МАТЕМАТИКА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
для обучающихся бакалавриата по всем УГСН, реализуемым НИУ МГСУ

Составители:
Е.А. Ларионов, О.А. Васильева

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2020

УДК 51
ББК 22.1
Д50

Рецензент — доктор физико-математических наук *Н.Н. Рогачева*,
доцент кафедры прикладной математики НИУ МГСУ

Д50 **Дифференциальные уравнения** [Электронный ресурс] : методические указания к практическим занятиям для обучающихся бакалавриата по всем УГСН, реализуемым НИУ МГСУ / сост.: Е.А. Ларионов, О.А. Васильева ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра прикладной математики. — Электрон. дан. и прогр. (0,6 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020. — Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/. — Загл. с титул. экрана.

В методических указаниях приведён материал по следующим разделам курса «Дифференциальные уравнения»: обыкновенные дифференциальные уравнения 1 и 2-го порядков, линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка, краевые задачи для дифференциальных уравнений, системы дифференциальных уравнений, устойчивость по Ляпунову, приближённые методы решения дифференциальных уравнений и систем.

Для обучающихся бакалавриат по всем УГСН, реализуемым НИУ МГСУ.

Учебное сетевое электронное издание

Редактор, корректор *А.А. Космина*
Компьютерная вёрстка *В.Е. Гурьянчевой*
Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2007, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию 07.05.2020. Объем данных 0,6 Мб.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет»
129337, Москва, Ярославское ш., 26

Издательство МИСИ – МГСУ
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Дифференциальные уравнения» является формирование соответствующего уровня освоения компетенций обучающегося. В результате формирования указанного уровня обучающийся должен обладать: способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью и способностью самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук.

Для успешного изучения дисциплины необходимы знания и умения, приобретённые в результате освоения программ бакалавриата по дисциплинам «Линейная алгебра» и «Математический анализ».

В результате успешного изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» у обучающегося должно сформироваться целостное представление об основных понятиях и методах теории дифференциальных уравнений, её месте и роли в различных областях науки и техники.

В методических указаниях рассмотрены следующие разделы курса: обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков, линейные дифференциальные уравнения n-го порядка, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, системы дифференциальных уравнений, приближённые методы решения дифференциальных уравнений. Приведено краткое изложение теоретических положений, даны примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения.

Методические указания будут полезны обучающимся по направлению подготовки «Прикладная математика», а также для специалистов в различных областях естественных наук, применяющих математические методы исследования.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

1.1. Общие понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее неизвестную функцию, её производные или дифференциал и независимую переменную.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (дифференциала) неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение превращает уравнение в тождество.

Нахождение решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одной переменной, то такое уравнений называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) является множество всех функций, являющихся решениями дифференциального уравнения.

Конечное уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее решение дифференциального уравнения $y = y(x)$ как неявную функцию x, называется интегралом дифференциального уравнения.

Если конечное уравнение определяет все решения дифференциального уравнения, то оно называется общим интегралом дифференциального уравнения.

1.2. Обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{1.1}$$

и называется уравнением с разделёнными переменными. После интегрирования

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

получаем общий интеграл ОДУ.

Уравнение вида

$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0 \tag{1.2}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Это уравнение делением на $f_2(y)g_1(x)$ сводится к виду (1.1)

$$\frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = -\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx,$$

после чего оно интегрируется. Общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными (1.2) имеет вид

$$\int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = -\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx.$$

Деление на $f_2(y)g_1(x)$ может привести к потере решений, обращающих в ноль указанное произведение. Если функции $g_1(x)$ и $f_2(y)$ могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений, обращающих в ноль произведение $(f_2(y)g_1(x))^{-1}$.

Если удаётся перегруппировать слагаемые так, чтобы переменные x и y стояли в разных частях равенства, то имеем уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1

Найти общее решение уравнения

$$x^2 y^2 dy = (y-1)dx.$$

Решение

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Интегрируя обе части уравнения

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{dx}{x^2},$$

получим

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$ и $y=1$. Функция $y=1$ является решением уравнения, $x=0$ не является решением уравнения.

