НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математики

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические указания к практическим занятиям
для аспирантов по направлениям подготовки 05.06.01 Науки о земле,
08.06.01 Техника и технологии строительства, 15.06.01 Машиностроение,
21.06.01 Геология, разведка и разработка полезных ископаемых

Составители:
В.Н. Орлов, В.К. Ахметов

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2020

УДК 519.6
ББК 22.19
М34

Рецензент — доктор технических наук *Б.П. Титаренко,*
профессор кафедры прикладной математики НИУ МГСУ

М34 **Математическое моделирование** [Электронный ресурс] : методические указания к практическим работам для аспирантов по направлениям подготовки 05.06.01 Науки о земле, 08.06.01 Техника и технологии строительства, 15.06.01 Машиностроение, 21.06.01 Геология, разведка и разработка полезных ископаемых / сост. : В.Н. Орлов, В.К. Ахметов ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра прикладной математики. — Электрон. дан. и прогр. (0,7 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020. — Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/. — Загл. с титул. экрана.

В методических указаниях даны пояснения и комментарии ключевых моментов к изучению материала, включенного в дисциплину «Математическое моделирование». В соответствующих случаях дается ссылка на рекомендуемые источники для изучения материала. С целью закрепления теоретического материала и выработки практических навыков в математическом моделировании приведены индивидуальные задания для проведения численных экспериментов.

Для аспирантов по направлениям подготовки 05.06.01 Науки о земле, 08.06.01 Техника и технологии строительства, 15.06.01 Машиностроение, 21.06.01 Геология, разведка и разработка полезных ископаемых.

Учебное электронное издание

Редактор, корректор *Л.И. Ильина*
Компьютерная верстка *О.В. Суховой*
Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2007, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию 18.03.2020. Объем данных 0,7 Мб.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Оглавление

Введение

В методических указаниях приведены дидактические материалы, необходимые для проведения практических занятий аспирантов по дисциплине «Математическое моделирование». Все задания (упражнения и задачи) предназначены для развития у аспирантов выполнения их на репродуктивном (тренировочном), реконструктивном (воспроизведение и обобщение возможных решений) уровнях, а также на творческом (поисковом) уровне, требующем анализа проблемной ситуации и поиска путей ее решения. Задания составлены с целью развития кругозора знаний, навыков логического мышления, выработки практических навыков в математическом моделировании различных процессов, умения получать прогноз и применять математическое моделирование в своей профессиональной деятельности. При изучении дисциплины «Математическое моделирование» предлагается освоить теоретический материал, получить навыки построения математических моделей и на их основе расчета прогнозов, а также применять полученные знания, умения и навыки в своей профессиональной деятельности. Методические указания обеспечиваются материалом, представленным в списке литературы.

Раздел 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ВАРИАНТЫ ЕЕ ОСНОВЫ

1.1. Основные понятия и определения

Напомним основные понятия: модель и ее разновидности [1].

Определение 1. Модель — это образ или отражение какого-либо процесса или явления, полученное с помощью специальных средств. Специальными средствами могут быть: математические, технические, физические, компьютерные, имитационные и т.д. Поясняя определение 1, будем иметь в виду соответствующие модели.

Определение 2. Математическая модель — это образ или отражение какого-либо процесса или явления, полученное с помощью математических средств.

Определение 3. Компьютерная модель — это образ или отражение какого-либо процесса или явления, полученное с помощью компьютерных средств.

Определение 4. Процесс получения моделей называют моделированием.

Следует отметить, что многие виды моделей взаимосвязаны. Например, компьютерная модель не может быть без математической. Особая роль отводится математической модели как одному из строгих и точных методов обоснования проводимых исследований в различных областях деятельности человека, что подтверждается многочисленными публикациями. Вторым важным моментом является тот факт, что только математическая модель позволяет получать прогнозы, качество которых напрямую зависит от качества самой математической модели. Таким образом, мы приходим к следующему понятию — показателю качества математической модели, который во многом зависит от основы математической модели. Приведем классификацию математических моделей в зависимости от ее основы:

1. Математическая модель балансовых задач.
2. Математическая модель линейной торговли.
3. Математическая модель распределительных задач.
4. Математическая модель оптимизационных задач.
5. Математическая модель статистических задач.
6. Математическая модель, основанная на уравнениях.
7. Математическая модель в расчетах строительных конструкций.

1.2. Математическая модель балансовых задач

Балансовые задачи встречаются в разных областях, например в природе, производственной сфере. Отсутствие баланса приводит к кризису, катастрофам. Имея математическую модель подобной задачи, можно предотвращать негативные процессы. Рассмотрим один из вариантов балансовой задачи — модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева):

$$X = AX + Y, \tag{1.2.1}$$

где X — объем валового выпуска продукции, состоит из объема производственного потребления AX и объема конечного потребления Y. Математическая модель позволяет рассчитать объем конечного потребления Y, если известен объем валового выпуска

$$Y = X - AX.$$

Также можно решить более сложную задачу: определить новый объем валового выпуска по заданному новому объему конечного потребления. Для этого необходимо матричное уравнение (1.2.1) решить относительно X. После ряда преобразований получаем

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Следует отметить, что эти решения имеют смысл только в случае, когда матрица прямых затрат A является продуктивной. Элементы этой матрицы рассчитываются по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},$$

где x_{ij} — объем продукции, производимой отраслью с индексом i и потребляемой отраслью с индексом j при производстве своей продукции объемом x_j. Для определения продуктивности матрицы прямых затрат существуют следующие критерии:

1. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.
2. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1,$$

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы. Элементы матрицы A a_{ij} рассчитываются по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \text{ где } i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n.$$

Схему расчетов можно выполнить в Excel, учитывая особенность работы с цифровой и символьной информацией в Excel.

Таблица 1

Пример модели межотраслевого баланса

Объем выпуска отраслей	Объем потребления отраслей			Объем конечного потребления отрасли Y	Объем валового выпуска отрасли X
	№ 1	№ 2	№ 3		
№ 1	5	35	20	40	100
№ 1	10	10	20	60	100
№ 3	20	10	10	10	50

Составим матрицу прямых затрат A, объем валового выпуска X и объем конечного потребления Y (в соответствии с данными из табл. 1):

$$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет критериям продуктивности. Для нового объема конечного потребления

$$Y_i = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

новый объем валового выпуска получаем из формулы

$$X_i = (E-A)^{-1} \cdot Y_i.$$

Рассчитываем матрицу $(E-A)^{-1}$:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,323 & 0,623 & 0,973 \\ 0,311 & 1,323 & 0,817 \\ 0,37 & 0,321 & 1,595 \end{pmatrix}.$$

Вычисления произведены с точностью до третьего знака после запятой. Тогда

$$X_i = (E - A)^{-1} Y_i = \begin{pmatrix} 152,2 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Новый объем конечного потребления Y_i требует увеличения объема валового выпуска для 1-й отрасли на 52,2 единицы, для 2-й отрасли — на 35,8 единицы, для 3-й отрасли — на 42,5 единицы.

Сравнение величины затрат каждой отрасли на дополнительный объем валового выпуска и прибыли от реализации соответствующего объема конечного продукта дает ответ на вопрос об эффективности нового плана объема конечного потребления.

