, а опасность связана с затратами и результатами в случае реализации риска.

Для наиболее эффективного рассмотрения рисков проекта стоит свести их к единому реестру, присваивая каждому степень ущерба (по шкале 1—10) и вероятности (по шкале 1—10)

Таблица 1

Реестр рисков проекта

Код	Название	Ущерб	Вероятность	Опасность
П-001	Содержание контрактов проектировщиков	3	3	9
П-002	Срок выполнения проекта	3	8	24
П-003	Принципиальные проектные решения	10	4	40
П-004	Технологические решения (инженерная инфраструктура и др.)	6	5	30
П-005	Влияние государственных органов	6	5	30
П-006	Влияние органов экспертизы	4	7	28
П-007	Координация и согласованность разработки частей проекта	7	5	35
П-008	Согласованность программы проектировочных работ	7	3	21
П-009	Контроль стоимости проектирования	6	4	24
П-010	Соответствие проекта смете	5	6	30
П-011	Соответствие эффективным проектным стандартам	2	4	8
П-012	Неполнота исходной информации	7	5	35
П-013	Соответствие мировому уровню	4	3	12
П-014	Технологичность проектных решений	5	4	20
П-015	Утверждение результатов проектирования	3	2	6
П-016	Ошибки и небрежности проектирования	8	4	32
П-017	Квалификация и ресурсы проектировщиков	7	2	14
П-018	Квалификация и ресурсы субподрядчиков	4	5	20
П-019	Страховые риски	5	5	25
П-020	Качество внутренней экспертизы	5	2	10
П-021	Качество системы управления	4	4	16

Также разобьем риски по группам по приоритету.

Названия для групп также выбраны неслучайно, они наиболее полно отражают набор из пяти основных факторов риска:

– природные;
– производственные;
– организационные;
– финансово-экономические;
– правовые.

На основе полученной информации представляется целесообразным построить карты рисков. Для построения удобной для чтения карты рисков введем пять групп опасности:

группа 1 — от 0 до 16,6 — крайне низкая;
группа 2 — от 16,6 до 33,3 — ниже среднего;
группа 3 — от 33,3 до 50 — средняя;
группа 4 — от 50 до 83,3 — выше среднего;
группа 5 — от 83,3 до 100 — крайне высокая.

Визуализировать группы рисков по степени опасности можно в цветовой гамме от зеленого до красного (по принципу светофора):

группа 1 — темно-зеленый;

группа 2 — зеленый;

группа 3 — желтый;

группа 4 — оранжевый;

группа 5 — красный.

Полученная карта риска приведена на рис. 1. На ней по горизонтали отложены значения (от 0 до 10) ущерба риска, а по вертикали — значения вероятности. На пересечении мы получаем статус риска для соответствующего квадрата карты.

Таблица 2

Группы риска

Код	Название	Приоритет	Вторичные риски	Время появления	Комментарии
П-003	Принципиальные проектные решения	1	4, 11, 14, 10	Начало проектирования	Стоимостный риск для клиента
П-004	Инженерная инфраструктура	4	3, 10, 11, 13	В течение всего процесса проектирования	Стабильность работы внешней инфраструктуры
П-005	Влияние государственных органов	4	3, 10, 11, 15	В процессе согласования и утверждения	Предварительное согласование концепции и ТЭО
П-007	Координация и согласованность	2	2, 8, 12, 16	В течение всего процесса проектирования	Контроль за ходом разработки ПСД
П-009	Контроль стоимости проектирования	4	6, 8, 9, 15	То же	Контроль стоимости, квалификация специалистов
П-012	Неполнота исходной информации	2	2, 3, 4, 6, 8, 10, 15, 16, 19	Начало проектирования	Контроль проектно-изыскательских работ, контроль заданий на проектирование
П-016	Ошибки и небрежности проектирования	3	1, 2, 6, 7, 9, 10, 15, 20	В течение всего процесса проектирования	Контроль за качеством проектной документации