Ответ: $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$, $y=1$.

Пример 2

Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Решение

Перегруппируем члены этого уравнения:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

(дифференциалы *dy* и *dx* обязательно должны стоять в числителях). Затем это равенство интегрируем:

$$\ln y = x^2 + C$$

и получаем общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{x^2+C}.$$

Ответ: $y = e^{x^2+C}$, или $y = C_1 e^{x^2}$.

1.3. Обыкновенное дифференциальное уравнение вида $y' = f(ax+by+c)$

Такое уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = ax+by+c$. Имеем

$$y = \frac{u-ax-c}{b}, \quad y' = \frac{u'-a}{b}.$$

Делая указанную замену, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u' = a + bf(u).$$

Пример 3

Найти общее решение ОДУ $y' = (x - 4y + 3)^2$.

Решение

Сделаем замену переменных $u = x - 4y + 3$. Тогда $y = \frac{x - u + 3}{4}$, $y' = \frac{1 - u'}{4}$, и уравнение приобретает вид

$$u' = -4u^2 + 1.$$

Отсюда

$$\frac{du}{1 - 4u^2} = dx\,;\ x + C = \int \frac{du}{1 - 4u^2}\,;\ x + C = \frac{1}{4}\ln\frac{1 + 2u}{1 - 2u}.$$

Найдём из этого равенства *u*:

$$\frac{1 + 2u}{1 - 2u} = e^{4(x+C)} \Rightarrow 2u(1 + e^{4(x+C)}) = e^{4(x+C)} - 1 \Rightarrow u = 0,5\frac{e^{4(x+C)} - 1}{e^{4(x+C)} + 1}.$$

Подставив *u* в выражение для *y*, найдём ответ.

Ответ: $y = 0,25(x - 0,5\frac{e^{4(x+C)} - 1}{e^{4(x+C)} + 1} + 3)$.

1.4. Однородные обыкновенные дифференциальные уравнения вида $y' = f(\frac{y}{x})$ называются однородными. Такое название они получили из-за того, что функция, зависящая только от отношения переменных y/x, называется однородной. Не всегда однородное ОДУ имеет такой вид. Иногда оно может иметь следующий вид: $x^i y^j y' + ax^k y^l - bx^m y^n = 0$. В этом случае нужно сложить показатели степени у *x* и *y* в каждом слагаемом уравнения, и если эти суммы одинаковы, то уравнение является однородным.

Однородное уравнение с помощью введения новой переменной $u = \frac{y}{x}$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, так как $y' = u + xu'$, то уравнение записывается следующим образом:

$$u + xu' = f(u),$$

после чего оно интегрируется.

Пример 4

Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}.$$

Решение

Представляем *y* в виде $y = xu$ и получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для *u*:

$$u + xu' = u + e^{-u}\,;\ e^u du = \frac{dx}{x};\ \int e^u du = \int \frac{dx}{x};\ e^u = \ln x + \ln C\,;\ u = \ln\ln Cx.$$

Делая обратную замену переменных, получаем общее решение уравнения $y = x\ln\ln Cx$.

Ответ: $y = x\ln\ln Cx$.

Пример 5

Решить задачу Коши:

$$x^2 y' - 2xy + 4y^2 = 0\,,\ y(1) = 1\,.$$

Решение

После замены $y = xu$ получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$x^2(u + xu') - 2x^2u + 4x^2u^2 = 0\,;\ xu' - u + 4u^2 = 0\,.$$

Поделив на $x(u - 4u^2)$, получим

$$\frac{du}{u(1-4u)} = \frac{dx}{x}\,.$$

Интеграл от левой части уравнения — это интеграл от рациональной функции, который берётся путём её разложения на сумму простых дробей:

$$\frac{1}{u(1-4u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-4u} = \frac{u(B-4A)+A}{u(1-4u)}\,,$$

$$\begin{cases} B - 4A = 0 \\ A = 1 \end{cases},\ A = 1,\ B = 4\,.$$

Следовательно, имеем

$$\int \frac{du}{u} + 4\int \frac{du}{1-4u} = \int \frac{dx}{x}\,;\ \ln\frac{u}{1-4u} = \ln Cx\,;\ u = \frac{Cx}{1+4Cx}\,.$$

