МАТЕМАТИКА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математики

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические указания
к практическим занятиям и выполнению курсовой работы / проекта
для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Составители:
Б.П. Титаренко, Ю.Г. Жеглова

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2020

УДК 519.87
ББК 22.18
И88

Рецензент — кандидат физико-математических наук *Ю.В. Осипов*,
доцент кафедры прикладной математики НИУ МГСУ

И88 **Исследование операций** [Электронный ресурс] : Методические указания к практическим занятиям и выполнению курсовой работы / проекта для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / сост. : Б.П. Титаренко, Ю.Г. Жеглова ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра прикладной математики. – Электрон. дан. и прогр. (0,8 Мб). – Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020. – Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS. – Загл. с титул. экрана.

Приведены варианты заданий, примеры решения задач и темы курсовых работ.
Для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

Учебное электронное издание

Редактор, корректор *М.Л. Манзюк*
Компьютерная верстка *А.Г. Сиволобовой*
Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2013, Adobe InDesign CS6, ПО Adobe Acrobat.

Подписано к использованию 04.02.2020. Объем данных 0,8 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет»
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 5
    Основная задача линейного программирования (ОЗЛП) 5
    Примеры задач 10
    Численное решение задачи линейного программирования 11
2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА 11
    1. Общий вид транспортной задачи в виде таблицы 12
    2. Закрытая задача 12
    3. Открытая задача 12
    Пример решения задачи 14
    Примеры заданий 17
3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР 18
    Основные понятия и определения 18
    1. Решение игры с седловой точкой 19
    2. Смешанные стратегии 19
    3. Решение игры $2 \times n$ 22
    4. Решение игры $m \times 2$ 23
    Примеры решения задач 24
    Примеры заданий 25
ПОДГОТОВКА КУРСОВОЙ РАБОТЫ 26
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 27

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящее время множество задач планирования и управления в отраслях народного хозяйства, а также большой объем частных прикладных задач решаются методами математического программирования. Наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования. Эти методы позволяют описать с достаточной точностью широкий круг задач коммерческой деятельности, таких как планирование товарооборота, размещение розничной торговой сети города, планирование товароснабжения города, района, прикрепление торговых предприятий к поставщикам, организация рациональных перевозок товаров, распределение работников торговли по должностям, организация рациональных закупок продуктов питания, распределение ресурсов, планирование капиталовложений, оптимизация межотраслевых связей, замена торгового оборудования, определение оптимального ассортимента товаров в условиях ограниченной площади, установление рационального режима работы.

Линейное программирование — это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейной целевой функцией. Для решения задач линейного программирования составляется математическая модель задачи и выбирается метод решения.

Основная задача линейного программирования (ОЗЛП)

Найти экстремум (max или min) линейной функции

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

при линейных ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ldots, \ x_n \ge 0.$$

Двумерные задачи линейного программирования решаются графически. Для случая $n = 3$ можно рассмотреть трехмерное пространство, и целевая функция будет достигать свое оптимальное значение в одной из вершин многогранника.

В общем виде, когда в задаче участвуют n неизвестных, можно сказать, что область допустимых решений, задаваемая системой ограничивающих условий, представляется выпуклым многогранником в n-мерном пространстве и оптимальное значение целевой функции достигается в одной или нескольких вершинах. Решить данные задачи графически, когда количество переменных более трех, весьма затруднительно. Существует универсальный способ решения задач линейного программирования, называемый симплекс-методом.

Симплекс-метод является основным в линейном программировании. Решение задачи начинается с рассмотрения одной из вершин многогранника условий. Если исследуемая вершина не соответствует максимуму (минимуму), то переходят к соседней, увеличивая значение функции цели при решении задачи на максимум и уменьшая при решении задачи на минимум. Таким образом, переход от одной вершины к другой улучшает значение функции цели. Так как число вершин многогранника ограничено, то за конечное число шагов гарантируется нахождение оптимального значения или установление того факта, что задача неразрешима.

Этот метод является универсальным, применимым к любой задаче линейного программирования в канонической форме. Система ограничений здесь — система линейных уравнений, в которой количество неизвестных больше количества уравнений. Если ранг системы равен r, то мы можем выбрать r неизвестных, которые выразим через остальные неизвестные. Для определенности предположим, что выбраны первые, идущие подряд, неизвестные X_1, X_2, ..., X_r. Тогда наша система уравнений может быть записана как

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 + a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n. \end{cases}$$

К такому виду можно привести любую совместную систему, например методом Гаусса. Правда, не всегда можно выражать через остальные первые r неизвестных (мы это сделали для определенности записи). Однако такие r неизвестных обязательно найдутся. Эти неизвестные (переменные) называются базисными, остальные — свободными.

Придавая определенные значения свободным переменным и вычисляя значения базисных (выраженных через свободные), мы будем получать различные решения нашей системы ограничений. Таким образом, можно получить любое ее решение. Нас будут интересовать особые решения, получаемые в случае, когда свободные переменные равны нулю. Такие решения называются базисными, их столько же, сколько различных базисных видов у данной системы ограничений. Базисное решение называется допустимым базисным решением или опорным решением, если в нем значения переменных неотрицательны. Если в качестве базисных взяты переменные $X_1, X_2, \ldots, X_r$, то решение $\{b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0\}$ будет опорным при условии, что $b_1, b_2, \ldots, b_r \geq 0$.

Симплекс-метод основан на теореме, которая называется фундаментальной теоремой симплекс-метода. Среди оптимальных планов задачи линейного программирования в канонической форме обязательно есть опорное решение ее системы ограничений. Если оптимальный план задачи единственен, то он совпадает с некоторым опорным решением. Различных опорных решений системы ограничений конечное число. Поэтому решение задачи в канонической форме можно было бы искать перебором опорных решений и выбором среди них того, для которого значение F самое большое. Но, во-первых, все опорные решения неизвестны и их нужно находить, а во-вторых, в реальных задачах этих решений очень много и прямой перебор вряд ли возможен. Симплекс-метод представляет собой некоторую процедуру направленного перебора опорных решений. Исходя из некоторого, найденного заранее опорного решения по определенному алгоритму симплекс-метода мы подсчитываем новое опорное решение, на котором значение целевой функции F не меньше, чем на старом. После ряда шагов мы приходим к опорному решению, которое является оптимальным планом.

Итак, симплексный метод вносит определенный порядок как при нахождении первого (исходного) базисного решения, так и при переходе к другим базисным решениям. Его идея состоит в следующем.

Имея систему ограничений, приведенную к общему виду, то есть к системе m линейных уравнений с n переменными ($m < n$), находят любое базисное решение этой системы, заботясь только о том, чтобы найти его как можно проще.

Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то осуществляется переход к другому, обязательно допустимому базисному решению.

Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма если и не достигнет оптимума, то приблизится к нему. С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Если первое найденное базисное решение окажется недопустимым, то с помощью симплексного метода осуществляется переход к другим базисным решениям, которые приближают нас к области допустимых решений, пока на каком-то шаге решения либо базисное решение окажется допустимым и к нему применяют алгоритм симплексного метода, либо мы убеждаемся в противоречивости системы ограничений.