1.3. Математическая модель задачи линейной торговли

Математическая модель торговли представляется матричным уравнением

$$A \cdot X = X, \tag{1.3.1}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — структурная матрица торговли,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Пример структурной матрицы торговли:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджет каждого участника, если общий бюджет задан:

$$\sum_{1}^{4} x_i = 6270 \text{ у.е.} \tag{1.3. 2}$$

Решение задачи следует из решения матричного уравнения (1.3.1):

$$(A - E) \cdot X = 0. \tag{1.3.3}$$

Уравнение (1.3.3) представляет однородную систему уравнений, решение которой можно получить методом Гаусса:

$$x_1 = \frac{140}{121} x_4, \ x_2 = \frac{146}{121} x_4, \ x_3 = \frac{20}{11} x_4.$$

Из (1.3.2) следует, что $x_4 = 1210$. Окончательно получаем

$$x_1 = 1400, \ x_2 = 1460, \ x_3 = 2200, \ x_4 = 1210.$$

1.4. Математическая модель оптимизационных задач

Математическая модель оптимизационных задач состоит из системы ограничений исследуемого процесса и целевой функции этого процесса, отражающей критерий оптимальности задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \ i = 1, 2, 3, \dots, m, \tag{1.4.1}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.4.2}$$

$$z_{\substack{\max \\ (\min)}} = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j. \tag{1.4.3}$$

Знаки отношений в (1.4.1) могут иметь любую комбинацию из набора $(\leq, \geq, >, <, =)$. Ограничения (1.4.2) отражают характер задачи, переменные в оптимизационных задачах не могут быть отрицательными, в противном случае задача теряет смысл. Если система ограничений представляет ограниченное множество, то задача имеет решение, в противном случае не имеет решения.

Определение. Ограниченное множество, заданное с помощью системы ограничений (1.4.1) и (1.4.2), называют множеством допустимых решений.

Определение. Линию (поверхность), ограничивающую область допустимых решений, называют границей этой области.

Точки области допустимых решений делятся на внутренние точки и точки, лежащие на границе области.

Определение. Множество называют выпуклым, если отрезок прямой, соединяющей любые две внутренние точки области, принадлежит этой области.

Определение. Границу выпуклого множества называют симплексом.

В случае плоскости симплексом является многоугольник, а в случае трехмерного пространства — многогранник.

В теории линейного программирования доказано, что оптимальное решение задачи находится в одной из вершин симплекса.

Существует геометрический метод решения задачи линейного программирования в случае двух или трех переменных. Если количество переменных более трех, применяется симплексный метод решения.

Для оптимизации поиска оптимального решения применяется градиент целевой функции

$$\overline{grad}\ z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right\},$$

который представляет собой вектор, определяющий направление наискорейшего возрастания (убывания) целевой функции. Для нахождения оптимального решения в любой внутренней точке области допустимых решений строится прямая перпендикулярно градиенту целевой функции. Если эта прямая, называемая разрешающей линией, двигается в направлении градиента целевой функции, то последняя точка соприкосновения разрешающей линии с областью допустимых решений представляет максимум целевой функции. Если движение разрешающей линии было в направлении, противоположном градиенту, получим минимум целевой функции.

Симплексный метод основан на расчетах, представляемых в симплексных таблицах [1].

1.5. Математическая модель распределительных задач

Специфика распределительных задач:

1) система ограничений представляет собой систему уравнений;
2) все коэффициенты при переменных системы ограничений равны единице;
3) каждая переменная в системе ограничений участвует только в двух соотношениях.

Система ограничений состоит из двух групп:

1) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, \ldots, m;$$

2) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \ldots, n.$$

Выражение целевой функции:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} .$$

Учитывая специфику распределительных задач, система ограничений дополняется условием

$$\forall\, i, j:\ x_{ij} \ge 0 .$$

Распределительная задача является задачей закрытого типа, если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

в противном случае будем иметь задачу открытого типа. Существующий метод решения распределительной задачи применим только к задаче закрытого типа. Процедура приведения задачи открытого типа к закрытому типу связана с введением фиктивных участников.

Метод решения распределительной задачи называют методом потенциалов и характеристик. Потенциалы строк обозначают u_i, для столбцов v_j (табл. 2). Для расчета этих элементов используют формулу

$$v_j - u_i = c_{ij} ,$$

для заполненных клеток таблицы расчетов распределительной задачи, где c_{ij} — элементы, называемые тарифами, присутствуют в таблицах расчетов распределительных задач и в целевой функции. Элемент, называемый характеристикой, обозначают w_{ij}. Она рассчитывается для свободных клеток таблицы расчетов распределительной задачи по формуле

$$w_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i) .$$

Характеристика содержит важную информацию о качестве решения задачи (плана) — отражает величину экономии на единицу продукции за счет улучшения решения (плана) путем перераспределения продукции в свободную клетку таблицы. Таким образом, характеристика может являться критерием оптимальности решения задачи:

1) если задача решается на $\min$ целевой функции, то критерием оптимального решения является отсутствие отрицательных характеристик в свободных клетках таблицы расчетов распределительной задачи;
2) если задача решается на $\max$ целевой функции, то критерием оптимального решения является отсутствие положительных характеристик в свободных клетках таблицы расчетов распределительной задачи.

Процесс получения оптимального решения связан с улучшением неоптимального первоначального решения (пример первоначального решения приведен в табл. 3). Затем производится расчет потенциалов строк и столбцов, а на их основании определяются характеристики свободных клеток. Анализируя характеристики на критерий оптимальности решения, строим контур перераспределения. Начало контура перераспределения находится в клетке с наименьшей отрицательной характеристикой, а движение продолжается либо по горизонтали, либо по вертикали таблицы до заполненной клетки, пока не вернемся в клетку, с которой было начато движение. Структура контура выбирается таким образом, чтобы можно было вернуться в первоначальную клетку. В клетках контура перераспределения проставляются чередующимися знаками $(+)$ и $(-)$. Плюс начинается с первой клетки. Среди клеток со знаком $(-)$ выбираем клетку с минимальным значением. На эту величину и происходит перераспределение. В клетках со знаком $(-)$ все значения уменьшаются на величину перераспределения, а в клетках со знаком $(+)$ — увеличиваются. Улучшенное решение вновь проверяется на критерий оптимальности.

Таблица 2

Структура расчета методом потенциалов

N	u_i \ v_j	1	2	3	a_i
		v_1	v_2	v_3	
1	u_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
2	u_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
3	u_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	a_3
4	u_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	a_4
b_j	–	b_1	b_2	b_3	$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$

Таблица 3

Первоначальное решение по методу северо-западного угла

N	u_i \ v_j	1	2	3	a_i
		v_1	v_2	v_3	
1	u_1	8000			8000
2	u_2	4000	1000		5000
3	u_3		8000	2000	10000
4	u_4			7000	7000
b_j	–	12000	9000	9000	30000

Перед началом расчетов проверяем условие: количество заполненных клеток в первоначальном решении должно быть равно $N = n + m - 1$, где n — количество строк, m — количество столбцов таблицы. Если это условие не выполняется, значит, получаем один из случаев вырождения. Выход из такого положения будет пояснен ниже.

Случаи вырождения и их устранение:

1) при получении первоначального решения $a_i = b_j$;
2) в контуре перераспределения встречаются клетки со знаком $(-)$, имеющие одинаковые значения.

Варианты устранения случаев вырождения:

1) поменять местами столбцы таблицы, чтобы не выполнялось условие $a_i = b_j$, либо построить первоначальное решение другим способом, чтобы не выполнялось условие $a_i = b_j$;
2) принять клетку с нулевым значением условно за занятую, т.е. ввести фиктивную занятую клетку.