Общим решением заданного ОДУ является функция $y = \dfrac{Cx^2}{1+4Cx}$. Учитывая начальное условие $y(1) = 1$, получим $1 = \dfrac{C}{1+4C} \Rightarrow 3C = -1 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $y = \dfrac{x^2}{4x-3}$.

Пример 6

Найти общее решение ОДУ

$$xy' - \sqrt{x^2 + y^2} - y = 0\,.$$

Решение

На первый взгляд, это уравнение не выглядит как однородное, так как не подходит под приведённые выше определения. Но, разделив на x все слагаемые, получим уравнение вида

$$y' = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\,.$$

После введения новой переменной $u = y/x$ уравнение запишется в виде уравнения с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = \sqrt{1+u^2} + u \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln Cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + \sqrt{1+u^2} = Cx \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx.$$

Мы получили общий интеграл данного уравнения.

1.5. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x)$$

называются линейными.

Если правая часть уравнения равна нулю, то это линейное однородное ОДУ. Уравнение названо линейным потому, что оно линейно относительно функции и её производной.

Линейное уравнение можно решить, если заменить y на произведение двух новых неизвестных функций $u\upsilon$, это позволяет свести исходное ОДУ к двум ОДУ с разделяющимися переменными. Действительно, подставим $y = u\upsilon$ в исходное уравнение:

$$u'\upsilon + u\upsilon' + u\upsilon p = q\ ;\ u'\upsilon + u(\upsilon' + \upsilon p) = q\ .$$

Выберем функцию υ такой, чтобы скобка в последнем уравнении обнулилась: $\upsilon' + \upsilon p = 0$. Например, $\upsilon = e^{-\int p(x)dx}$. При такой функции υ уравнение запишется следующим образом:

$$u'e^{\int p(x)dx} = q\ .$$

В итоге после интегрирования и обратной замены переменных общее решение линейного уравнения имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int qe^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Пример 7

Найти общее решение линейного уравнения

$$y' = 2xy - x^3 + x\ .$$

Решение

Здесь $p(x) = -2x$, $q(x) = x - x^3$. Обозначим y через $u\upsilon$, после чего уравнение примет вид,

$$u'\upsilon + u\upsilon' - 2xu\upsilon = x - x^3\text{, или } u'\upsilon + u(\upsilon' - 2x\upsilon) = x - x^3\ .$$

Будем считать, что $\upsilon = e^{-\int p(x)dx}$, $\upsilon = e^{x^2}$.

Зная υ, теперь можно найти и u:

$$\frac{du}{dx}e^{x^2} = x(1-x^2)\ ;\ \int du = u = \int x(1-x^2)e^{-x^2}dx\ ;\ u = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + C\ .$$

Окончательно имеем общее решение линейного ОДУ: $y = \dfrac{x^2}{2} + Ce^{x^2}$.

Ответ: $y = \dfrac{x^2}{2} + Ce^{x^2}$.

Заметим, что есть ещё один способ решения линейного уравнения, заключающийся в следующем. Сначала решают уравнение с нулевой правой частью, являющееся уравнением с разделяющимися переменными: $y' + p(x)y = 0$. В получившемся решении этого уравнения $y = \varphi(x, C)$ константу C предполагают функцией x, т.е. считают, что $y = \varphi[x, C(x)]$. После подстановки этого y в линейное уравнение получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными для функции $C(x)$. Интегрируя его, находим $C(x)$ и затем $y(x)$.