Таким образом, применение симплексного метода распадается на два этапа: нахождение допустимого базисного решения системы ограничений или установление факта ее несовместности; нахождение оптимального решения.

При этом каждый этап может включать несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Но так как число базисных решений всегда ограниченно, то ограниченно и число шагов симплексного метода.

Приведенная схема симплексного метода явно выражает его алгоритмический характер (характер четкого предписания о выполнении последовательных операций), что позволяет успешно программировать и реализовать этот метод на ЭВМ. Задачи же с небольшим числом переменных и ограничений могут быть решены симплексным методом вручную.

Не останавливаясь подробнее на сути алгоритма, опишем его вычислительную сторону. Вычисления по симплекс-методу организуются в виде симплекс-таблиц, которые являются сокращенной записью задачи линейного программирования в канонической форме. Перед составлением симплекс-таблицы задача должна быть преобразована, система ограничений приведена к допустимому базисному виду, с помощью которого из целевой функции должны быть исключены базисные переменные. Вопрос об этих предварительных преобразованиях мы рассмотрим ниже. Сейчас же будем считать, что они уже выполнены и задача имеет вид:

$$Z = c_0 + c_{r+1}x_{r+1} + \ldots + c_n x_n \to \max, \min$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1' + a_{1r+1}' x_{r+1} + \ldots + a_{1n}' x_n, \\ x_2 = b_2' + a_{2r+1}' x_{r+1} + \ldots + a_{2n}' x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r' + a_{rr+1}' x_{r+1} + \ldots + a_{rn}' x_n. \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь для определенности записи считается, что в качестве базисных переменных можно взять переменные $X_1, X_2, \ldots, X_r$ и что при этом $b_1, b_2, \ldots, b_r \ge 0$ (соответствующее базисное решение является опорным).

Для составления симплекс-таблицы во всех равенствах в условии задачи члены, содержащие переменные, переносятся в левую часть, свободные оставляются справа, т.е. задача записывается в виде системы равенств:

$$\begin{cases} x_1 - a_{1r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{1n}' x_n = b_1', \\ x_2 - a_{2r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{2n}' x_n = b_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r - a_{rr+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{rn}' x_n = b_r', \\ Z - c_{r+1} x_{r+1} - \ldots - c_n x_n = c_0. \end{cases}$$

Далее эта система оформляется в виде симплекс-таблиц:

Баз. перем.	Своб. члены	X_1	X_2	…	…	X_r	X_{r+1}	X_{r+2}	…	…	…	X_n
X_1	b_1'	1	0	…	…	0	$-a_{1,r+1}$	$-a_{1,r+2}$	…	…	…	$-a_{1n}$
X_2	b_2'	0	1	…	…	0	$-a_{2,r+1}$	$-a_{2,r+2}$	…	…	…	$-a_{2n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_r	b_r'	0	0	…	…	1	$-a_{r,r+1}$	$-a_{r,r+2}$	…	…	…	$-a_{rn}$
Z	c_0	0	0	…	…	0	$-c_{r+1}$	$-c_{r+2}$	…	…	…	$-c_n$

Примечание. Названия базисных переменных здесь взяты лишь для определенности записи и в реальной таблице могут оказаться другими.

Порядок работы с симплекс-таблицей. Первая симплекс-таблица подвергается преобразованию, суть которого заключается в переходе к новому опорному решению.

Алгоритм перехода к следующей таблице такой:

– просматривается последняя строка (индексная) таблицы, и среди коэффициентов этой строки (исключая столбец свободных членов) выбирается наименьшее отрицательное число при отыскании max либо наибольшее положительное при задаче на min. Если такового нет, то исходное базисное решение является оптимальным и данная таблица является последней;

– просматривается столбец таблицы, отвечающий выбранному отрицательному (положительному) коэффициенту в последней строке, — ключевой столбец, и в этом столбце выбираются положительные коэффициенты. Если таковых нет, то целевая функция неограниченна на области допустимых значений переменных и задача решений не имеет;

– среди выбранных коэффициентов столбца выбирается тот, для которого абсолютная величина отношения соответствующего свободного члена (находящегося в столбце свободных членов) к этому элементу минимальна. Этот коэффициент называется разрешающим, а строка, в которой он находится, — ключевой;

– в дальнейшем базисная переменная, отвечающая строке разрешающего элемента, должна быть переведена в разряд свободных, а свободная переменная, отвечающая столбцу разрешающего элемента, вводится в число базисных. Строится новая таблица, содержащая новые названия базисных переменных:

• разделим каждый элемент ключевой строки (исключая столбец свободных членов) на разрешающий элемент, и полученные значения запишем в строку с измененной базисной переменной новой симплекс-таблицы;

• строка разрешающего элемента делится на этот элемент, и полученная строка записывается в новую таблицу на то же место;

• в новой таблице все элементы ключевого столбца равны 0, кроме разрешающего, он всегда равен 1;

• столбец, у которого в ключевой строке имеется 0, в новой таблице будет таким же;

• строка, у которой в ключевом столбце имеется 0, в новой таблице будет такой же;

• в остальные клетки новой таблицы записывается результат преобразования элементов старой таблицы:

$$\text{Новый элемент} = \text{Старый элемент} - \frac{\text{Элем. ключ. столбца кл. строк} \quad \text{Элем. ключ. строки кл. столб.}}{\text{Разрешающий элемент}}$$

В результате получают новую симплекс-таблицу, отвечающую новому базисному решению.

Теперь следует просмотреть строку целевой функции (индексную), если в ней нет отрицательных значений (в задаче на нахождение максимального значения) либо положительных (в задаче на нахождение минимального значения), кроме стоящего на месте (свободного) столбца, то значит, что оптимальное решение получено. В противном случае переходим к новой симплекс-таблице по вышеописанному алгоритму.

Пример

Компания производит полки для ванных комнат двух размеров — A и B. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа A требуется 2 м^2 материала, а для полки типа B — 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа A требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа B — 30 мин; машину можно использовать 160 часов в неделю. Если прибыль от продажи полок типа A составляет 3 денежных единицы, а от полок типа B — 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 — количество полок вида A, x_2 — количество полок вида B, которые производятся в неделю (по смыслу задачи эти переменные неотрицательны). Прибыль от продажи такого количества полок составит $3x_1 + 4x_2$, прибыль требуется максимизировать. Выпишем ограничения задачи.

$x_1 + x_2 \leq 550$ — в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок.

Затраты материала: $2x_1 + 3x_2 \leq 1200$.

Затраты машинного времени: $12x_1 + 30x_2 \leq 9600$.

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования.