Открытая модель распределительной задачи приводится к закрытой путем введения фиктивной строки или столбца, в зависимости от ситуации, чтобы модель стала закрытой. Фиктивная строка либо столбец должны иметь тарифы для хода расчетов в зависимости от характера задачи $(\min, \max)$, чтобы исключить их в конечном итоге из решения задачи.

1.6. Математическая модель статистических задач

Очень часто во многих областях встречаются явления, процессы, которые сопровождаются двумя наборами значений. Первый набор значений соответствует исходной информации, а второй набор соответствует результату исследуемого процесса или явления. Математическая модель подобных явлений и процессов является их образом и позволяет получить о них дополнительную информацию, в том числе и прогноз. Введем определения.

Определение. Данные, характеризующие объект и не меняющиеся со временем, назовем пространственными.

Определение. Данные, характеризующие объект и меняющиеся со временем, назовем временными рядами.

Отметим, что данная классификация не является абсолютной. Они взаимосвязаны, каждая категория данных может переходить из одного вида в другой. Математическая модель пространственных данных основана на уравнениях регрессионного анализа (линейных и нелинейных, однофакторных и многофакторных). Математическая модель временных рядов более сложна и основана на уравнениях, составной частью которых является основа математической модели пространственных данных. Виды уравнений в зависимости от структуры: 1) аддитивная: $Y = S + T + E$; 2) мультипликативная: $Y = S \cdot T \cdot E$, где Y — величина, характеризующая временной ряд; S — циклическая компонента временного ряда; T — трендовая компонента временного ряда; E — случайная компонента временного ряда. Математические модели сопровождаются параметрами: 1) статистическим критерием значимости модели; 2) критерием качества модели. Прогнозирование в моделях основано на дисперсионном анализе (приведен авторский подход [2]). Выбор структуры модели временного ряда связан с анализом параметров циклической компоненты. Если частота и амплитуда циклической компоненты стабильны, то предпочтение имеет аддитивная структура модели временного ряда. Иначе выбирается мультипликативная модель для временного ряда [3].

1.7. Математическая модель, основанная на дифференциальных уравнениях

1.7.1. Теоремы существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений

На данном этапе вначале идет обзор литературы [4, 5], содержащей источники с основами теории дифференциальных уравнений, ее классификацией и методами решения. Для наглядности информацию можно представить в виде двух блок-схем. На первой схеме нужно представить классификацию дифференциальных уравнений, а на второй — дать методы решения дифференциальных уравнений. Затем необходимо обратить внимание на особенности классической теоремы существования решения дифференциального уравнения (теорема Коши, Пикара) и их возможности (привести классификацию теорем существования из предлагаемой для изучения литературы). После этого требуется перейти к классическим методам решения дифференциальных уравнений, начиная с точных методов, затем возможно применить операторный метод. Далее необходимо разобрать приближенные методы (аналитические и численные) и завершить асимптотическими методами. При анализе методов решения требуется подчеркнуть особенность всех категорий методов решения.

Сочетание особенностей нелинейных дифференциальных уравнений, теорем существования и методов решения даст представление о возникающих проблемах при решении нелинейных дифференциальных уравнений. Затем идет обзор литературы последнего времени по способам решения нелинейных дифференциальных уравнений с анализом предлагаемых методов.

Различные аспекты теорем существования

Напомним классификацию теорем существования, предлагаемую в рекомендованной литературе [4, 5]. Сочетание аспектов классических теорем существования решения дифференциальных уравнений с основами классических методов решения и особенностями нелинейных дифференциальных уравнений (наличие подвижных особых точек) позволит обосновать возможный вариант аналитического приближенного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. При этом следует отметить идею доказательства классических теорем существования (метод мажорант к правой части дифференциального уравнения) и необходимости выбора нового подхода (метод мажорант к решению исходного уравнения).

1.7.2. Теоремы существования решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности подвижных особых точек

Следует отметить, что рассматриваемый материал отсутствует в классической теории дифференциальных уравнений. Целесообразно обратить внимание на основу метода мажорант при решении исходного уравнения (два этапа) [4, 5]. На первом этапе строится формальная структура решения с доказательством однозначности, а на втором — доказывается сходимость полученных структур (рядов). Если на первом этапе получаем два математических соотношения, то первое доказывает факт существования подвижных особых точек, а второе — однозначность структуры решения, то на втором этапе — на основе рекуррентной формулы (второе соотношение) удается обосновать оценки, на основе которых доказывается сходимость структуры решения, полученного в виде функционального ряда. Следует заметить, что теорема существования решения является и теоремой существования подвижных особых точек. С целью усвоения материала и выработки навыков проведения математических доказательств предлагается самостоятельная тренировка доказательства теоремы для полученного вида уравнения с представлением в соответствующем отчете по научно-исследовательской работе.

Об оценках области аналитичности решений задачи Коши нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Материал данного раздела опирается на разделы 1.1, 1.2 и 1.4 [4, 5]. Здесь отрабатывается технология метода мажорант к решению нелинейного дифференциального уравнения по условию персонального задания. Ведется отработка расчета области действия теоремы по доказываемым формулам.

1.7.3. Определение координат подвижных особых точек с априори заданной точностью. Критерии существования подвижных особых точек для вещественной и комплексной областей

Материал данного раздела 1 п. 1.7.3 представляет необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек решений нелинейного дифференциального уравнения [4, 5]. Если теорема существования решения в окрестности подвижной особой точки утверждает лишь сам факт существования этих особых точек, то критерии данного раздела составляют основу алгоритма и программного обеспечения для персонального компьютера получения подвижных особых точек с заданной точностью. В зависимости от области, в которой ведутся расчеты (вещественная или комплексная), критерии для каждой области свои. Критерии можно классифицировать на точечные и интервальные. Если точечные могут применяться для подтверждения подвижной особой точки, то интервальные позволяют получить подвижную особую точку с заданной точностью. Тексты программ для некоторой категории нелинейных дифференциальных уравнений представлены в указанных источниках списка литературы. Для получения критериев использовалась теорема существования решения, технология регуляризации особой точки. Для расчетов в вещественной области в программе применялся численный метод Рунге — Кутта четвертого порядка. В зависимости от характера подвижной особой точки (простые, кратные и критические полюса), алгоритм ее получения основан либо на двухстороннем итерационном процессе деления отрезка, либо на одностороннем итерационном процессе. В случае вещественной области вычислительный процесс интерпретируется геометрически на плоскости. В случае комплексной области вводятся фазовые пространства, которые позволяют выполнить геометрическую интерпретацию вычислительного процесса. В отличие от вещественной области в комплексной области вычислительный процесс опирается на аналитическое приближенное решение. Изучение материала данного раздела направлено на освоение технологии получения критериев существования подвижных особых точек, формулировки и доказательства теорем, начиная с геометрической интерпретации критериев.

Алгоритмы определения координат подвижных особых точек

Материал данного раздела содержит элементы программирования, составление блок-схем программ и их описание [4, 5]. Вначале необходимо ознакомиться с системой обозначения блоков, их назначением, расположением, схемой разветвлений и соединений. На следующем этапе осваивается технология описания блок-схем. Как показывает практика, для более сложных задач с первого раза не удается правильно составить блок-схему. При написании программ блок-схема корректируется. С вариантами блок-схем и их описанием можно ознакомиться в приведенной литературе [4, 5].