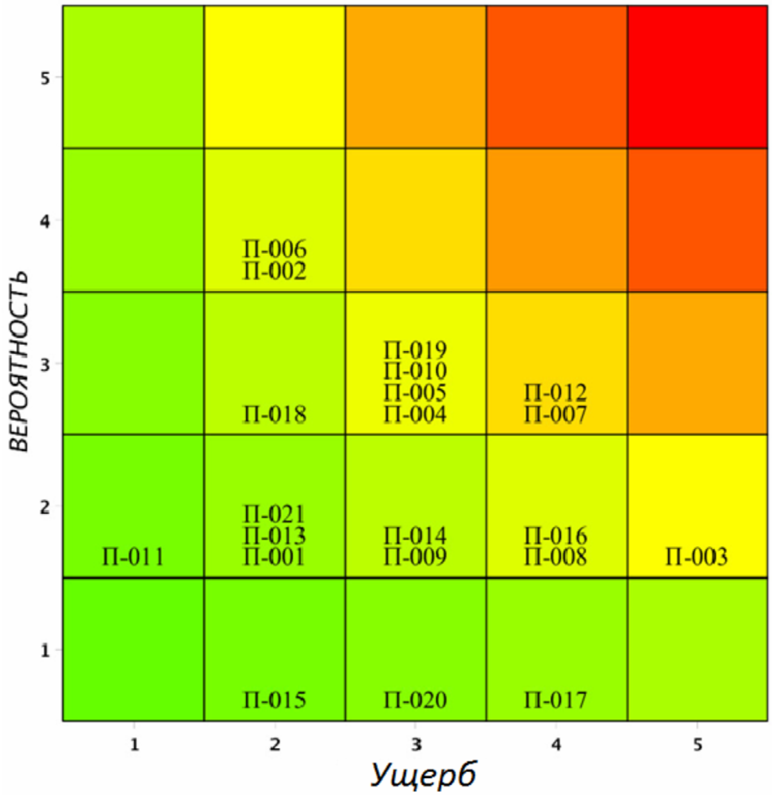

Рис. 1. Карта рисков

По полученным данным были выявлены наиболее опасные риски, для противодействия наступлению которых (либо для уменьшения их последствий) можно рекомендовать следующие возможные меры (табл. 3).

Таблица 3

Меры по управлению рисками

Название: принципиальные проектные решения			Дата выявления	Ожидаемое время наступления:
Рисковое событие: высокий	Ущерб: 10	Вероятность: 4	Приоритетность: 1	
Комментарии: возможно принятие неэффектных проектных решений: а) архитектурно-художественный облик здания; б) функциональное назначение здания; в) стоимость строительства; г) конструктивные решения; д) технология строительства				
Возможные меры уменьшения риска (для рассмотрения): 1. Проведение вариантного проектирования с детальным обоснованием. 2. Привлечение квалифицированных специалистов.				

Название: координация и согласованность разработки частей проекта			Дата выявления	Ожидаемое время наступления:
Рисковое событие: высокий	Ущерб: 7	Вероятность: 5	Приоритетность: 2	
Комментарии: возможно увеличение сроков проектирования и неравномерная загрузка специалистов из-за несоблюдения установленного времени разработки отдельных частей проекта.				
Возможные меры уменьшения риска (для рассмотрения): 1. Четкая координация и контроль разработки частей проекта. 2. Материальная заинтересованность проектировщиков.				

Код риска	Название	Время реализации выбранных мер	Действия по выбранным мерам			
			Пересмотр сметы	Пересмотр программы	Разработка инструктивных материалов	Разработка информационных материалов
П-007	Координация и согласованность разработки частей проекта			Уточнение сроков выдачи отделам зданий на разработку	Календарный план разработки ПСД	Сообщение АО «Моспромстрой» о сроках представления ПСД

Название: координация и согласованность разработки частей проекта			Код риска: П-007
Поздравление: Моспроект 1, мастерская 3		Клиент	СП «Стройсервис»
Возможные меры	Воздействие на сроки	Воздействие на стоимость	Риски
А — окончание разработки ПСД задерживается на две недели	Окончание проекта на две недели позже	$ 304 000	Субконтракты на строительные работы
Рекомендуемые меры: альтернатива Б — сохранение первоначальной даты окончания; дополнительные расходы клиента меньше, чем альтернатива; мнения проектировщиков и консультантов: возможно	Риски для рекомендуемых мер: смета; контроль изменений		

Название: координация и согласованность разработки частей проекта			Код риска: П-007
Поздравление	Моспроект 1, мастерская 3	Клиент	СП «Стройсервис»
Выбранные меры: альтернатива Б	Дата реализации		
	Планируемое воздействие	Оценка состояния проектным менеджером	Необходимые корректировочные воздействия
Стоимость	$ 35 000	Стоимость работ проектировщиков и консультантов возросла из-за ускорения проектных работ, перерасход средств на данный момент составил $ 7000	Не допускать изменений в разработке проектных решений
Сроки	Окончание к планируемой дате	Сроки соответствуют первоначальному графику разработки ПСД	Контролировать сроки выдачи зданий специалистам-смежникам и сроки согласования частей проекта

Задание 1

Переработать реестр рисков проекта. Провести анализ рисков. Дать рекомендации по работе с рисками и провести анализ последствий предлагаемых мер.

Задание 2

Провести работу с рисками реального проекта из строительной практики (задание выдается преподавателем).

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РИСКОВ ДЛЯ АКТУАРИЕВ

В этой части методических указаний при анализе рисковых ситуаций будут даны основы некоторые математических моделей. Основное внимание будет уделено методам анализа страховых рисков.

Модель индивидуального риска

Точный расчет защитной надбавки может быть произведен в рамках теории риска.