$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$
$x_1 + x_2 \leq 550,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 1200,$
$12x_1 + 30x_2 \leq 9600,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Решим ее симплекс-методом. Введем три дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 и придем к задаче

$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 550,$
$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1200,$
$12x_1 + 30x_2 + x_5 = 9600,$
$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5.$

В качестве опорного плана выберем $X_0 = (0, 0, 550, 1200, 9600)$. Составим симплекс-таблицу:

Базис	**План**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$
x_3	550	1	1	1	0	0
x_4	1200	2	3	0	1	0
x_5	9600	12	30	0	0	1
F	0	–3	–4	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент — по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги, пока не придем к таблице с неотрицательными оценками.

Базис	**План**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$
x_3	230	3/5	0	1	0	–1/30
x_4	240	4/5	0	0	1	–1/10
x_5	320	2/5	1	0	0	1/30
F	1280	–7/5	0	0	0	2/15

Базис	**План**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$
x_3	50	0	0	1	–3/4	1/24
x_4	300	1	0	0	5/4	–1/8
x_5	200	0	1	0	–1/2	1/12
F	1700	0	0	0	7/4	–1/24

Базис	**План**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$
x_3	1200	0	0	24	–18	1
x_4	450	1	0	3	–1	0
x_5	100	0	1	–2	1	0
F	1750	0	0	1	1	0

В плане последней таблицы строка F не содержит отрицательных значений, план $x_1 = 450$, $x_2 = 100$ оптимален, целевая функция принимает значение 1750.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, предприятию необходимо производить 450 полок вида A и 100 полок вида B, при этом прибыль составит 1750 ден. ед., а останется неиспользованными 1200 мин (20 ч) машинного времени.

Примеры задач

Задача о застройке микрорайона

Для застройки микрорайона имеются n типовых проектов зданий, в каждом из которых предусмотрено m типов квартир. Стоимость одного здания каждого типа соответственно равна $c_1, c_2, \ldots, c_n$, руб.; количество квартир i-го типа в одном доме j-го типа равно a_{ij}; потребность в квартирах j-го типа — b_i.

Необходимо составить план застройки микрорайона, удовлетворяющий потребности в квартирах, для которого затраты на строительство будут минимальны.

Исходные данные удобно записать в таблице:

Типы домов / Типы квартир	**1**	**…**	***j***	**…**	***n***	Потребности в квартирах
1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
…	…	…	…	…	…	…
i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
Стоимость одного дома каждого типа	c_1	…	c_j	…	c_n	

Обозначим через x_j число домов j-го типа, тогда вектор $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ даст нам план застройки. Получаем следующую задачу линейного программирования: найти такие числа $x_j \geq 0 \ \left(j = 1, \ldots, n\right)$, которые удовлетворяют условиям $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ \left(i = 1, \ldots, m\right)$ и для которых функция Z (затраты на строительство) $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ минимальные. Задача решается симплекс-методом.

Типы домов / Типы квартир	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	Потребности в квартирах
1	10	15	20	0	30	25	15	0	12	14	100
2	20	14	15	10	0	25	15	14	12	20	200
3	30	15	12	10	15	20	0	14	17	20	150
4	0	12	13	15	30	12	10	15	20	0	140
5	13	14	15	20	30	0	13	15	20	25	250
6	12	15	20	25	15	14	13	20	30	0	183
7	13	12	25	13	16	17	15	20	0	15	231
8	0	14	15	20	13	25	14	17	20	0	145
9	15	20	16	30	20	16	15	25	15	0	156
10	17	15	14	25	15	13	20	27	16	0	210
Стоимость одного дома каждого типа	10	15	20	14	12	15	20	10	15	14	

Задание

№ вар.	№ строк таблицы	№ столбцов таблицы	№ вар.	№ строк таблицы	№ столбцов таблицы
1	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	**14**	6, 7, 8, 9	7, 8, 9, 10
2	1, 3, 4, 5	1, 3, 4, 5	**15**	5, 7, 8, 9	6, 7, 8, 9
3	1, 2, 3, 5	1, 2, 3, 5	**16**	4, 7, 8, 9	4, 5, 6
4	1, 2, 3, 6	1, 2, 3, 6	**17**	4, 8, 9, 10	8, 9, 10
5	1, 2, 3, 7	1, 2, 3, 7	**18**	5, 8, 9, 10	7, 8, 9, 10
6	2, 3, 4, 5	3, 4, 5, 6	**19**	3, 8, 9, 10	3, 4, 5, 6
7	1, 2, 3, 8	8, 3, 2, 1	**20**	3, 8, 9	3, 8, 9, 10
8	1, 2, 3, 9	1, 2, 3, 9	**21**	2, 3, 6, 7	3, 8, 9
9	1, 2, 3, 10	1, 2, 3, 10	**22**	1, 3, 7, 8	2, 3, 8, 9
10	10, 1, 2, 3	1, 2, 3	**23**	2, 6, 8, 9	3, 8, 5, 4
11	4, 5, 6	10, 3, 4	**24**	1, 8, 9, 10	1, 6, 8, 10
12	4, 5, 6, 7	10, 3, 4, 5	**25**	1, 7, 5	1, 7, 5, 9
13	5, 6, 7	10, 3, 4, 5	**26**	3, 2, 7, 1	4, 5, 7, 9

Численное решение задачи линейного программирования

Задание для графического решения

Найти точку максимума функции цели Z,

$$Z(x_1, x_2)=sx_1 + gx_2$$

при заданных ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 / g - x_2 / s + 0,25 \le 0 \\ -sx_1 + 2gx_2 - gs \le 0 \\ 2sx_1 - gx_2 - gs \le 0 \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \end{cases}$$

где g — номер группы; s — номер студента по журналу.

2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Постановка классической транспортной задачи. Классическая транспортная задача состоит в поиске оптимальных грузопотоков, т.е. в оптимальном закреплении поставщиков однородного груза за потребителями. В математической форме условия транспортной задачи выглядят следующим образом.

Транспортная задача является частным типом задачи линейного программирования и формулируется следующим образом. Имеется m пунктов отправления (или пунктов производства) A_i, …, A_m, в которых сосредоточены запасы однородных продуктов в количестве a_1, ..., a_m единиц. Имеется n пунктов назначения (или пунктов потребления) B_1, ..., B_m, потребность которых в указанных продуктах составляет b_1, ..., b_n единиц. Известны также транспортные расходы C_{ij}, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, i = 1, …, m; j = 1, …, n. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

т.е. общий объем производства равен общему объему потребления. Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько единиц продукта везти), чтобы удовлетворить спрос всех пунктов потребления за счет реализации всего продукта, произведенного всеми пунктами производства, при минимальной общей стоимости всех перевозок. Приведенная формулировка транспортной задачи называется замкнутой транспортной моделью. Формализуем эту задачу.