1.7.4. Построение аналитических приближенных решений в окрестности подвижных особых точек для вещественной и комплексной областей. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Материал данного раздела 1 п. 1.7.4 основан на результатах теоремы существования, раздел 1 п. 3 [4]. Полученные оценки для коэффициентов мероморфного ряда, представляющего решение нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки, позволяют построить аналитическое приближенное решение, получить для него априорную оценку. С помощью апостериорной оценки удается улучшить априорную оценку.

1.7.5. Влияние возмущений координат подвижных особых точек на приближенные решения в вещественной и комплексной областях. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Материал данного раздела 1 п. 1.7.5 основан на результатах раздела 1 п. 3 и раздела 3 п. 1 [4]. Полученные оценки для коэффициентов мероморфного ряда, представляющего решение нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки, позволяют построить аналитическое приближенное решение y_n и исследовать влияние возмущения подвижной особой точки $\tilde{x}^*$ на аналитическое приближенное решение y_n, получить для него априорную оценку. С помощью апостериорной оценки удается улучшить априорную оценку.

1.7.6. О границах области применения приближенных решений в окрестности приближенных значений координат подвижных особых точек. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Материал раздела 1 п. 1.7.6 предполагает овладение материалом предыдущих разделов для скалярного дифференциального уравнения Риккати [4]. На этом этапе завершается исследование аналитического приближенного решения для дифференциального уравнения Риккати в окрестности подвижной особой точки. Данный материал дополняет результаты предыдущего раздела. Особенность при получении априорной оценки погрешности аналитического приближенного решения $\tilde{y}_n(x\ )$ заключается в подходе получения априорной погрешности. Если первоначальный подход связан с классическим правилом треугольника, то второй вариант основан на элементах дифференциального исчисления. Еще раз подчеркнем, что каждый из перечисленных вариантов в отдельности не дает ответа на задачи, связанные с аналитическим приближенным решением $\tilde{y}_n(x)$ в окрестности подвижной особой точки $\tilde{x}^*$.

1.7.7. Исследование влияния возмущения начальных данных на приближенные решения. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Материал раздела 1 п. 1.7.7 основан на теореме существования решения дифференциального уравнения Риккати в области аналитичности (раздел 1 п. 4 [4]). Метод мажорант, примененный при доказательстве, позволяет получить оценки для коэффициентов регулярного ряда, представляющего решение дифференциального уравнения Риккати. Эти оценки позволяют построить аналитическое приближенное решение в области аналитичности, рассчитать все его характеристики (структуру приближенного решения, точность) и решить возникающие задачи. Раздел 6 п.1 работы [4] позволяет определить структуру приближенного решения, получить его априорную оценку, а также решить задачу влияния возмущения начальных данных на приближенное решение.

1.8. Математическая модель в расчетах строительных конструкций

Пусть задан функционал

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i, \tag{1.8.1}$$

где A — симметричная и положительно определенная матрица ($(Ax, x) > 0$ при всех x), b — заданный вектор.

Требуется найти $\min \Phi(x)$ на множестве векторов x.

Условие минимума функционала (минимума функции нескольких переменных) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \quad \text{или } A \cdot x = b, \tag{1.8.2}$$

Решение (1.8.2) является точкой минимума функционала (1.8.1), то есть существует взаимно однозначное соответствие между задачей о минимуме функционала и решением системы линейных уравнений с симметричной матрицей.

Вариационная постановка задачи об изгибе растянуто-изогнутой балки

Из раздела математики «Вариационное исчисление» следует, что задача об изгибе растянуто-изогнутой балки может быть представлена задачей на минимум следующего функционала [7]:

$$\Phi(y(x)) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} (EJy'(x)^2 + Py(x)^2)dx - \int_0^{\ell} M(x)y(x)dx, \tag{1.8.3}$$

где $y(x)$ — функция прогиба балки, $EJ = EJ(x)$ — жесткость балки, P — заданная осевая сила, $M(x)$ — изгибающий момент в балке, вызванный действием поперечной нагрузки $q(x)$ (известен, поскольку балка статически определимая), ℓ — длина балки.

Задача состоит в определении функции $y(x)$, для которой функционал $\Phi(y)$ принимает минимальное значение ($\min \Phi(y)$). При этом функция $y(x)$, изображенная на рисунке, должна удовлетворять дополнительному условию $y(0) = y(\ell) = 0$ — *шарнирное опирание*.

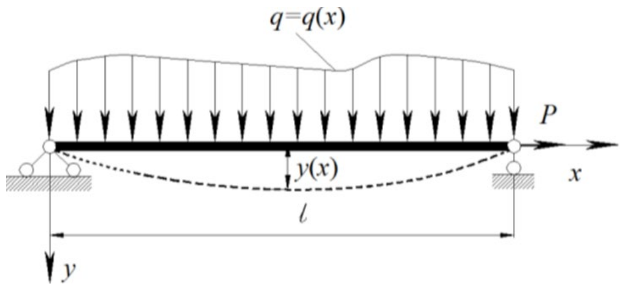

Рис. Изгиб балки с растяжением

Из курса «Вариационное исчисление» следует, что такая задача на минимум эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} -EJy'' + py = M(x), & x \in (0, \ell), \\ y(0) = y(\ell) = 0 & \text{— краевые условия.} \end{cases} \tag{1.8.3a}$$

Большинству технических задач [8-10], как правило, также соответствуют две эквивалентные постановки: вариационная (задача на минимум функционала) и краевая (представленная дифференциальным уравнением и краевыми условиями), имеющие одно и то же решение. По целому ряду соображений вариационная постановка предпочтительнее, поскольку она приводит к более простым и универсальным алгоритмам решения.

Решение вариационной задачи

Разобьем отрезок $(0, \ell)$ на $(N-1)$ частей (на конечные элементы). Введем обозначения:

x_i — координата начала i-го конечного элемента (точка разбиения),

$h_i = x_{i+1} - x_i$ — длина i-го конечного элемента,

$y_i = y(x_i)$ — значение искомой функции в i-й точке разбиения.

Представим $\Phi(y)$ в виде суммы

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{N-1} \Phi_i(y), \tag{1.8.4}$$

$$\Phi_i(y(x)) = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (EJy'(x)^2 + py(x)^2)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} M(x)y(x)dx.$$

Примем, что внутри каждого i-го элемента ($x \in (x_i, x_{i+1})$) функция $y(x)$ линейная и принимает на краях элемента соответственно значения y_i и y_{i+1}:

$$y(x) = y_i(x) = (1-z)y_i + zy_{i+1},$$

где $z = \dfrac{x - x_i}{h_i}$, $x \in (x_i, x_{i+1})$.

Обозначим $\psi_1 = 1 - z$, $\psi_2 = z$, $\upsilon_1^i = y_i$, $\upsilon_2^i = y_{i+1}$.
Тогда

$$y_i(x) = \psi_1 \upsilon_1^i + \psi_2 \upsilon_2^i = (\overline{\psi}, \overline{\upsilon}^i), \tag{1.8.5}$$

где $\psi_1 = 1 - z$ и $\psi_2 = z$ — называются *функциями формы*, при этом производные функций форм имеют вид: $\psi_1' = -1$, $\psi_2' = 1$; $\upsilon_1^i = y_i$ и $\upsilon_2^i = y_{i+1}$ — называются *локальными неизвестными i-го элемента*;

$\overline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ и $\overline{\upsilon}^i = \begin{pmatrix} \upsilon_1^i \\ \upsilon_2^i \end{pmatrix}$ — векторы функций форм и локальных неизвестных соответственно.