Простейшей моделью функционирования страховой компании, предназначенной для расчета вероятности разорения, является модель индивидуального риска. Она базируется на следующих упрощающих предположениях:

1) анализируется фиксированный относительно короткий промежуток времени (пренебрегаем инфляцией и не учитываем доход от инвестирования активов) — обычно это один год;

2) число договоров страхования N фиксировано и неслучайно;

3) премия полностью вносится в начале анализируемого периода, никаких поступлений в течение этого периода нет;

4) мы наблюдаем каждый отдельный договор страхования и знаем статистические свойства индивидуальных потерь X.

Обычно предполагается, что в модели индивидуального риска случайные величины $X_1, \ldots , X_N$ независимы (в частности, исключаются катастрофы, когда одновременно по нескольким договорам наступают страховые случаи). В рамках этой модели «разорение» определяется суммарными потерями по портфелю $S = X_1 + \ldots + X_N$. Если эти суммарные выплаты больше, чем активы компании, предназначенные для выплат по этому блоку бизнеса u, то компания не сможет выполнить все свои обязательства без привлечения дополнительных средств, в этом случае говорят о «разорении».

Итак, вероятность «разорения» компании

$$R = P(X_1 + \ \ldots \ + X_N > u).$$

Иными словами, вероятность «разорения» — это дополнительная функция распределения величины суммарных потерь компании за рассматриваемый промежуток времени.

Поскольку суммарные выплаты S представляют собой сумму независимых случайных величин, распределение случайной величины S может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятностей. Прежде всего это использование сверток. Напомним, что если X_1, X_2 — две независимые неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$ соответственно, то функция распределения их суммы $X_1 + X_2$ может быть подсчитана по формуле

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-y)dF_2(y).$$

Применяя эту формулу несколько раз, можно подсчитать функцию распределения суммы любого числа слагаемых.

Если случайные величины X_1, X_2 непрерывны, то применяем плотности $f_1(x)$, $f_2(x)$. Плотность суммы может быть подсчитана по формуле

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Если случайные величины X_1, X_2 дискретны, то вместо функций распределения обычно работают с распределениями $p_1(n) = P(X_1 = n)$, $p_2(n) = P(X_2 = n)$.

Распределение суммы $p(n) = P(X_1 + X_2 = n)$ определим по формуле

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} p_1(n-k)p_2(k).$$

Подсчет вероятности разорения часто упрощается, если использовать производящие функции и (или) преобразования Лапласа.

Обычно число застрахованных в страховой компании очень велико, поэтому подсчет вероятности разорения предполагает расчет функции распределения суммы большого числа слагаемых. В этом случае точный непосредственный численный расчет может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Однако обстоятельство, затрудняющее точный расчет, открывает возможность быстрого и простого приближенного расчета. Это связано с тем, что при росте N вероятность $P(X_1 + \ldots + X_N \le x)$ часто имеет определенный предел (обычно нужно, чтобы x определенным образом менялось вместе с N), который можно принять в качестве приближенного значения этой вероятности. Точность подобных приближений обычно очень велика и удовлетворяет практические потребности. Основным является нормальное (гауссово) приближение.

Гауссово приближение основано на центральной предельной теореме теории вероятностей. В простейшей формулировке эта теорема выглядит так: если случайные величины $X_1, \ldots, X_N$ независимы и одинаково распределены со средним a (EX_i) и дисперсией $(Var\, X_i)$ σ^2, то при $N \to \infty$ функция распределения центрированной и нормированной суммы

$$S_N^* = \frac{X_1 + \ldots + X_N - Na}{\sigma\sqrt{N}} = \frac{S_N - ES_N}{\sqrt{Var\, S_N}}$$

имеет предел, равный

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Существуют многочисленные обобщения центральной предельной теоремы на случаи, когда слагаемые X_i имеют разные распределения, являются зависимыми и т.д. Но мы ограничимся утверждением, что если число слагаемых велико (обычно достаточно, чтобы N имело порядок нескольких десятков), а слагаемые не очень малы и не очень разнородны, то применимо гауссово приближение для

$$P\left(\frac{S_N - ES_N}{\sqrt{Var\,S_N}} < x\right).$$

Стандартная гауссова функция распределения $\Phi(x)$ может быть определена по таблицам или в программах типа Excel, Matlab и т.п.

Задача 1. Найдите коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни рабочего на один год. Страховая сумма b = 100 000 руб., вероятность смерти застрахованного в течение года q = 0,0025.

Решение задачи. Пусть случайная величина X описывает выплаты по договору. Тогда

$$EX = b \cdot q = 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 250 \text{ (руб.)},$$

$$Var\ X = b^2(1-q)q = 10^{10}\left(1 - 25 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 25 \cdot 10^{-4} \approx 25 \cdot 10^6 \text{ (руб.}^2\text{)},$$

так что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{Var\ X} \approx \sqrt{25 \cdot 10^6} = 5000 \text{ (руб.)},$$

а коэффициент вариации

$$c_x = \sigma_x / EX \approx 5000/250 = 20.$$

Задача 2. Рассмотрим портфель из четырех одинаковых договоров страхования жизни работника одной из строительных организаций. Страховая сумма зависит от причины смерти; в случае смерти от «естественных» причин страховая сумма равна 250 000 руб., а если смерть наступила от несчастного случая, то выплачивается удвоенная страховая сумма. Для каждого из застрахованных вероятность смерти от несчастного случая равна 0,1, вероятность смерти от естественных причин равна 0,1. Найдите распределение суммарных выплат.