Пусть x_{ij} — количество единиц продукта, поставляемого из пункта A_i в пункт B_j. Подлежащие минимизации суммарные затраты на перевозку продуктов из всех пунктов производства во все пункты потребления выражаются формулой

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} .$$

Суммарное количество продукта, направляемого из каждого пункта отправления во все пункты назначения, должно быть равно запасу продукта в данном пункте. Формально это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \;\; i = 1,..., m.$$

Суммарное количество груза, доставляемого в каждый пункт назначения из всех пунктов отправления, должно быть равно потребности. Это условие полного удовлетворения спроса:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \;\; j = 1,..., n.$$

Объемы перевозок — неотрицательные числа, так как перевозки из пунктов потребления в пункты производства исключены:

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n.$$

Транспортная задача сводится, таким образом, к минимизации суммарных затрат при выполнении условий полного удовлетворения спроса и равенства вывозимого количества продукта запасам его в пунктах отправления.

Определение 1

Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,...,n \ \text{ и } \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,...,m,$$

определяемое матрицей $X = (x_{ij})$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), называется планом транспортной задачи.

Определение 2

План $X^* = \left(x_{ij};\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n\right)$, при котором функция $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$ принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

1. Общий вид транспортной задачи в виде таблицы

Обычно исходные данные записываются в виде таблицы:

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	…	B_j	…	B_n	A_1
A_1	C_{11} x_{11}	…	C_{1j} x_{1j}	…	C_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	C_{i1} x_{i1}	…	C_{ij} x_{ij}	…	C_{in} x_{in}	A_i
…	…	…	...	…	…	…
A_m	C_{m1} x_{m1}	…	C_{mj} x_{mj}	…	C_{mn} X_{mn}	A_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	

2. Закрытая задача

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то модель такой транспортной задачи называется закрытой.

В ряде случаев не требуется, чтобы весь произведенный продукт в каждом пункте производства был реализован. В таких случаях баланс производства и потребления может быть нарушен.

3. Открытая задача

Если для ТЗ выполняется одно из условий: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ или $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то модель задачи называют открытой.

Для разрешимости ТЗ с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую. Так, при выполнении первого условия необходимо ввести фиктивный (n+1)-й пункт назначения B_{n+1}, т.е. в матрице задачи предусматривается дополнительный столбец. Спрос фиктивного потребителя полагают равным небалансу, т.е. $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а все соответствующие тарифы — одинаковыми, чаще всего равными нулю.

Аналогично при выполнении второго условия вводится фиктивный поставщик.

При преобразовании открытой транспортной задачи в закрытую целевая функция не меняется, так как все слагаемые, соответствующие дополнительным перевозкам, равны нулю.

Для решения транспортной задачи разработаны специальные методы, позволяющие из бесчисленного множества решений найти оптимальное. Ниже даны некоторые из методов.

1. Метод северо-западного угла

В данном методе запасы очередного по номеру поставщика используются для обеспечения запросов очередных по номеру потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла, поэтому метод и называется методом северо-западного угла.

2. Метод минимальной стоимости

Этот метод прост и позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C = (c_{ij})$.

Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости.

3. Метод потенциалов

Общая схема метода следующая: сначала составляют допустимый исходный план задачи, который затем исследуется на оптимальность. Если при проверке окажется, что составленный план оптимален, то решение закончено. В противном случае при помощи специального приема осуществляется переход к новому, лучшему плану. Этот план снова исследуется на оптимальность и в случае неоптимальности опять улучшается.

Приведем пример использования метода.

Метод потенциалов предназначен для решения транспортной задачи в матричной постановке.

Таблица для метода потенциалов имеет следующий вид:

	$B_1 \ldots$	B_j	$\ldots B_n$	u
A_1 $\ldots$	C_{11} x_{11}	C_{1j} x_{1j}	C_{1n} x_{1n}	u_1 $\ldots$
A_i	C_{i1} x_{i1}	C_{ij} x_{ij}	C_{in} x_{in}	u_i
$\ldots$ A_m	C_{m1} x_{m1}	C_{mj} x_{mj}	C_{mn} x_{mn}	$\ldots$ u_m
v	$v_1 \ldots$	v_j	$\ldots v_n$	z

Каждая ячейка (i, j) таблицы хранит информацию о цене (C_{ij}) и о количестве перевозимого товара (x_{ij}). В процессе решения задачи часть клеток будем называть базисными (их всегда будет $m + n - 1$), а остальные — небазисными (или свободными).

Алгоритм метода потенциалов

Шаг 0. Сделать задачу закрытой, если она открыта. Перейти на шаг 1.

Шаг 1. Нарисовать начальную таблицу. Перейти на шаг 2.

Шаг 2. Рассчитать начальный план (например, методом северо-западного угла) и выделить базисные клетки. Вычислить значение целевой функции. Перейти на шаг 3.

Шаг 3. Рассчитать значения потенциалов. Положить $u_1 = 0$ (или любому другому числу). Остальные потенциалы рассчитать с помощью базисных клеток, исходя из уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$. Перейти на шаг 4.

Шаг 4. Для свободных клеток рассчитать оценки $s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Если все $s_{ij} > 0$, то найдено оптимальное решение. Перейти на шаг 6. Иначе выполнить шаг 5.

Шаг 5. Из небазисных клеток выбрать ту, у которой оценка s_{ij} минимальна, и для нее выполнить следующую процедуру:

1) построить цикл для этой клетки. Цикл — это замкнутая ломаная линия, которая чередует вертикальное и горизонтальное направления и проходит только по базисным клеткам. В исходной клетке поставить «+», и далее по циклу расставить, чередуя, «+» и «–»;

2) вычислить $\lambda = \min\{x_{ij}: «–»\}$. Клетку, на которой достигается этот минимум, убрать из базиса (только одну), а клетку (i, j) (у которой минимальная оценка s_{ij}) сделать базисной;

3) нарисовать новую таблицу, с пересчитанным планом перевозок: для клеток с «+» прибавить λ к x_{ij}, а для клеток с «–» — вычесть. Остальные клетки остаются как были. Пересчитать целевую функцию.

Перейти на шаг 3.

Шаг 6. Конец алгоритма.

На шаге 3 у нас $m + n - 1$ уравнение и $n + m$ неизвестных. Поэтому возникает неоднозначность, разрешить которую можно, определив одну из переменных заранее (например, $u_1 = 0$).

Пример решения задачи

Рассмотрим задачу с тремя складами и двумя магазинами. Цены перевозок даны в таблице:

B / *A*	**10**	**10**
10	10	5
5	5	10
10	5	10

Задача не замкнута, поэтому добавляем фиктивный магазин мощностью 5, стоимость перевозки в который равна нулю. После этого потребности магазинов и возможности складов равны. Окончательные цены перевозок приведены в таблице:

B / *A*	**10**	**10**	**5**
10	10	5	0
5	5	10	0
10	5	10	0

Построим начальную таблицу и рассчитаем оценки методом северо-западного угла. Базисные клетки выделим серым цветом. Количество единиц товара, необходимого для перевозки из пункта производства в пункт потребления, выделим зеленым цветом.