Подставляя $y_i(x)$ в $\Phi_i(y)$ и делая замену переменных, получим

$$\Phi_i(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{EJ}{h_i}(\psi_1' \upsilon_1^i + \psi_2' \upsilon_2^i)^2 + h_i p(\psi_1 \upsilon_1^i + \psi_2 \upsilon_2^i)^2 \right) dz -$$

$$- h_i \int_0^1 M(x)(\psi_1 \upsilon_1^i + \psi_2 \upsilon_2^i)dz.$$

Вычисляя интегралы и приводя подобные члены, получим:

$$\Phi_i(\overline{y}) = \Phi_i(\overline{\upsilon}^i) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} K_{st}^{\,i} \upsilon_s^i \upsilon_t^i - \sum_{s=1}^{2} R_s \upsilon_s^i = \frac{1}{2}(K^i \overline{\upsilon}^i, \overline{\upsilon}^i) - (\overline{R}^i, \overline{\upsilon}^i), \tag{1.8.6}$$

где матрица K^i называется *матрицей жесткости i-го конечного элемента*. В свою очередь, ее элементы вычисляются по формуле

$$K_{st}^i = \int_0^1 \left(\frac{EJ}{h_i}\psi'_s\,\psi'_t + h_i\, p\psi_s\psi_t\right)dz,\ s = 1,2,\ t = 1,2.$$

Вектор $\overline{R}^i$ называется *вектором нагрузки i-го элемента*. Его компоненты вычисляются по формуле

$$R_s^i = h_i \int_0^1 M(z)\,\psi_s(z)dz,\ s = 1,2.$$

Опуская промежуточные выкладки, получим

$$K^i = \frac{EJ}{h_i}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{ph_i}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{1.8.7}$$

$$\overline{R}^i = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \frac{M_i h_i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.8.8}$$

где $M_i = M\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right)$.

Глобальные матрица жесткости и вектор нагрузки

Общий функционал, представляющий сумму функционалов по элементам, примет вид:

$$\Phi_h(\overline{y}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(K^i\overline{\upsilon}^i, \overline{\upsilon}^i) - \sum_{i=1}^{N-1}(\overline{R}^i, \overline{\upsilon}^i), \tag{1.8.9}$$

где $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_N)^{\mathrm{T}}$.

Из определения вектора $\overline{\upsilon}^i$ следует, что $\upsilon_s^i = y_{i+s-1}$. Заменяя в (1.8.9) компоненты векторов $\overline{\upsilon}^i$ на компоненты вектора $\overline{y}$ и опуская промежуточные выкладки, получим:

$$\Phi_h(\overline{y}) = \frac{1}{2}(K\,\overline{y}, \overline{y}) - (\overline{R}, \overline{y}),$$

где K называется *глобальной матрицей жесткости*.

Элементы матрицы K вычисляются по формулам

$$K_{ij} = \begin{cases} K_{21}^{i-1} & \text{при} \quad j = i-1, \\ K_{22}^{i-1} + K_{11}^{i} & \text{при} \quad j = i, \\ K_{12}^{i} & \text{при} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{при} \quad |i-j| > 1. \end{cases} \tag{1.8.10}$$

Общая структура:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & & & & \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & & & & \\ & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & & & \\ & & K_{21}^3 & \ddots & \ddots & & \\ & & & & K_{21}^{N-2} & K_{22}^{N-2} + K_{11}^{N-1} & K_{12}^{N-1} \\ & & & & & K_{21}^{N-1} & K_{22}^{N-1} \end{bmatrix}.$$

R называется *глобальным вектором нагрузки*. Компоненты вектора R вычисляются по формулам

$$R_i = R_2^{i-1} + R_1^i. \tag{1.8.11}$$

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 + R_1^2 \\ R_2^2 + R_1^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_2^{N-2} + R_1^{N-1} \\ R_2^{N-1} \end{bmatrix}.$$

При программировании вычисления элементов глобальной матрицы жесткости и правой части наиболее удобными являются формулы (формулы «конечных вкладов»):

$$K_{i+s-1,i+t-1} = \sum_{i=1}^{N-1} K_{st}^{i}\,,\ s=1,2\,,\ t=1,2,$$

$$R_{i+s-1} = \sum_{i=1}^{N-1} R_{s}^{i}\,,\ s=1,2. \tag{1.8.12}$$

Замечание. На практике, как правило, локальные матрицы жесткости и векторы нагрузки (1.8.7)-(1.8.8) для конкретного вида конструкции известны заранее (существует специальная библиотека конечных элементов). Они соответствуют математическому выражению под знаком интеграла в исходном функционале и конфигурации конечных элементов. Поэтому основная задача расчетчика состоит в разбиении конструкции на конечные элементы и формировании глобальных матрицы жесткости и вектора нагрузки (хотя и здесь имеются стандартные алгоритмы).

Решение задачи получаем из решения глобальной системы

$$K\overline{y} = \overline{R}\,. \tag{1.8.13}$$

Учет закреплений

Для того чтобы удовлетворить условию $y_1 = y_N = 0$, следует приравнять нулю элементы первых и последних строк и столбцов матрицы *K*, а затем положить $K_{11} = K_{NN} = 1$ и $R_1 = R_N = 0$.

Раздел 2. ТЕХНОЛОГИИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

2.1. Технологии прогнозирования в математической модели балансовых задач

Прогнозирование в балансовых задачах связано с решением обратной задачи, когда по новому объему конечного потребления требуется найти новый объем валового выпуска, приемлемый для производителя, чтобы он позволял получить желаемый доход. В первом приближении это можно определить по соотношению дополнительного объема валового выпуска и дополнительного объема конечного потребления. Предпочтительным вариантом является перевес дополнительного объема конечного потребления над дополнительным объемом валового выпуска. Более точно этот вопрос может быть решен путем подсчета разницы между затратами на производство дополнительного объема валового выпуска продукции и величиной прибыли от дополнительного объема конечного потребления. Дополнительным рычагом в решении задачи прогнозирования может быть корректировка объема производственного потребления в балансовой модели. Направление правильности корректировки определяется путем проведения экспериментов в расчетах балансовой модели. Минимальное количество экспериментов — 3.

2.2. Технологии прогнозирования в математической модели задачи линейной торговли

Прогнозирование в задаче линейной торговли связано с изменением структурной матрицы торговли. Выделим элементы структурной таблицы торговли, которые планируем изменить. Стрелочка вида $\uparrow$ означает увеличение бюджета торговли, $\downarrow$ — уменьшение бюджета торговли. Оговорим, что объемы изменений одинаковые. В силу характера торговли, который учитывает взаимность интересов, процесс изменения структурной матрицы торговли можно остановить только за счет объемов внутренней торговли и для новой структурной матрицы торговли можем получить решение уравнения (3). Пример изменения структурной матрицы торговли на величину объема 0,1 и остановки процесса изменения за счет внутренней торговли:

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3\downarrow & 0,2 & 0,2\uparrow \\ 0,4\downarrow & 0,3 & 0,1 & 0,2\uparrow \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1\uparrow & 0,1\uparrow & 0,2 & 0,4\downarrow \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

2.3. Технологии прогнозирования в математической модели оптимизационных задач

Технология прогнозирования в моделях оптимизационных задач связана с анализом двойственных оценок. Определяя дефицитность очередных ресурсов, можно увеличить объем производимой продукции, двигаясь от одного вида дефицитного ресурса к другому, максимально используя имеющийся недефицитный ресурс.