Решение (1 способ)

Примем 250 000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — индивидуальные выплаты по договорам. Случайные величины X_1, X_2, X_3, X_4 независимы в совокупности и имеют одно и то же распределение, задаваемое табл. 4.

Таблица 4

n	0	1	2
$p(n)$	0,8	0,1	0,1

Для подсчета распределения суммы $X_1 + X_2$ образуем матрицу из трех строк и трех столбцов с элементами $p_1(i)\,p_2(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0,64 & 0,08 & 0,08 \\ 0,08 & 0,01 & 0,01 \\ 0,08 & 0,01 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Для формирования этой матрицы удобно написать слева столбец из вероятностей $p_1(i)$, а сверху — строку из вероятностей $p_2(j)$, а затем перемножить их поэлементно.

Суммируя по линии $i + j = n$, параллельной второй диагонали, мы получим

$$p_1(n)\,p_2(0) + p_1(n-1)\,p_2(1) + \ldots + p_1(0)\,p_2(n),$$

т.е. в точности $P(X_1 + X_2 = n)$. Поэтому для $q(n) = P(X_1 + X_2 = n)$ имеем табл. 5 (поскольку $X_1, X_2 \le 2$, их сумма не превосходит 4).

Таблица 5

n	0	1	2	3	4
$q(n)$	0,64	0,16	0,17	0,02	0,01

Для подсчета $r(n) = P(X_1 + X_2 + X_3 = n) = P((X_1 + X_2)+ X_3 = n)$ образуем матрицу из трех строк и пяти столбцов с элементами $p_3(i)\times q(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0,512 & 0,128 & 0,136 & 0,016 & 0,008 \\ 0,064 & 0,016 & 0,017 & 0,002 & 0,001 \\ 0,064 & 0,016 & 0,017 & 0,002 & 0,001 \end{pmatrix}$$

Поэтому для распределения случайной величины $X_1 + X_2 + X_3$ имеем табл. 6.

Таблица 6

N	0	1	2	3	4	5	6
$r(n)$	0,512	0,192	0,216	0,049	0,027	0,003	0,001

Наконец, для подсчета распределения $p(n)$ суммарных выплат $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ образуем матрицу из трех строк и семи столбцов с элементами $p_4(i)\times r(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0,4096 & 0,1536 & 0,1728 & 0,0392 & 0,0216 & 0,0024 & 0,0008 \\ 0,0512 & 0,0192 & 0,0216 & 0,0049 & 0,0027 & 0,0003 & 0,0001 \\ 0,0512 & 0,0192 & 0,0216 & 0,0049 & 0,0027 & 0,0003 & 0,0001 \end{pmatrix}$$

Отсюда мы немедленно можем подсчитать распределение $p(n)$ (оно приведено во втором столбце табл. 3) и, следовательно, функцию распределения случайной величины $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ (она приведена в третьем столбце табл. 7).

Таблица 7

n	$p(n)$	$P(S \le n)$
0	0,4096	0,4096
1	0,2048	0,6144
2	0,2432	0,8576
3	0,0800	0,9376
4	0,0481	0,9857
5	0,0100	0,9957
6	0,0038	0,9995
7	0,0004	0,9999
8	0,0001	1,0000

Очевидно, что при подсчете распределения суммы независимых случайных величин с помощью сверток необходимо использовать ЭВМ. Для аналитических же расчетов удобнее использовать производящие функции. Но и здесь можно воспользоваться системами компьютерной математики типа Matlab, Maxima и им подобных.

Напомним, что производящей функцией $j(z)$ неотрицательной случайной величины h распределением $p(n) = P(h = n)$ называется сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n)$.

Нам могут понадобиться следующие свойства производящих функций:

1. Если производящие функции $j_1(z)$ и $j_2(z)$ двух случайных величин h_1 и h_2 совпадают, то совпадают и распределения этих величин. Т.е. распределение однозначно восстанавливается по своей производящей функции.
2. $Eh = j'(1)$, $Var\ h = j''(1) + j'(1) - [j'(1)]^2$.
3. Если случайные величины h_1 и h_2 независимы, то производящая функция их суммы $j(z)$ равна произведению производящих функций слагаемых $j(z) = j_1(z)j_2(z)$.

Используя производящие функции, предложим следующий второй способ решения.