	10		**10**		**5**		***U***
10	**10**		**5**		**0**		
		10					
5	**5**		**10**		**0**		
				5			
10	**5**		**10**		**0**		
				5		**5**	
v							

Рассчитаем потенциалы и значение целевой функции:

$u_1 = 0$; $v_1 = c_{11} - u_1 = 10 - 0 = 10$;
$u_2 = c_{21} - v_1 = 5 - 10 = -5$;
$v_2 = c_{22} - u_2 = 10 - (-5) = 15$;
$u_3 = c_{32} - v_2 = 10 - 15 = -5$;
$v_3 = c_{33} - u_3 = 0 - (-5) = 5$;
$Z = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 200$.

	10		10		5		***u***
10	**10**		5		0		**0**
		10					
5	5		**10**		0		**–5**
				5			
10	5		**10**		**0**		**–5**
				5		**5**	
v	**10**		**15**		**5**		**200**

Оценки для свободных клеток равны:

$s_{12} = 5 - 0 - 15 = -10$;
$s_{13} = 0 - 5 - 0 = -5$;
$s_{21} = 5 - (-5) - 10 = 0$;
$s_{23} = 0 - 5 - (-5) = 0$;
$s_{31} = 0$.

Среди оценок есть отрицательные, значит, решение не оптимально.

Клетки таблицы, в которые записаны отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) — свободными. План называется вырожденным, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m + n - 1$. Если во время решения задачи получился вырожденный план, то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток нулевую перевозку и превратив тем самым эти клетки в базисные (общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменятся, поэтому клетка (2,1) становится базисной с объемом перевозки 0).

Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. План должен быть ациклическим! План называется ациклическим, если его базисные клетки не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце.

Выберем клетку с минимальной оценкой, это (1,2), построим через нее цикл и расставим знаки:

	10		**10**		**5**		***u***
10	**10**	–	**5**	+	**0**		**0**
		10					
5	**5**	+	**10**	–	**0**		**–5**
		0		**5**			
10	**5**		**10**		**0**		**–5**
				5		**5**	
v	**10**		**15**		**5**		**200**

Цикл здесь: (1,2) → (2,2) → (2,1) → (1,1) → (1,2). Минимальная из тех перевозок, где стоит знак «–», равно 5 (клетка (2,2), поэтому она покидает базис. Значение $\lambda = 5$. Таким образом, новое значение целевой функции будет равно $Z = 10 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 10 \cdot 5 = 150$, а новый план перевозок записан в следующей таблице:

	10		10		5		*u*
10	10		5		0		
		5		5			
5	5		10		0		
		5		0			
10	5		10		0		
				5		5	
v							150

Повторяем процедуру заново, рассчитывая потенциалы, и т.д.:

	10		10		5		*u*
10	10		5		0		0
		5		5			
5	5		10		0		–5
		5		0			
10	5		10		0		5
				5		5	
v	10		5		–5		150

Потенциалы:

$u_1 = 0;$
$v_1 = 10;$
$u_2 = c_{21} - v_1 = 5 - 10 = -5;$
$v_2 = c_{12} - u_1 = 5 - 0 = 5;$
$u_3 = c_{32} - v_2 = 10 - 5 = 5;$
$v_3 = c_{33} - u_3 = 0 - 5 = -5.$

Оценки для свободных клеток:

$s_{13} = c_{13} - u_1 - v_1 = 0 - 0 - (-5) = 5;$
$s_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 10 - 5 + 5 = 10;$
$s_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 0 + 5 + 5 = 10;$
$s_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 5 - 5 - 10 = -10.$

Среди оценок есть отрицательные, поэтому решение не оптимально, строим цикл.

Цикл: (3,1) → (1,1) → (1,2) → (3,2) → (3,1).

	10		10		5		*u*
10	10	–	5	+	0		0
		5		5			
5	5		10		0		–5
		5		0			
10	5	+	10	-	0		5
				5		5	
v	*10*		*5*		*–5*		150

Минимальной из тех перевозок, где стоит знак «–», нет, обе равны 5 (клетки (1,1) и (3,2)), поэтому можно выбрать любую клетку, которая покинет базис. Значение $\lambda = 5$. Таким образом, новый план перевозок записан в следующей таблице, а значение целевой функции:

$$Z = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 100.$$

	10		10		5		*u*
10	**10**		**5**		**0**		**0**
				10			
5	**5**		**10**		**0**		**5**
		5		**0**			
10	**5**		**10**		**0**		**5**
		5		**0**		**5**	
v	**0**		**5**		**–5**		**100**

Повторяем вновь поиск потенциалов и оценок:

$u_1 = 0;$
$v_2 = c_{12} - u_0 = 5 - 0 = 5;$
$u_3 = c_{32} - v_2 = 10 - 5 = 5;$
$v_1 = c_{31} - u_3 = 5 - 5 = 0;$
$u_2 = c_{21} - v_1 = 5 - 0 = 5;$
$v_3 = c_{33} - u_3 = 0 - 5 = -5;$
$s_{11} = 10;$
$s_{13} = 5;$
$s_{22} = 0;$
$s_{23} = 0.$

Все оценки неотрицательны, поэтому решение оптимально.

$$Z = 100,\ x_{12} = 10,\ x_{21} = 5,\ x_{31} = 5,\ x_{33} = 5.$$

Примеры заданий

Транспортная задача

Имеется m $(i = 1, \ldots, m)$ пунктов отправления с запасами a_i $(i = 1, \ldots, m)$ единиц однородного продукта, предназначенного к отправке. Этот продукт следует доставить в n $(j = 1, \ldots, n)$ пунктов назначения с потребностями b_j $(j = 1, \ldots, n)$ единиц того же продукта. Кроме того, задана матрица $c = \|c_{ij}\|$, $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, где c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Обозначим x_{ij} — количество перевозимого товара из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Надо составить такой план перевозок $x = \|x_{ij}\|$, который удовлетворяет условиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

и для которого стоимость перевозок $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ минимальна.

Пункты назнач. / Пункты отправл.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	Запасы
1	5	1	4	5	8	2	1	3	5	7	120
2	4	4	5	6	8	7	5	3	1	2	300
3	6	2	6	8	9	5	3	1	7	2	120
4	7	4	7	7	9	1	5	2	7	3	160
5	2	1	4	6	1	7	2	5	1	3	50

Пункты назнач. / Пункты отправл.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	Запасы
6	4	2	1	1	8	10	1	2	1	12	50
7	4	7	8	11	13	5	7	9	6	4	50
8	6	4	4	13	15	7	13	9	11	14	45
9	4	11	8	6	12	2	7	8	4	5	95
10	9	9	10	12	16	5	10	9	4	8	180
Спрос	100	100	100	200	200	35	75	75	105	100	