2.4. Технологии прогнозирования в математической модели распределительных задач

Прогнозирование в математических моделях распределительных задач можно осуществить: 1) меняя объемы предлагаемого ресурса; 2) меняя объем потребляемого ресурса; 3) меняя тарифы распределительной задачи; 4) комбинируя предыдущие варианты в любом порядке.

2.5. Технологии прогнозирования в математической модели статистических задач

Прогнозирование в моделях статистических задач осуществляется на основе точечного прогноза, полученного по построенной математической модели, расчету величины стандартной ошибки прогнозируемого значения на основе дисперсионного анализа [1] и получении доверительного интервала прогнозируемого значения.

2.6. Технологии прогнозирования в математической модели, основанной на дифференциальных уравнениях

Технология прогнозирования в математических моделях, основанных на дифференциальных уравнениях, связана с особенностями этих дифференциальных уравнений. В данном случае это связь с подвижными особыми точками. Если подвижная особая точка интерпретируется с негативным моментом исследуемого процесса, а ее положение зависит от начальных условий задачи Коши, то, изменяя последние, можно изменить положение подвижной особой точки и таким образом повлиять на негативный процесс.

2.7. Технологии прогнозирования в математической модели расчетов строительных конструкций

Прогнозирование в математических моделях, основанных на методе конечных элементов, основано на многократном проведении численных экспериментов с новыми краевыми условиями. Анализ полученных многократных расчетов позволяет определить направление изменения краевых условий задачи для получения необходимых параметров конструкции.

Раздел 3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОЛУЧЕНИЯ ПРОГНОЗОВ

3.1. Варианты заданий для математической модели балансовых задач

Варианты исходной информации для заданий самостоятельной работы. Значение $i = N$, где N — номер по списку в группе. Значения валового выпуска X (представлены в табл. 4) определяются исходя из баланса объема валового выпуска и значений конечного потребления и производственного потребления.

Таблица 4

Варианты заданий

Объем выпуска отраслей	Объем потребления отраслей			Объем конечного потребления отрасли Y	Объем валового выпуска отрасли X
	№ 1	№ 2	№ 3		
№ 1	$5 + i$	$35 + i - 1$	$20 + i$	$40 + i + 5$	
№ 2	$10 + i$	$10 + i$	$20 + i - 3$	$60 + i + 8$	
№ 3	$20 + i - 2$	$10 + i + 4$	$10 + i + 6$	$10 + i + 7$	

3.2. Варианты заданий для математической модели задачи линейной торговли

Найти бюджет каждого участника, если задана структурная матрица торговли и общий бюджет:

1. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 6270 \text{ у.е.};$$

2. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 6470 \text{ у.е.};$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 6470 \text{ у.е.};$$

4. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 6600 \text{ у.е.};$$

5. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 6770 \text{ у.е.};$$

6. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 7270 \text{ у.е.};$$

7. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 8270 \text{ у.е.};$$

8. $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$$\sum_1^4 x_i = 6870 \text{ у.е.};$$

9. $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\sum_{1}^{4} x_i = 6870$ у.е.;

10. $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\sum_{1}^{4} x_i = 8670$ у.е.;

11. $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\sum_{1}^{4} x_i = 9270$ у.е.;

12. $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\sum_{1}^{4} x_i = 8470$ у.е.

3.3. Варианты заданий для математической модели оптимизационных задач

Найти оптимальное решение:

1) $\begin{array}{l} z_{\max} = 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2, \\ 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2, \\ -3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 15, \\ x_1 \le 5,\ x_2 \ge 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$

2) $\begin{array}{l} z_{\max} = 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2, \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 20, \\ -x_1 + x_2 \ge 1, \\ 25\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} z_{\max} = 4\cdot x_1 + x_2, \\ 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 25, \\ 3\cdot x_1 - 6\cdot x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 1{,}4,\ x_2 \ge 0{,}8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$

4) $\begin{array}{l} z_{\max} = 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2, \\ 6\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 17, \\ -6\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 19, \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$

5) $\begin{array}{l} z_{\min} = 3\cdot x_1 + x_2, \\ x_1 + 2\cdot x_2 \le 15, \\ 2\cdot x_1 - x_2 \le 1, \\ 1{,}5 \le x_1 \le 6,\ x_1 \ge 0, \\ 1 \le x_2 \le 5,\ x_2 \ge 0. \end{array}$

6) $\begin{array}{l} z_{\min} = 6\cdot x_1 + 4\cdot x_2, \\ -4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 15, \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 21, \\ 1{,}5 \le x_1 \le 6{,}5, \\ 10\cdot x_1 + 25\cdot x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$

7) $\begin{array}{l} z_{\min} = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2, \\ 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 24, \\ -5\cdot x_1 + 9\cdot x_2 \ge 18, \\ x_1 \ge 1{,}5,\ x_2 \le 4{,}5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$

8) $\begin{array}{l} z_{\min} = 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2, \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 20, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ 25\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 10, \\ 0 \le x_1 \le 8,\ x_2 \ge 1. \end{array}$

3.4. Варианты заданий для математической модели распределительных задач

Найти оптимальное решение распределительной задачи на минимум затрат Z_{min}, если задана матрица тарифов и $V_{нал.\ рес.}$, $V_{пот.рес.}$:

1) $A = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 13 & 12 \\ 19 & 20 & 16 & 17 \\ 21 & 10 & 22 & 9 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (4300, 5200, 3900)$,
$V_{пот.\ рес.} = (2900, 3700, 4200, 2600)$.

2) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (3700, 2900, 2700)$,
$V_{пот.\ рес.} = (4100, 2500, 3200)$.

3) $A = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 20 \\ 21 & 25 & 15 \\ 17 & 11 & 16 \\ 14 & 19 & 10 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (2200, 1900, 3100, 4050)$,
$V_{пот.\ рес.} = (3700, 3300, 5100)$.

4) $A = \begin{pmatrix} 15 & 19 & 17 \\ 20 & 12 & 13 \\ 18 & 21 & 22 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (2800, 3100, 5100)$,
$V_{пот.\ рес.} = (3600, 2900, 4700)$.

5) $A = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 13 \\ 19 & 20 & 17 \\ 14 & 18 & 16 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (4200, 2800, 3300)$,
$V_{пот.\ рес.} = (3500, 3900, 2700)$.

6) $A = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 13 & 12 \\ 19 & 20 & 16 & 17 \\ 21 & 10 & 22 & 9 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (4300, 5200, 3900)$,
$V_{пот.\ рес.} = (2900, 3700, 4200, 2600)$.

7) $A = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 13 \\ 19 & 20 & 16 \\ 21 & 10 & 22 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (4300, 5200, 3900)$,
$V_{пот.\ рес.} = (2900, 3700, 2600)$.

8) $A = \begin{pmatrix} 11 & 18 & 13 \\ 19 & 15 & 12 \\ 21 & 10 & 22 \end{pmatrix}$

$V_{нал.\ рес.} = (4300, 4100, 3900)$,
$V_{пот.\ рес.} = (2900, 4200, 2600)$.