Каждое слагаемое имеет одну и ту же производящую функцию

$$j_1(z) = j_2(z) = j_3(z) = j_4(z) = 0{,}8 \cdot z^0 + 0{,}8 \cdot z^1 + 0{,}1 \cdot z^2 = 0{,}1\ (8 + z^1 + z^2).$$

Соответственно, их сумма имеет производящую функцию

$$Ez^S = j_1(z)j_2(z)j_3(z)j_4(z) = 0{,}1^4\ (8 + z^1 + z^2)^4 =$$
$$= 0{,}4096 + 0{,}2048z^1 + 0{,}2432z^2 + + 0{,}0800z^3 + 0{,}0481z^4 + 0{,}0100z^5 + 0{,}0038z^6 + 0{,}0004z^7 + 0{,}0001z^8.$$

Отбирая коэффициенты при степенях z, мы получим такую же табл. 5 для вероятностей $p(n) = P(S = n)$, какую мы получили выше с помощью сверток.

При больших N можно указать и на третий способ решения подобной задачи (см. задачу 3).

Задача 3. Предположим, что в компании застраховано $N = 3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q = 0{,}3$ %. Компания выплачивает сумму $b = 250\ 000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года. Определите суммарную премию, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка 5 %.

Решение. Примем величину страховой суммы в качестве единицы измерения денежных сумм. В этом случае выплаты X_i по i-му договору принимают два значения: 0 и 1 с вероятностями $1 - q$ и q соответственно. Поэтому

$$EX_i = (1-q)\cdot 0 + q\cdot 1 = q = 0{,}003,\ EX_i^2 = (1-q)\cdot 0^2 + q\cdot 1^2 = q = 0{,}003,$$

$$Var\ X = EX_i^2 - (EX_i)^2 = q - q^2 \approx 0{,}003.$$

Теперь для среднего значения и дисперсии суммарных выплат $S = X_1 + \ldots + X_N$ мы получим:

$$ES_i = N\cdot EX_i = 3000\cdot 0{,}003 = 9,\ Var\,S = N\cdot Var\,X_i \approx 3000\cdot 0{,}003 = 9.$$

$$\sigma_x = \sqrt{Var\,X} \approx \sqrt{25\cdot 10^6} = 5000\ (\text{руб}).$$

Используя гауссово приближение для центрированной и нормированной величины суммарных выплат, мы можем представить вероятность «неразорения» компании в следующем виде:

$$P(S \le u) = P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u-ES}{\sqrt{VarS}}\right) \approx P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u-9}{3}\right) = \Phi\left(\frac{u-9}{3}\right) - \Phi(0).$$

Если мы зададимся вероятностью разорения 5 %, величина $(u - 9)/3$ должна быть равной $x_{95\%} = 1{,}645$, т.е. $u = 3 \cdot 1{,}645 + 9 = 13{,}935$ единиц, или в абсолютных цифрах около 3 483 750 руб.

Модель коллективного риска

Так же, как и в модели индивидуального риска, в модели коллективного риска анализируется относительно короткий промежуток времени и предполагается, что плата за страховку полностью вносится в начале анализируемого периода. Однако, в отличие от модели индивидуального риска, в модели коллективного риска весь портфель заключенных договоров страхования рассматривается как единое целое, без различий отдельных составляющих его договоров. Соответственно, наступающие страховые случаи не связываются с конкретными договорами, а рассматриваются как результат суммарного риска компании.

Отсюда следует, что основной характеристикой портфеля является не число заключенных договоров N, а общее число страховых случаев v за анализируемый период. Число v является случайной величиной.

Второе важное отличие модели коллективного риска от модели индивидуального риска заключается в том, что предполагается одинаковая распределенность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, описывающих величины потерь вследствие последовательных страховых случаев. Это означает некоторую равноценность страховых случаев, связанную с тем, что страховые случаи рассматриваются как следствие общего риска компании, а не индивидуальных договоров с их специфическими особенностями.

Кроме того, надо понимать, что случайные величины Y_i описывают только реальный ущерб и поэтому, в отличие от величин X_j, фигурирующих в модели индивидуального риска, строго положительны. В теории коллективного риска также обычно предполагается, что число страховых случаев и потери после наступления страховых случаев независимы в совокупности.

Так же как и в модели индивидуального риска, в модели коллективного риска «разорение» определяется суммарными выплатами S страховой компании. S записывается в виде:

$$S = Y_1 + \ \ldots \ + Y_v,$$

и поэтому в модели коллективного риска вероятность разорения компании определяется как

$$R = P(Y_1 + \ \ldots \ + Y_v > u),$$

где u — активы компании.

Однако и для модели коллективного риска, как, впрочем, и для модели индивидуального риска, нельзя ответить на многие практически важные вопросы. Например, нельзя оценить момент разорения, величину недостающего капитала в этот момент и т.д.

Многочисленные исследования показали, что реальные данные из практики страхования о числе страховых случаев за фиксированный промежуток времени хорошо описываются с помощью пуассоновского или отрицательного биномиального распределения (этот факт тесно связан с моделированием процесса наступления страховых случаев как пуассоновского процесса).