Задание 1

№ вар.	№ строк таблицы	№ столбцов таблицы	№ вар.	№ строк таблицы	№ столбцов таблицы
1	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	**14**	6, 7, 8, 10	6, 7, 8, 9
2	2, 5, 6, 7	1, 2, 3, 7, 8	**15**	4, 5, 6, 7	1, 6, 7, 8
3	2, 5, 6, 7	3, 4, 7, 8	**16**	7, 8, 9, 10	7, 8, 9, 10
4	8, 9, 4, 2	4, 5, 2, 3	**17**	2, 4, 6, 8	2, 4, 6, 8
5	6, 7, 8, 9	8, 9, 7, 5, 6	**18**	1, 3, 5, 7	1, 3, 6
6	1, 3, 4	1, 2, 3, 10	**19**	4, 6, 8, 10	4, 6, 8, 10
7	4, 8, 5, 6, 7	7, 8, 9, 10	**20**	4, 5, 9, 10	3, 5, 9, 10
8	2, 4, 5, 6	1, 4, 9, 10	**21**	5, 8, 9, 10	5, 8, 9
9	1, 3, 6, 8	1, 3, 6, 7	**22**	2, 4, 9, 10	4, 5, 9, 10
10	5, 6, 8, 9	3, 6, 9	**23**	1, 5, 6, 9	6, 7, 8, 9
11	4, 5, 7, 8	2, 3, 9	**24**	2, 4, 8, 9	1, 2, 3, 4
12	3, 7, 8, 10	1, 2, 7, 10	**25**	4, 5, 6, 7, 10	5, 6, 7, 8
13	1, 4, 5, 6	1, 2, 7, 8	**26**		

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Основные понятия и определения

Игра — упрощенная модель конфликта для решения конфликтных ситуаций. Разработан специальный аппарат — **теория игр**. Стороны, участвующие в конфликте, называются игроками.

Для задания правил необходимо определить:

1) варианты действия игроков;

2) объем информации каждого игрока о поведении противника;

3) выигрыш, к которому приводит совокупность действий игроков.

Если в игре принимают участие два игрока, то игра называется парной, если же количество игроков больше двух, то игра называется **множественной**.

Игра, в которой выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, называется **игрой с нулевой суммой (антагонистической игрой)**.

Совокупность правил, определяющих выбор действий игрока в зависимости от сложившейся ситуации, называется **стратегией**.

Решить антагонистическую задачу (игру) — значит для каждого игрока указать стратегию, удовлетворяющую условию оптимальности, то есть игрок A должен получить максимальный выигрыш, а игрок B должен получить минимальный проигрыш.

Оптимальные стратегии характеризуются устойчивостью, то есть не одному из игроков не выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии. В игре с полной информацией перед каждым ходом игрок знает все предшествующие ходы и выигрыши. В кооперативных играх допускается возможность предварительных переговоров между игроками.

Предположим, что для пары стратегий A_i и B_j выигрыш известен — ν_{ij}, тогда можно составить прямоугольную таблицу (матрицу), в которой показаны все стратегии игроков и соответствующие выигрыши. Такая матрица называется **платежной**.

	B_1	B_2
A_1	5	−4
A_2	4	3
A_3	2	1

Положительные числа в клетках матрицы означают выигрыш игрока A и, следовательно, проигрыш игрока B. Отрицательное число означает проигрыш игрока A и, следовательно, выигрыш игрока B.

1. Решение игры с седловой точкой

	B_1	B_2
A_1	5	−4
A_2	4	3
A_3	2	1

Рассмотрим подробнее игровую матрицу. У игрока A имеется 3 стратегии, а у игрока B — 2 стратегии. Нужно определить, какую стратегию нужно выбрать игроку A, чтобы его выигрыш был максимальным, проигрыш игрока B был бы минимальным.

	B_1	B_2	min
A_1	5	−4	−4
A_2	4	3	3
A_3	2	1	1
max	5	3	

Для этого введем несколько понятий.

Нижняя цена игры: сначала находим минимумы в каждой строке, заносим их в таблицу. Из полученных минимумов находим максимум: $\alpha = \max \min v_{ij}$; $\alpha = 3$ — это гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B.

Верхняя цена игры: сначала находим максимум в каждом столбце, определяем минимальное число: $\beta = \min \max v_{ij}$; $\beta = 3$ — гарантированный проигрыш игрока B при любой стратегии игрока A.

Если $\alpha = \beta = v$, то в этом случае выбранные стратегии называются оптимальными, а саму игру называют игрой с седловой точкой. В этом случае у игрока A — стратегия A_2 и у игрока B — стратегия B_2. При выборе других стратегий выигрыш игрока A будет меньше, а проигрыш игрока B больше.

Задача

Найти седловую точку матрицы:

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	1	2	1	−1
A_2	3	−5	−1	5
A_3	−1	7	−2	−2
max	3	7	1	

$\alpha = 1$; $\beta = 1$; седловая точка A_1; B_3, а выигрыши $v_{1A} = v_{3B} = 1$.

Однако на практике чаще встречаются случаи, когда платежная матрица не имеет седловой точки. Такие задачи называются задачами со смешанными стратегиями.

2. Смешанные стратегии

Рассмотрим пример:

	B_1	B_2	min
A_1	5	8	5
A_2	6	4	4
max	6	8	

$\alpha = 5$; $\beta = 6$; $\alpha \neq \beta$.

В этой задаче нет седловой точки, и игроки должны применять смешанные стратегии. Для нахождения смешанных стратегий используется несколько методов:

1) определение цены игры методом подбрасывания монеты;
2) определение относительных частот применения смешанных стратегий;
3) использование частот и вероятностей, полученных при многократной игре.

Определение цены игры методом подбрасывания монеты:

	B_1	B_2	min
A_1	5	8	5
A_2	6	4	4
max	6	8	

Пусть смешанная стратегия игрока A определяется подбрасыванием монеты: A_1 — «орел», A_2 — «решка».

Средний выигрыш игрока A против первой стратегии игрока B:

$$v_{1A} = \frac{5+6}{1+1} = 5,5,$$

а против второй:

$$v_{2A} = \frac{8+4}{1+1} = 6.$$

В обоих случаях результат для игрока A будет лучше, чем при выборе любой стратегии. Цена игры всегда лежит в пределах: $\alpha \le v \le \beta$.

Определение относительных частот применения смешанных стратегий:

	B_1	B_2	
A_1	5	8	3
A_2	6	4	2
	1	4	

Если игра не имеет седловой точки, то наилучшей будет смешанная стратегия. Для нахождения оптимальной стратегии нужно выполнить следующее.

1. Рассмотрим стратегии игрока B. Из первой строки вычитаем числа второй, тогда частоту применения первой стратегии примем равной 4, а частоту второй стратегии — 1, то есть стратегии B_1 и B_2 должны применятся игроком B в отношении 4:1.

Отметим, что если число, характеризующее относительную частоту, окажется отрицательным, то на знак не обращают внимания.

2. Аналогичным образом определяются частоты применения стратегий игрока A, и они соотносятся как 2:3.

3. Найдем цену игры при применении против первой стратегии игрока B:

$$v_{1A} = \frac{5\cdot 2 + 6\cdot 3}{2+3} = 5,6,$$

а цена игры против второй стратегии

$$v_{2A} = \frac{8\cdot 2 + 4\cdot 3}{2+3} = 5,6.$$

Можно убедиться, что средний выигрыш игрока A в данном случае больше, чем при применении любых других стратегий.