Пример 8

Найти общее решение ОДУ

$$y' - 2xy = xe^{-x^2}\ .$$

Решение

Вначале найдём общее решение однородного уравнения:

$$y' - 2xy = 0\,;\ \frac{dy}{y} = 2xdx\,;\ y = Ce^{x^2}.$$

Теперь будем считать константу C функцией x: $y = C(x)e^{x^2}$. После подстановки этой функции и её производной $y' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$ в исходное уравнение получим уравнение для C':

$$C'e^{x^2} + 2xCe^{x^2} - 2xCe^{x^2} = xe^{-x^2}\,;\ C' = xe^{-2x^2}.$$

Решая последнее уравнение, находим

$$C(x) = \int xe^{-2x^2}dx = -\frac{1}{4}\int e^{-2x^2}d(-2x^2) = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + C.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения запишется так:

$$y = -\frac{1}{4}e^{-x^2} + Ce^{x^2}.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{4}e^{-x^2} + Ce^{x^2}$.

1.6. Уравнение Бернулли

Уравнение

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

которое отличается от линейного уравнения множителем в правой части y^n ($n \neq 0$ и 1), называется уравнением Бернулли.

Уравнение Бернулли можно свести к линейному. Разделим обе части уравнения Бернулли на y^n:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Так как в линейном уравнении во втором слагаемом должна стоять первая степень искомой функции, то логично использовать подстановку $z = y^{1-n}$. Продифференцировав это равенство, найдём: $z' = (1-n)y'y^{-n} \Rightarrow y'y^{-n} = \frac{z'}{1-n}$. Теперь относительно функции z уравнение линейное:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Пример 9

Найти общее решение ОДУ

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Решение

Разделим обе части уравнения на y^2:

$$\frac{x}{y^2}y' + \frac{1}{y} = \ln x.$$

Введём новую функцию $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$. После этого дифференциальное уравнение станет линейным:

$$-xz' + z = \ln x.$$

Используем метод вариации произвольной постоянной, решив сначала однородное уравнение:

$$-xz' + z = 0\,;\ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}\,;\ z = Cx\,.$$

Будем считать, что

$$z = C(x)x,\ z' = C'x + C\,.$$

Подставив это в уравнение для z, получим:

$$-x^2C' - Cx + Cx = \ln x\,;\ \frac{dC}{dx} = -\frac{\ln x}{x^2}\,;\ C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \frac{\ln x + 1}{x} + C\,.$$

Таким образом, мы нашли, что $z = \frac{1}{y} = \ln x + 1 + Cx$, откуда общее решение заданного уравнения таково:

$$y = \frac{1}{1 + \ln x + Cx}\,.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{1 + \ln x + Cx}$.

1.7. Уравнения в полных дифференциалах

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и дифференцируемы в некоторой области D плоскости Oxy, и функция $Q(x, y)$ не обращается в ноль ни в одной точке этой области. Кроме того, пусть в области D справедливо тождество

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Тогда ОДУ вида $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ называется уравнением в полных дифференциалах.

Уравнение можно переписать в дифференциальной форме:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,.$$

Из курса дифференциального исчисления известно, что левая часть этого равенства является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ тогда и только тогда, когда имеет место указанное тождество. Поэтому уравнение можно записать в виде $du(x, y) = 0$, откуда следует, что

$$u(x, y) = C.$$

Это и будет являться общим решением ОДУ.

Полный дифференциал функции двух переменных равен

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\,,$$

с другой стороны

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y);\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)\,.$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+C_1(y);$$

$$u(x,y)=\int Q(x,y)dy+C_2(x).$$

В этих формулах $C_1(y)$ и $C_2(x)$ — произвольные функции соответствующих переменных x и y, так как при интегрировании по x величина y рассматривается как постоянная, а при интегрировании по y x считается постоянной.

Неизвестную функцию, к примеру, $C_1(y)$, найдём, сначала продифференцировав первое уравнение по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)+C_1'(y)=Q(x,y),$$

а затем проинтегрировав последнее равенство по y при постоянном x.