Для распределения размеров индивидуальных страховых возмещений Y_i имеется гораздо больше возможностей, но все же класс возможных распределений не слишком широк (дискретные распределения, экспоненциальное распределение, распределение Парето, гамма-распределение и некоторые другие). Особенно важен случай, когда Y_i принимают дискретные значения. В сущности, этот частный случай покрывает все реальные ситуации, так как на практике страховые возмещения обычно измеряются целыми рублями (или даже округляются до сотен или тысяч рублей).

Задача 4. Суммарные потери даются формулой $S = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$, где:
1) v с равной вероятностью принимает только три значения 0, 1 и 2;
2) каждая из величин Y_i имеет экспоненциальное распределение со средним 0,5;
3) ν, Y_1, Y_2… взаимно независимы.
Определите $E\,[e^S]$.
Решение. Используя формулу полного математического ожидания, мы имеем:

$$E[e^S] = \sum_n P(v = n) \cdot E(e^{Y_1 + \ \ldots \ + Y_v} \ | v = n) = \sum_n P(n) \cdot E(e^{Y_i})^n = \frac{1}{3}\left(1 + Ee^{Y_i} + (Ee^{Y_i})^2\right).$$

Поскольку случайные величины X_i имеют экспоненциальное распределение со средним 0,5, их плотность дается формулой

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0,$$

где $\lambda = 1 / 0{,}5 = 2$, и поэтому

$$E[e^S] = \int_0^{+\infty} e^t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{(\lambda - 1)} \int_0^{+\infty} (\lambda - 1) e^{-(\lambda - 1)t} dt.$$

Поскольку $\lambda > 1$, функция $(\lambda - 1)e^{-(\lambda - 1)t}$ является экспоненциальной плотностью, так что $\int_0^{+\infty} (\lambda - 1) e^{-(\lambda - 1)t} dt = 1$. Значит,

$$E[e^{Y_i}] = \frac{\lambda}{(\lambda - 1)} = 2 .$$

Окончательно получаем $E[e^S] = \frac{1}{3}\left(1 + 2 + 2^2\right) \approx 2,33$.

Динамические модели разорения

Динамические модели отличаются от статических тем, что в них события разворачиваются во времени. Простейшая модель такого рода включает только два процесса: процесс поступления премий и процесс выплаты страховых возмещений. Эти два процесса протекают в разных масштабах времени и имеют разные масштабы измерения. Премии поступают гораздо чаще, чем наступают страховые случаи, и при этом величина премии намного меньше величины убытков. Поэтому если в качестве основного рассматривать процесс наступления страховых случаев, то в масштабах этого процесса поступление премий можно мыслить как непрерывный детерминированный процесс.

В простейшем случае поступление премий характеризуется одним параметром — скоростью поступления средств, которую мы обозначим c. Это означает, что если в некоторый момент времени t компания имела активы $u(t)$ и до момента $t + \tau$ страховые случаи не наступали, то активы компании в момент $t + \tau$ будут равны $u(t + \tau) = u(t) + c\tau$. Здесь мы игнорируем такие важные факторы, как инвестиционный доход и инфляция.

В качестве простейшей модели процесса наступления страховых случаев часто берется пуассоновский процесс. Пусть λ — интенсивность этого процесса. Обозначим через T_n момент наступления n-го страхового случая, $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ — интервал между n-м и $(n - 1)$-м страховыми случаями (T_0 условимся считать равным нулю).

В нашей простейшей модели предполагается, что страховое возмещение выплачивается немедленно после наступления страхового случая. Величины последовательных страховых возмещений Y_1, Y_2,… считаются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, которые, кроме того, не зависят от процесса наступления страховых случаев T_1, T_2,…

Теперь изменение во времени активов компании можно описать следующим образом. В момент $t = 0$ компания имеет некоторые начальные активы $u(0) = u$. К моменту $T_1 = \tau_n$ наступления первого страхового случая активы вырастут (за счет поступления премий) до величины $u + c\tau_1$. Однако в момент T_1 страховая компания оплатит убытки величиной Y_1, и активы уменьшатся до величины $u + c\tau_1 - Y_1$. К моменту T_2 наступления второго страхового случая активы увеличатся на сумму $c(T_2 - T_1) = c\tau_2$ и составят $u + c\tau_1 - Y_1 + c\tau_2 = u + c(\tau_1 + \tau_2) - Y_1$. В момент T_2 оплачивается убыток величиной Y_2, и активы уменьшаются до величины $u + c(\tau_1 + \tau_2) - (Y_1 + Y_2)$.