Использование вероятностей применения стратегий для получения цены смешанных стратегий. Если нижняя цена игры не равна верхней, то седловой точки нет. В этом случае для каждого игрока нужно указать вектор частот, с которыми нужно применять ту или иную стратегию.

Для игрока A: $P = (p_1 \dots p_m)$, где $p_1 + \dots + p_m = 1$,
$P_i \geq 0$ — частота применения стратегии A_i.
Для игрока B: $Q = (q_1 \dots q_n)$, где $q_1 + \dots + q_n = 1$,
$q_j \geq 0$ — частота применения стратегии B_j.
В этом случае $v\ (P^0Q^0)$ называют ценой игры и обозначают через v, и $\alpha \leq v \leq \beta$.

Пример

Рассмотрим решение игры (смотри таблицу).

		q	$1-q$	
		B_1	B_2	α
p	A_1	-5	8	-5
$1-p$	A_2	4	-7	-7
	β	4	8	

В данном примере седловая точка отсутствует, тогда оптимальная цена игры $-5 \leq v \leq 4$.
Припишем строкам вероятности p и $1-p$.

Умножив столбец $\begin{vmatrix} p \\ 1-p \end{vmatrix}$ поэлементно на первый столбец и сложив произведения, получим линейную зависимость:

$$W(p) = -5p + 4(1 - p) = -9p + 4. \tag{1}$$

(1) — это средний выигрыш игрока A при применении игроком B первой стратегии.

Умножив столбец $\begin{vmatrix} p \\ 1-p \end{vmatrix}$ поэлементно на второй столбец и сложив произведения, получим:

$$W(p) = 8p + (-7)(1 - p) = 15p - 7. \tag{2}$$

(2) — это средний выигрыш игрока A при применении игроком B второй стратегии.
Приравняем (1) и (2):

$$-9p + 4 = 15p - 7.$$

Отсюда $p_1 = \frac{11}{24}$; $p_2 = 1 - p_1 = \frac{13}{24}$.

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока A — это $p\left(\frac{11}{24}, \frac{13}{24}\right)$, т.е. игрок A должен применять первую стратегию игрока B с частотой $p_1 = \frac{11}{24}$ и вторую стратегию игрока B с частотой $p_2 = \frac{13}{24}$.

Подставив в зависимости (1) и (2) соответственно p_1 и p_2, получим цену игры:

$$v_{1A} = -\frac{1}{8};\ v_{2A} = \frac{9}{8}. \tag{3}$$

Теперь припишем столбцам вероятности q и $1 - q$. Умножив строку $(q,\ 1 - q)$ на первую строку и сложив произведения, получим

$$W(q) = (-5)q + 8(1-q) = -13q + 8. \tag{4}$$

(4) — средний выигрыш игрока B при применении игроком A первой стратегии.

Аналогично со второй строкой:

$$W(q) = 4q + (-7)(1 - q) = 11q - 7. \tag{5}$$

(5) — средний выигрыш игрока B при применении игроком A второй стратегии.

Приравнивая зависимости (4) и (5), получим:

$$-13q + 8 = 11q - 7.$$

Отсюда $q_1 = \dfrac{3}{8}$; $q_2 = 1 - q_1 = \dfrac{5}{8}$, т.е. оптимальная смешанная стратегия игрока B — это $q\left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{8}\right)$.

Подставив в зависимости (4), (5) соответственно q_1 и q_2, получим цену игры игрока B.

$$v_{1B} = \frac{25}{8};\ v_{2B} = -\frac{1}{8}. \tag{6}$$

Сравнивая (3) и (6), находим, что $v_{1A} = v_{2B} = -\dfrac{1}{8}$ — это и есть оптимальная цена игры, которая возможна при оптимальной смешанной стратегии $P^0 = \dfrac{11}{24}$ и $Q^0 = \dfrac{5}{8}$.

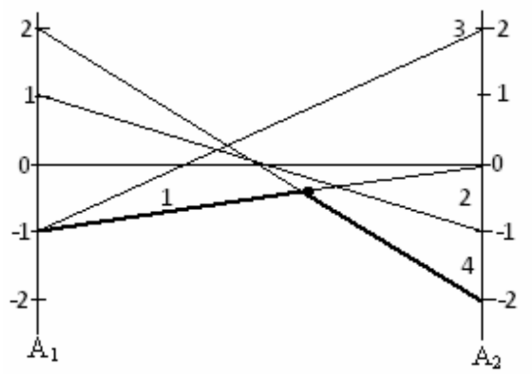
Таким образом, оптимальная цена игры $v_A\left(\dfrac{11}{24}; \dfrac{5}{8}\right) = -\dfrac{1}{8}$, и действительно, $-5 \le -\dfrac{1}{8} \le 4$.

3. Решение игры 2×*n*

Самым удобным способом для определения оптимальной стратегии игроков в игре $2 \times n$ является **графический способ**.

Пример:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−1	1	−1	2
A_2	0	−1	2	−2



Отложим на двух вертикальных осях платежи сначала первой стратегии $B_1(-1{,}0)$ и соединим их линией, а затем остальные стратегии игрока B. Отметим утолщенной линией нижнюю границу графика. Затем найдем наивысшую точку этой линии. Линии, пересекающиеся в этой точке, соответствуют тем чистым стратегиям, которые должен применить игрок B в своей смешанной стратегии. На графике в этой точке пересекаются линии, соответствующие стратегиям B_1 и B_4. Таким образом, остается матрица по первой и четвертой стратегиям игрока B:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \\ \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{array} \right| \end{array}$$

Решим методом определения относительных частот применения смешанных стратегий. Получим:
– игрок A должен применить стратегии A_1 и A_2 в отношении 2:3, тогда цена игры:

	B_1	B_2	
A_1	−1	2	3
A_2	0	−2	2
	1	4	

$$v=\frac{-1\cdot 2+0\cdot 3}{2+3}=-\frac{2}{5};$$

– игрок B должен применять стратегии B_1 и B_4 в отношении 4:1, тогда

$$v=\frac{-1\cdot 4+2\cdot 1}{4+1}=-\frac{2}{5}.$$

То есть оптимальная цена игры $v_{\text{опт}}=-\frac{2}{5}$.