Пример 10

Найти общее решение уравнения

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$$

Решение

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как при $P(x,y)=3x^2+6xy^2$ и $Q(x,y)=6x^2y+4y^3$ выполняется требуемое для этого равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy$. Следовательно, функция $u(x, y)$ равна

$$u=\int(3x^2+6xy^2)dx+C_1(y)=x^3+3x^2y^2+C_1(y).$$

Неизвестную функцию $C_1(y)$ найдём из условия

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\Rightarrow 6x^2y+C_1'(y)=6x^2y+4y^3.$$

Отсюда $C_1'(y)=4y^3\Rightarrow C_1(y)=4\int y^3dy+C=y^4+C$. Зная теперь, чему равна функция $u(x, y)$, найдём общий интеграл исходного уравнения.

Ответ: $x^3+3x^2y^2+y^4+C=0.$

Если левая часть уравнения не является полным дифференциалом, то её иногда всё же можно сделать таковой, умножив предварительно на специально подобранную функцию $\mu(x, y)$. Такая функция называется интегрирующим множителем. Заметим, что такая процедура может приводить к появлению лишних частных решений.

Пример 11

Решить задачу Коши:

$$(x+x^4+x^2y^2)dx+ydy=0,\ y(0)=\sqrt{2}.$$

Решение

Проверим, выполняется ли равенство частных производных для нашего случая: $P(x,y)=x+$ $+x^4+x^2y^2$, $Q(x,y)=y$. Очевидно, что нет: $\frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y$, а $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$. Однако после умножения этих функций на $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ выполнение равенства обеспечено:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+x^4+x^2y^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Теперь уравнение $\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x^2\right)dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy=0$ стало уравнением в полных дифференциалах, и его решение будем искать по формуле

$$u(x,y)=\int\frac{y}{x^2+y^2}dy+C_2(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_2(x).$$

Неизвестную функцию $C_2(x)$ найдём из условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}+x^2\Rightarrow\frac{x}{x^2+y^2}+C_2'(x)=\frac{x}{x^2+y^2}+x^2.$$

Отсюда $C_2'(x)=x^2\Rightarrow C_2(x)=\int x^2dx+C=\frac{x^3}{3}+C$. Значит, функция $u(x, y)$ равна

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{x^3}{3}+C,$$

а общий интеграл исходного уравнения получается, если это выражение приравнять нулю. После преобразований получим

$$(x^2+y^2)e^{\frac{2}{3}x^3}=C.$$

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=\sqrt{2}$, подставим в последнее выражение $x=0$ и $y=\sqrt{2}$, откуда получим, что $C=2$. Следовательно, данная задача Коши имеет решение

$$(x^2+y^2)e^{\frac{2}{3}x^3}=2.$$

Ответ: $(x^2+y^2)e^{\frac{2}{3}x^3}=2.$

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА

2.1. Общие понятия

Среди ОДУ порядка выше первого особо важное место в смысле практических приложений занимают уравнения 2-го порядка. Дифференциальным уравнением 2-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0 .$$

Уравнение, разрешённое относительно второй производной, записывается так:

$$y'' = f(x, y, y') .$$

Общим решением ОДУ 2-го порядка является функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) ,$$

которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество, здесь C_1 и C_2 − произвольные постоянные,.

Частное решение, в котором C_1 и C_2 принимают конкретные значения, отыскивается с помощью задания либо начальных условий (задача Коши), либо краевых условий (краевая задача). Начальные условия означают, что заданы значения функции и её первой производной при каком-то конкретном x. А граничные условия предполагают, что функция известна для каких-то двух значений x.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Если функция $f(x, y, y')$ и её частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в окрестности значений $x_о$, $y_о$, y'_o, то уравнение $y'' = f(x, y, y')$ имеет в достаточно малом интервале $[x_о - h, x_о + h]$ единственное решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_o) = y_о$ и $y'(x_o) = y'_o$.

2.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

Простейшим ОДУ 2-го порядка является уравнение вида $y'' = f(x)$, в котором отсутствуют искомая функция и её первая производная. Для его решения это равенство нужно просто дважды проинтегрировать.