3.5. Варианты заданий для математической модели статистических задач

Таблица 5

Значения начальных данных

№ 1	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	13	19	22	14	21	27	16	24	30	19	27
№ 2	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	8	14	19	11	18	26	16	27	34	20	29
№ 3	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	10	16	22	14	21	27	20	24	35	25	31
№ 4	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	11	19	23	15	21	29	19	24	32	23	29
№ 5	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	14	19	22	17	25	29	19	26	34	22	28
№ 6	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	15	19	25	18	23	28	20	26	35	23	32

Окончание табл. 5

№ 7	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	6	10	19	10	17	26	16	28	39	21	36
№ 8	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	7	16	25	12	20	27	18	28	32	20	27
№ 9	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	18	26	37	24	29	38	27	38	46	32	41
№ 10	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	15	19	26	18	24	32	23	30	42	32	41

3.6. Варианты заданий для математической модели, основанной на дифференциальных уравнениях

3.6.1. Построение аналитических приближенных решений в окрестности подвижных особых точек для вещественной и комплексной областей. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Для усвоения и закрепления материала этого раздела и предыдущих предлагается индивидуальное задание: для задачи Коши

$$y' = y^2 + r(x),\ y(x_0) = y_0$$

найти точное решение. Определить значение подвижной особой точки, ближайшей к начальному условию. Найти аналитическое приближенное решение y_n в окрестности подвижной особой точки. Рассчитать априорную оценку погрешности для y_n. С помощью апостериорной оценки улучшить априорную на два порядка. Результаты расчетов представить в виде таблицы, содержащей следующие значения: значение аргумента x_1, значение точного решения $y(x_1)$, значение аналитического приближенного решения $y_n(x_1)$, значение абсолютной погрешности $\Delta=|y(x_1) - y_n(x_1)|$, значение априорной погрешности Δ_1, значение апостериорной погрешности Δ_2. Для вариантов с нечетным номером N $r(x) = -2/x^2$. В этом случае решением уравнения Риккати является функция $y = 1/x - 3x^2/(x^3+C)$. Для вариантов с четным номером N $r(x) = N$. В отчете расчетам этой задачи должен предшествовать теоретический материал: формулировка и доказательство теоремы существования решения в окрестности подвижной особой точки, вывод априорной оценки погрешности приближенного решения в окрестности подвижной особой точки (формулировка теоремы и ее доказательство). Значение аргумента x_1 определяется исходя из значения ρ_3 по теореме существования решения в окрестности подвижной особой точки. Значение N, n, x_0 и y_0 даны в табл. 6а, 6б, 6в.

Таблица 6а

Значения начальных данных

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n	3	4	5	4	3	5	5	4	3	5	4	3	5	3	4	3
x_0	1	–1	–2	2	3	–3	4	5	–4	–5	6	–6	7	–7	–8	8
y_0	0,5	1	1,5	2,5	2	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	1	2	3	1

Таблица 6б

N	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
n	5	4	3	4	5	5	4	3	5	4
x_0	0,5	–0,5	–1,5	1,5	–2,5	2,5	–3,5	4,5	–4,5	5,5
y_0	2,5	3,5	4,5	5	4,5	6	1,5	3,5	1,5	2

Таблица 6в

N	27	28	29	30
n	4	5	3	4
x_0	–6,5	7,5	–8,5	9,5
y_0	1	2	0,5	3

3.6.2. Влияние возмущений координат подвижных особых точек на приближенные решения в вещественной и комплексной областях. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Для усвоения и закрепления материала этого раздела и предыдущих предлагается индивидуальное задание для задачи Коши скалярного уравнения Риккати

$$y' = y^2 + r(x),\ y(x_0) = y_0.$$

По заданным в табл. 7а, 7б параметрам определить значение подвижной особой точки x^*. Взять величину возмущения подвижной особой точки ε = 0,001 и найти возмущенное значение подвижной особой точки $\tilde{x}^*$. Найти аналитическое приближенное решение $y(x_1)$ в окрестности приближенного значения подвижной особой точки $\tilde{x}^*$. Рассчитать априорную оценку погрешности для аналитического приближенного решения $\tilde{y}_n$. С помощью апостериорной оценки улучшить априорную с учетом величины возмущения ε = 0,001. Величина апостериорной погрешности не может быть меньше заданной величины возмущения. Результаты расчетов представить в виде таблицы, содержащей следующие значения: значение аргумента x_1 (значение аргумента x_1 определяется в соответствии с областью, где работает теорема данного раздела), значение точного решения $y(x_1)$, значение аналитического приближенного решения $\tilde{y}_n(x_1)$, значение абсолютной погрешности $\Delta = |y(x_1) - \tilde{y}_n(x_1)|$, значение априорной погрешности Δ_1, значение апостериорной погрешности Δ_2.

Таблица 7а

Значения начальных данных

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n	3	4	5	4	3	5	5	4	3	5	4	3	5	3	4	3
x_0	1	–1	–2	2	3	–3	4	5	–4	–5	6	–6	7	–7	–8	8
y_0	0,5	1	1,5	2,5	2	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	1	2	3	1

Таблица 7б

N	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	5	4	3	4	5	5	4	3	5	4	4	5	3	4
x_0	0,5	–0,5	–1,5	1,5	–2,5	2,5	–3,5	4,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
y_0	2,5	3,5	4,5	5	4,5	6	1,5	3,5	1,5	2	1	2	0,5	3

3.6.3. О границах области применения приближенных решений в окрестности приближенных значений координат подвижных особых точек. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Для закрепления материала предлагается выполнить индивидуальное задание с расчетами. На первом шаге необходимо выполнить вычисления для значения аргумента x_1, попадающего в область действия материалов раздела 4 п. 1 и раздела 5 п. 1. На втором шаге взять новое значение аргумента x_2 с условием, чтобы оно попадало в область действия теоремы раздела 5 п. 1, но не попадало в область действия теоремы раздела 4 п. 1. Результаты расчетов представить в виде двух таблиц. В первой размещаются следующие результаты: значение аргумента x_1 (значение аргумента x_1 определяется в соответствии с областью, где работают теоремы раздела 4 п. 1 и раздела 5 п. 1), значение точного решения $y(x)$, значение аналитического приближенного решения $\tilde{y}_n(x_1)$, значение абсолютной погрешности $\Delta = |y(x) - \tilde{y}_n(x)|$, значение априорной погрешности Δ_1, полученной по результатам теории раздела 4 п. 1, значение априорной погрешности Δ_2, полученной на основании теории раздела 5 п. 1. Во второй размещаются следующие результаты: значение аргумента x_2 (значение аргумента x_2 определяется в соответствие с областью, где работает теорема раздела 5 п. 1), значение точного решения $y(x)$, значение аналитического приближенного решения $\tilde{y}_n(x_2)$, значение абсолютной погрешности $\Delta = |y(x_2) - \tilde{y}_n(x_2)|$, значение априорной погрешности Δ_1, полученной по результатам теории раздела 5 п. 1, значение апостериорной погрешности Δ_2. Исходная информация для расчетов определяется по номеру N в табл. 8.