4. Решение игры *m*×2

Используя метод вероятностей применения стратегий, решить игру 3×2.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{array}\right| \end{array}$$

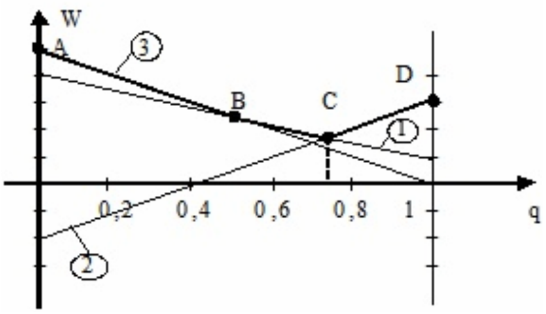
Припишем вероятности столбцов для q; $1-q$, в результате получим линейные зависимости

$$W(q) = 1q + 4(1-q) = 4 - 3q,$$

$$W(q) = 3q + (-2)(1-q) = 5q - 2,$$

$$W(q) = 0\cdot q + 5(1-q) = 5-5q.$$

Изобразим данные линейные зависимости графически:



Возьмем верхнюю огибающую. Точка C — точка с наименьшим выигрышем (W), точка пересечения прямых (1) и (2). Приравняем первую и вторую зависимости и определим вероятности:

$$4-3q=5q-2;\ q=\frac{3}{4}.$$

Цена игры в этом случае

$$v=W\left(\frac{3}{4}\right)=4-3\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{4}.$$

При корректном построении можно легко определить вероятность применения смешенных стратегий и цену игры.

Примеры решения задач

Задача 1

Найти решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. Данная игра седловой точки не имеет: α = 2, β = 3. Поэтому ищем решение в смешанных стратегиях:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2-5}{1+2-3-5} = \dfrac{3}{5}; \\ x_2 = 1 - x_1 = \dfrac{2}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{2-3}{1+2-3-5} = \dfrac{1}{5}; \\ y_2 = 1 - y_1 = \dfrac{4}{5}; \end{cases}$$

$$\nu = \frac{1\cdot 2 - 3\cdot 5}{1+2-3-5} = \frac{13}{5}.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$\left(x^0\right)^T = \left[\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right]; \ \left(y^0\right)^T = \left[\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right]; \ \nu = \frac{13}{5}.$$

Задача 2

Найти решение игры 2×2 с использованием понятия равновесия по Нэшу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Определим по формуле $h_A(x,y) = (x, 1-x)\ A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ математическое ожидание выигрыша игрока A:

$$h_A(x,y) = (x,1-x)\,A\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (x,1-x)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = xy + 5(1-x)y + 3(1-y)x + 2(1-x)(1-y) =$$
$$= -5xy + 3y + x + 2.$$

Определим точку Нэша:

$$\frac{\partial h_A(x,y)}{\partial x} = -5y + 1 = 0; \qquad y^{\text{Н}} = \frac{1}{5};$$
$$\frac{\partial h_B(x,y)}{\partial y} = -5x + 3 = 0; \qquad x^H = \frac{3}{5},$$

$(x^{\text{Н}}, y^{\text{Н}})$ — координаты точки равновесия по Нэшу.

Таким образом, оптимальные стратегии в данной игре следующие:

$$\left(x^0\right)^T = \left(x^H, 1-x^H\right) = \left[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right]; \ \left(y^0\right)^T = \left(y^H, 1-y^H\right) = \left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right].$$

Цена игры в точке Нэша

$$v = \left(x^0\right)^T A\left(y^0\right) = \left[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{13}{5}.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$\left(x^0\right)^T = \left[\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right]; \ \left(y^0\right)^T = \left[\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right]; \quad v = \frac{13}{5}.$$

Примеры заданий

Вариант 0

Зная платежную матрицу

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix},$$

определить нижнюю и верхнюю цены игры и найти решение игры.

Вариант 1

Игра задана платежной матрицей. Определить седловую точку.

$$\begin{pmatrix} 20 & 35 & 60 & 40 \\ 15 & 45 & 25 & 50 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Вариант 2

Игра задана платежной матрицей. Определить седловую точку.

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Вариант 3

Игра задана платежной матрицей. Определить верхнюю цену игры.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Вариант 4

Игра задана платежной матрицей. Определить нижнюю цену игры.

$$\begin{pmatrix} 0,35 & 0,35 & 0,40 \\ 0,30 & 0,15 & 0,45 \\ 0,40 & 0,50 & 0,25 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Вариант 5

Игра задана платежной матрицей. Определить нижнюю и верхнюю цены игры.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Вариант 6

Игра задана платежной матрицей. Определить седловую точку.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Вариант 7

Игра задана платежной матрицей. Определить вероятности P_1 и P_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока A.

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Вариант 8

Игра задана платежной матрицей. Определить вероятности q_1 и q_2 применения стратегий B_1 и B_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока B.

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Вариант 9

Игра задана платежной матрицей. Определить цену игры, если вероятности P_1 и P_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока A равны 0,6 и 0,4.

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Вариант 10

Найти графически стратегии игроков A, B и цену игры, заданной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

Найти графически стратегии игроков A, B и цену игры, заданной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

Найти графически стратегии игроков A, B и цену игры, заданной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

Найти графически стратегии игроков A, B и цену игры, заданной матрицей.

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

ПОДГОТОВКА КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Темы курсовых работ по дисциплине «Исследование операций»

1. Теоретические аспекты оптимизации. Методы математического анализа. Примеры.
2. Методы безусловной оптимизации. Примеры.
3. Условная оптимизация. Метод Лагранжа. Примеры.
4. Линейное программирование. Симплекс-метод.
5. Применение линейного программирования в экономике.
6. Транспортная задача. Метод потенциалов.
7. Применение метода потенциалов в логистике.
8. Численные методы решения оптимизационных задач.
9. Градиентные методы. Алгоритмы.
10. Квазиградиентные методы.
11. Сетевые модели. Алгоритмы.
12. Метод критического пути.
13. Метод PERT.
14. Обобщенные сетевые модели.

15. Стохастические сетевые модели.
16. Вероятностные методы.
17. Экспертные методы.
18. Методы имитационного моделирования.
19. Математическая теория планирования экспериментов.
20. Теория массового обслуживания.
21. Оптимальные статистические методы.
22. Устойчивые (робастные) методы оценивания.
23. Принцип максимума Понтрягина.
24. Минимизация рисков в проектах.
25. Оптимальные алгоритмы календарного планирования.
26. Оптимизация по Парето.
27. Метод анализа иерархий Саати.
28. Метод нечетких множеств Заде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гусев Д.А. Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации / Д.А. Гусев. – Москва : Издательский центр «Академия», 2012.

2. Клашанов Ф.К. Теория игр. Лекции курса / Ф.К. Клашанов. – Москва : МГСУ, 2016.

3. Колобашкина Л.В. Основы теории игр / Л.В. Колобашкина. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.

4. Лабскер Л.Г. Теория игр в экономике. Практикум с решениями задач / Л.Г. Лабскер, Н.А. Ященко. – Москва : КНОРУС, 2012.

5. Транспортная задача — решение методом потенциалов. – URL: http://galyautdinov.ru/post/transportnaya-zadacha.

6. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для высших технических учебных заведений / Е.С. Вентцель. – Москва : КноРус, 2013.

7. Петросян Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.В. Шевкопляс. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2012.

8. Есипов Б.А. Методы исследования операций : учеб. пособие для вузов / Есипов Б.А. – Санкт-Петербург : Лань, 2010.