Пример 12

Найти общее решение ОДУ

$$y'' = \frac{1}{x} .$$

Решение

Напишем очевидные вычисления:

$$y'' \equiv \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{x} ;\, y' \equiv \frac{dy}{dx} = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C ;$$

$$y = \int (\ln x + C) dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx + Cx = x(\ln x + C_1) + C_2 .$$

Ответ: $y = x(\ln x + C_1) + C_2$.

Рассмотрим два часто встречающихся класса уравнений 2-го порядка, сводящихся к двум уравнениям первого порядка.

В том случае, когда в ОДУ отсутствует искомая функция y, т.е. оно выглядит как

$$y'' = f(x, y'),$$

вводят новую функцию $z(x) = y'$. Тогда исходное уравнение становится ОДУ первого порядка: $z' = f(x,\ z)$. Найдя из этого уравнения z, после интегрирования получают y.

Пример 13

Решить задачу Коши:

$$(1+x^2)y'' + xy' = x\,,\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -2\,.$$

Решение

Введём новую функцию $z(x) = y'$, после чего наше уравнение станет уравнением с разделяющимися переменными:

$$(1+x^2)z' + xz = x\,;\ (1+x^2)z' = x(1-z)]\,;\ \frac{dz}{1-z} = \frac{xdx}{x^2+1}\,;$$

$$-\ln(1-z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln C\,;\ 1-z = \frac{C_1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Возвращаясь к искомой функции y, получаем для неё следующее ОДУ первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = z = 1 - \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}}\,;\ y = x - C_1\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C_2\,.$$

Таким образом, мы нашли общее решение данного уравнения.

Найдём теперь частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = C_2 = 2,\ \ y'(0) = 1 - C_1 = -2\,.$$

Ответ: $y = x - 3\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2$.

Если в уравнении отсутствует независимая переменная x, т.е. оно имеет вид

$$y'' = f(y, y'),$$

то вводят новую функцию $p(y) = y'$. Такая замена позволяет от второй производной перейти к первой:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p\,.$$

Пример 14

Решить краевую задачу:

$$yy'' - (y')^2 = 0\,,\ y(0) = 1,\ \ y(1) = e^2\,.$$

Решение

Полагаем $y' = p,\ \ y'' = pp'$, и подставляем это в наше уравнение: $ypp' = p^2$. Особым решением этого уравнения является $p = 0$, $\underline{y = C}$. Теперь после сокращения на p получаем следующее:

$$y\frac{dp}{dy} = p,\ \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},\ \ln p = \ln C_1 y,\ p = \frac{dy}{dx} = C_1 y\,,$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx,\ \ \ln y - \ln C_2 = C_1 x,\ \ y = C_2 e^{C_1 x}\,.$$

Отметим, что особое решение $y = C$ в полученном решении присутствует, если мы положим $C_1 = 0$.

Из общего решения найдём частное, удовлетворяющее граничным условиям:

$$y(0) = C_2 = 1,\ \ y(1) = C_2 e^{C_1} = e^2 \Rightarrow C_1 = 2,\ \ C_2 = 1\,.$$

Значит, частное решение запишется так: $y = e^{2x}$.

Ответ: $y = e^{2x}$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА

3.1. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{3.1}$$

соответствующее ему однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

или, кратко,

$$L[y] = 0, \tag{3.2}$$

где $L[y]$ — линейный дифференциальный оператор. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1

Если линейно независимые функции $y_1, y_2, \ldots y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения (3.2) с непрерывными на отрезке $a \le x \le b$ коэффициентами $p_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$, то определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \ne 0$$

для любого $x \in [a, b]$.

Теорема 2

Общим решением линейного однородного уравнения (3.2) при $a \le x \le b$ с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$, является линейная комбинация n линейно независимых решений (3.2) $y_i(x)$

$$y_{обод}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i\,(x),$$

где c_i — произвольные постоянные.

Система $y_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ называется фундаментальной системой уравнения (3.2).