Этот процесс продолжается до бесконечности, если только в момент наступления некоторого страхового случая средств компании не хватит, чтобы оплатить убытки. В этом случае мы говорим о разорении компании. Итак, в рамках описываемой модели компания не разорится, если

$$u + cT_n - (Y_1 + \ldots + Y_n) \geq 0, \ n = 1, 2, \ldots$$

Если же

$$u + c\tau_1 - Y_1 \geq 0 ,$$

$$u + c(\tau_1 + \tau_2) - (Y_1 + Y_2) \geq 0 ,$$

....

$$u + c(\tau_1 + \ldots + \tau_{n-1}) - (Y_1 + \ldots + Y_{n-1}) \geq 0 ,$$

но при этом

$$u + c(\tau_1 + \ldots + \tau_n) - (Y_1 + \ldots + Y_n) < 0 ,$$

то в момент T_n наступления n-го страхового случая компания разорится.

Основной характеристикой этой модели является вероятность разорения $R = R(u)$.

За единицу времени наступает в среднем λ страховых случаев, что приводит к выплате в виде страховых возмещений в среднем суммы λm, где $m = EY_i$. С другой стороны, за это же время компания получит в виде премий сумму c. Эта сумма должна равняться «нагруженной» средней сумме выплат

$$c = (1+\theta)\lambda m,$$

где θ — относительная защитная надбавка. (Величина защитной надбавки определяется такой, чтобы вероятность того, что компания будет иметь потери по некоторому портфелю договоров («разорится»), была достаточно малой величиной.) Поэтому c обязательно должно быть больше, чем λm.

Основные теоретические результаты для описанной модели заключаются в следующем:

1. Преобразование Лапласа вероятности разорения (как функции начальных активов страховой компании) дается формулой

$$\rho(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} R(u)du = \frac{1-\varphi(s)-ms}{s\left(1-\varphi(s)-(1+\theta)ms\right)},$$

где $\varphi(s) = Ee^{-sY_i}$ — преобразование Лапласа величины индивидуальных потерь; $m = EY_i$ — среднее значение величины индивидуальных потерь; $\theta = \dfrac{c-\lambda m}{\lambda m}$ — относительная защитная надбавка.

2. Вероятность разорения удовлетворяет неравенству Лундберга:

$$R(u) \le e^{-ru}.$$

Здесь r — так называемый характеристический коэффициент, который определяется как положительное решение характеристического уравнения (относительно z):

$$\psi(z) = 1 + (1+\theta)mz,$$

где $\psi(z) = \varphi(-z) = Ee^{zY_i}$ — производящая функция моментов величины индивидуальных потерь.

3. При $u \to +\infty$ верна асимптотика Крамера — Лундберга:

$$R(u) \sim \frac{\theta m}{\psi'(r)-(1+\theta)m} e^{-ru}.$$

Имея в виду неравенство Лундберга и асимптотику Крамера — Лундберга, можно сказать, что вероятность разорения мала, если характеристический коэффициент r большой. Иными словами, характеристический коэффициент r, который включает в себя основные параметры модели (интенсивность наступления страховых случаев λ, распределение величин индивидуальных потерь Y_i, скорость поступления премий c), является интегральной характеристикой финансовой безопасности компании.

Задача 5. Относительно динамики активов страховой компании известно, что:

1) размеры страховых возмещений взаимно независимы и равномерно распределены на интервале (0, 10);

2) в каждый момент времени 1, 2, 3, … происходит в точности один страховой случай;

3) в другие моменты времени страховые случаи не наступают;

4) относительная защитная надбавка равна 0,2;

5) премии платятся непрерывно;

6) начальные активы равны 1.

Подсчитайте вероятность разорения в момент 2.

Решение. Каждую единицу времени происходит ровно один страховой случай и страховое возмещение в среднем равно 5. Поэтому в единицу времени должна собираться нетто-премия 5. Нетто-премия — это премия, когда в качестве платы за страховку назначается ожидаемая (средняя) величина убытка. Поскольку относительная защитная надбавка равна 0,2, общий сбор премий в единицу времени должен быть $1{,}2 \times 5 = 6$ (так что скорость поступления средств составляет 6).

К моменту 1 активы компании будут равны $1 + 6 = 7$. Так как компания не должна разориться в этот момент, страховое возмещение Y_1 по страховому случаю, наступившему в момент 1, не должно быть больше, чем 7: $Y_1 \le 7$. После выплаты этого страхового возмещения активы компании будут равны $7 - Y_1$, и к моменту 2 они вырастут до величины $7 - Y_1 + 6 = 13 - Y_1$. В этот момент наступит второй страховой случай и компания должна будет выплатить страховое возмещение величиной Y_2. Компания разорится в момент 2, если размер этого страхового возмещения больше, чем активы компании: $Y_2 > 13 - Y_1$.

Итак, искомая вероятность P равна $P(Y_1 \le 7,\ Y_2 > 13 - Y_1)$.