Таблица 8а

Значения начальных данных

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n	3	4	5	4	3	5	5	4	3	5	4	3	5	3	4	3
x_0	1	–1	–2	2	3	–3	4	5	–4	–5	6	–6	7	–7	–8	8
y_0	0,5	1	1,5	2,5	2	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	1	2	3	1

Таблица 8б

N	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
n	5	4	3	4	5	5	4	3	5	4	4
x_0	0,5	–0,5	–1,5	1,5	–2,5	2,5	–3,5	4,5	–4,5	5,5	–6,5
y_0	2,5	3,5	4,5	5	4,5	6	1,5	3,5	1,5	2	1

Таблица 8в

N	28	29	30
n	5	3	4
x_0	7,5	–8,5	9,5
y_0	2	0,5	3

3.6.4. Исследование влияния возмущения начальных данных на приближенные решения. Случай скалярного дифференциального уравнения Риккати

Для отработки навыков практической работы и закрепления изученного материала рекомендуется индивидуальное задание для численного эксперимента с отражением результатов в отчете по научно-исследовательской работе. Для задачи Коши дифференциального уравнения Риккати

$$y' = y^2 + r(x),\ y(x_0) = y_0$$

найти точное решение. Найти приближенное решение $y_n(x)$. Рассчитать априорную оценку погрешности для $y_n(x)$. С помощью апостериорной оценки улучшить априорную на два порядка. Результаты расчетов представить в виде таблицы, содержащей следующие значения: значение аргумента x_1, значение точного решения $y(x_1)$, значение аналитического приближенного решения $y_n(x_1)$, значение абсолютной погрешности $\Delta = |y(x_1) - y_n(x_1)|$, значение априорной погрешности Δ_1, значение апостериорной погрешности Δ_2. При осуществлении аналитического продолжения возникает задача исследования приближенного решения от возмущения начальных условий. В качестве новых начальных условий принимается значение x_1 и возмущенное значение $y_n(x_1)$. Возмущение будет равно точности полученного приближенного решения ε. Вторая таблица результатов должна содержать значения: x_2, которое определяется по ρ_{12} (раздел 1 п. 4 [1]); значение $\tilde{y}_n(x_2)$, рассчитанное по теории раздела 6 п. 1 [1]; точное решение $y(x_2)$; абсолютную погрешность $\Delta = |y(x_2) - \tilde{y}_n(x_2)|$, априорную погрешность Δ_1 для $\tilde{y}_n(x_2)$; апостериорную погрешность Δ_2 с учетом величины возмущения ε. Апостериорную погрешность следует выбрать на порядок меньше априорной, но не меньше возмущения ε. Для вариантов с нечетным номером N $r(x) = -2/x^2$. В этом случае решением уравнения Риккати является функция

$$y = 1/x - 3x^2/(x^3 + C).$$

Для вариантов с четным номером N $r(x) = N$. В отчете расчетам этой задачи должен предшествовать теоретический материал: формулировка и доказательство теоремы существования решения в области аналитичности и вывод априорной оценки погрешности приближенного решения $y_n(x)$. Значение аргумента x_1 определяется исходя из значения ρ_{12} по теореме существования решения раздел 6 п. 1 [1]. Значения N, n, x_0 и y_0 даны в табл. 9.

Таблица 9а

Значения начальных данных

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n	3	4	5	4	3	5	5	4	3	5	4	3	5	3	4	3
x_0	1	–1	–2	2	3	–3	4	5	–4	–5	6	–6	7	–7	–8	8
y_0	0,5	1	1,5	2,5	2	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	1	2	3	1

Таблица 9б

N	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
n	5	4	3	4	5	5	4	3	5	4
x_0	0,5	–0,5	–1,5	1,5	–2,5	2,5	–3,5	4,5	–4,5	5,5
y_0	2,5	3,5	4,5	5	4,5	6	1,5	3,5	1,5	2

Таблица 9в

N	27	28	29	30
n	4	5	3	4
x_0	–6,5	7,5	–8,5	9,5
y_0	1	2	0,5	3

3.7. Варианты заданий для математической модели в расчетах строительных конструкций

Задание: решить задачу о изгибе растянуто-изогнутой балки, представленную в теории (задача (1.8.3)).

Исходные данные (варианты заданий):

$EJ(x) = \mathrm{G}/8$, $P = 48 \cdot S$, $l = 1$;

$M(x) = c(2 \cdot EJ + Px(l - x))$, $c = 0{,}04$,

где G — номер группы, S — номер студента по журналу.

Представить результаты счета для $N = 9$, то есть 8 конечных элементов.

Пример программы на языке Matlab

```
function Lab
% Задание количества точек разбиения
n=input('Введите n=');
% Задания номера учебной группы (g) и номера студента (s)
g=input('Введите g=');
s=input('Введите s=');
% Задание длины балки
dl=input('Введите dl=');
% Задание жесткости балки
EJ=g/8;
% Задание осевой силы
P=48*s;
% Формирование глобальной матрицы жесткости
% и глобального вектора нагрузок
Kg=zeros(n,n);
Rg=zeros(n,1);
h=dl/(n-1);
Ph=P*h/6;
EJh=EJ/h;
K0=EJh+2*Ph;
```

```
K1=Ph-EJh;
Kg(1,1)=1.; Kg(n,n)=1.;
for i=2:n-1
x=(i-1.5)*h;
Rg(i)=(M(x,g,s,dl,EJ,P)+M(x+h,g,s,dl,EJ,P))*h/2;
if(i>2)
Kg(i,i-1)=K1;
end
Kg(i,i)=2*K0;
if(i<n-1)
Kg(i,i+1)=K1;
end
end
% и глобального вектора нагрузок
disp('Глобальная матрица жесткости Kg');
for i=1:n
fprintf('%6.2f',Kg(i,:));
fprintf('\n');
end
disp('Глобальный вектор нагрузок Rg')
fprintf('%12.4f \n',Rg);
% Решение разрешающей системы линейных алгебраических
% уравнений, распечатка результата
y=Kg\Rg;
disp('Вектор-решение y')
fprintf('%12.4f \n',y);
function Res=M(x,g,s,dl,EJ,P)
Res=(g+s)/25.*(2*EJ+P*x*(dl-x));
```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. — Москва : Юрайт; ИД Юрайт, 2012. — 430 с. — ISBN 978-5-9916-1849-6.
2. Орлов В.Н. Об одном варианте доверительного интервала прогнозируемого значения математической модели / В.Н. Орлов // Вестник РГСУ (Филиал г. Чебоксары). — 2014. — № 1 (30). — С. 128–129.
3. Эконометрика : учебник / под ред. И.И. Елисеевой. — Москва : Финансы и статистика, 2002. — 344 с. — ISBN 5-279-01955-0.
4. Орлов В.Н. Приближенный метод решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати : курс лекций / В.Н. Орлов. — Чебоксары : ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2015. — 121 с.
5. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учебник для вузов / Г.С. Варданян [и др.] ; под ред. Г.С. Варданяна, Н.М. Атарова. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Инфра-М, 2013. — 637 с. — ISBN 978-5-16-009587-5.
6. Карпов В.В., Сальников А.Ю. Вариационные методы и вариационные принципы механики при расчете строительных конструкций : учеб. пособие / В.В. Карпов, А.Ю. Сальников. — Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2009. — 75 с. — ISBN 978-5-9227-0144-0.
7. Акимов П.А. Информатика в строительстве (с основами математического и компьютерного моделирования) : учебник / П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, Т.Б. Кайтуков, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров. — Москва : КноРус, 2017. — 420 с. — ISBN 978-5-406-05500-7.
8. Баженов В.А. Строительная механика. Компьютерные технологии и моделирование : учебник для вузов / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов. — Москва: СКАД СОФТ; Изд-во АСВ, 2014. — 911 с. — ISBN 978-5-903683-27-7.
9. Сидоров В.Н., Вершинин В.В. Метод конечных элементов в расчете сооружений. Теория, алгоритмы, примеры расчетов в программном комплексе SIMULIA Abaqus : учеб. пособие / В.Н. Сидоров, В.В. Вершинин. — Москва : Издательство АСВ, 2015. — 288 с. — ISBN 978-5-4323-0090-4.