Проще всего подсчитать эту вероятность геометрически (рис. 2). Поскольку случайные величины Y_1 и Y_2 независимы и равномерно распределены на интервале (0, 10), точка (Y_1, Y_2) равномерно распределена на квадрате $K = \{(x,y) \mid 0 < x, y < 10\}$. Искомая вероятность может рассматриваться как вероятность попадания случайной точки (Y_1, Y_2) в область $D = \{(x,y) \mid 0 < x \le 7,\ y > 13 - x\}$. Поэтому P равняется отношению площадей заштрихованной фигуры к квадрату 10×10 (рис. 2). Площадь квадрата K, очевидно, равна $10 \times 10 = 100$. Заштрихованная область D, как легко видеть, является равнобедренным прямоугольным треугольником с катетами, равными 4, и с площадью, равной 8. Таким образом, $P = 8 / 100 = 0{,}08$.

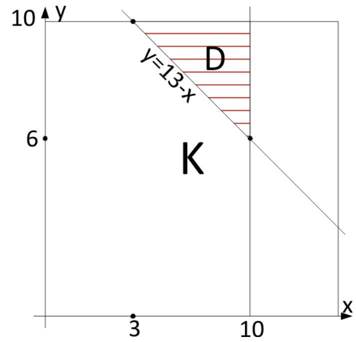

Рис. 2

Задача 6. Определите характеристический коэффициент, если распределение индивидуальных потерь является экспоненциальным со средним m.

Решение. Для экспоненциального распределения преобразование Лапласа — Стилтьеса есть $\varphi(s) = \dfrac{1}{1+ms}$.

Соответственно, производящая функция моментов $\psi(z) = 1/(1 - mz)$. Поэтому характеристическое уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{1-mz} = 1 + (1+\theta)mz, \text{ т.е. } (1+\theta)m^2z^2 - \theta mz = 0.$$

Оно имеет тривиальный корень $z = 0$ и единственный положительный корень $z = \dfrac{\theta}{(1+\theta)m} = \dfrac{c - \lambda m}{cm}$,

который по определению и является характеристическим коэффициентом r.

Задача 7. Определите вероятность разорения $R(u)$, если величина индивидуальных потерь имеет экспоненциальное распределение.

Решение. Преобразование Лапласа показательного распределения со средним m дается формулой $\varphi(s) = \dfrac{1}{1+ms}$.

Поэтому общее уравнение для преобразования Лапласа вероятности разорения примет вид

$$\rho(s)=\frac{m}{\theta+(1+\theta)ms}=\frac{m}{\theta}\frac{\theta/(1+\theta)ms}{\theta/(1+\theta)ms+s}.$$

Поскольку дробь вида $a/(a+s)$ является преобразованием Лапласа экспоненциальной плотности ae^{-au}, отсюда обращением преобразования Лапласа мы получим окончательный результат:

$$R(u)=\frac{m}{\theta}\frac{\theta}{(1+\theta)ms}e^{-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u}=\frac{1}{(1+\theta)}e^{-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u}.$$

Здесь интересно сопоставить эту точную формулу с неравенством Лундберга и асимптотикой Крамера — Лундберга. Прежде всего отметим, что, как показано в задаче 6, характеристический коэффициент r в случае экспоненциально распределенных индивидуальных потерь дается формулой

$$r=\frac{\theta}{(1+\theta)m}.$$

Это позволяет переписать нашу явную формулу в виде $R(u)=\frac{1}{1+\theta}e^{-ru}$.

Кроме того, поскольку для экспоненциального распределения $\psi(z) = 1/(1 - mz)$, то верно соотношение

$$\psi'(r)=m(1-mr)^{-2}=m(1+\theta)^2.$$

Значит, асимптотика Крамера — Лундберга в рассматриваемом случае примет вид $R(u)\sim\frac{1}{1+\theta}e^{-ru}$, т.е. совершенно идентична точной формуле для $R(u)$.

Относительная погрешность от замены $R(u)$ оценкой Лундберга постоянна и равна $\frac{R(u)-e^{-ru}}{e^{-ru}}=\frac{\theta}{1+\theta}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Риски в современном бизнесе. Методология и практика / П.Г. Грабовый, А.Ю. Бутырин, Н.Г. Верстина, Р.В. Волков ; под ред. П.Г. Грабового. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИИА «Просветитель», 2017.
2. Просветов Г.И. Статистика: задачи и решения : учеб.-практич. пособие / Г.И. Просветов. – Москва : Альфа-Пресс, 2014.
3. Плошкин В.В. Оценка и управление рисками на предприятии : учеб. пособие для высших учебных заведений / В.В. Плошкин. – Старый Оскол : ТНТ, 2013.
4. Фалин Г.И. Теория риска для актуариев в задачах / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – 2-е изд. – Москва : Мир : Научный мир, 2014.
5. Фалин А.Г. Квалификационный экзамен по финансовой математике Института и факультета актуариев Великобритании // Управление риском. 2014. – № 2. – С. 47—64.
6. Актуарии. – URL: http://www.actuaries.ru/ (дата обращения: 31.01.2020).