Теорема 3

Общее решение линейного однородного уравнения (3.1) при $a \le x \le b$ с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения $y_{обод}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i\,(x)$ соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения $y_ч(x)$ неоднородного уравнения (3.1).

Если известно общее решение однородного уравнения (3.2), то частное решение неоднородного уравнения находят методом вариации постоянных:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x).$$

Функции $c_i(x)$ находят из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0;$$

....

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Пример 15

Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Решение

Общее решение однородного уравнения

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Частное решение неоднородного уравнения найдем методов вариации постоянных. Варьируем коэффициенты c_1, c_2:

$$y(x) = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x,$$

$c_1(x)$, $c_2(x)$ определим из системы:

$$c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = 0;$$

$$c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \sin x = \frac{1}{\sin x};$$

$$c_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad c_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + \tilde{c}_1;$$

$$c_2'(x) = -c_1' \frac{\sin x}{\cos x} = -1, \; c_2'(x) = -\int dx = x + \tilde{c}_2;$$

$$y_{он}(x) = \tilde{c}_1 \sin x + \tilde{c}_2 \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x \cos x.$$

Ответ: $y_{он}(x) = \tilde{c}_1 \sin x + \tilde{c}_2 \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x \cos x.$

3.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x),$$

соответствующее ему однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0.$$

Для нахождения общего решения однородного уравнения составляем характеристическое уравнение

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0$$

и находим n (с учётом кратности) корней. уравнения. Каждому действительному корню k кратности l соответствуют l линейно независимых решений однородного уравнения

$$y_1 = e^{kx},\ \ y_2 = xe^{kx}, ...,\ y_l = x^{l-1}e^{kx}.$$

Каждой паре комплексных корней $p \pm iq$ кратности m соответствуют $2m$ линейно независимых решений однородного уравнения:

$$y_1 = e^{px}\sin qx,\ y_2 = xe^{px}\sin qx, ...,\ y_m = x^{(m-1)}e^{px}\sin qx,$$

$$y_{m+1} = e^{px}\cos qx,\ y_{m+2} = xe^{px}\cos qx, ...,\ y_{2m} = x^{(m-1)}e^{px}\cos qx.$$

Записав линейно независимые решения для всех корней, получаем фундаментальную систему, состоящую из n функций, и общее решение однородного уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения однородно уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Для некоторых частных случаев правой части $f(x)$ уравнения, которые мы разберём далее, известно, как это частное решение можно подобрать. При этом используется метод неопределённых коэффициентов, рассматриваемый в курсе интегрального исчисления.

1) Пусть $f(x) = P_n(x)e^{mx}$, где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени. В этом случае частное решение имеет вид $\tilde{y}(x) = x^l Q_n(x)e^{mx}$, где $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а l равно числу совпадений корней характеристического уравнения с числом m. Следует отметить, что этот случай охватывает и уравнения с правой частью в виде многочлена, поскольку тогда $m = 0$.

Пример 16

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}.$$

Решение

Найдём сначала общее решение однородного уравнения с правой частью, равной нулю. Запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2,\ \ k_2 = 3.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения должно быть записано так:

$$y_{одн} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Функция $f(x) = 2e^{3x}$, и, значит, $P_0(x) = 2$, $m = 3 = k_2$. Мы видим, что m совпало с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $l = 1$. Согласно вышеизложенному частное решение уравнения надо искать в виде $\tilde{y} = Axe^{3x}$ (A — это записанный в общем виде многочлен нулевой степени). Производные этой функции:

$$\tilde{y}' = Ae^{3x}(1+3x),\ \tilde{y}'' = 3Ae^{3x}(2+3x).$$

Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$Ae^{3x}(6+9x-5-15x+6x) = 2e^{3x} \text{ и } A = 2.$$

Поэтому $\tilde{y} = 2xe^{3x}$, а общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{2x} + (C_2 + 2x)e^{3x}.$$

Ответ: $y = C_1e^{2x} + (C_2 + 2x)e^{3x}$.

Этот пример показывает, что основная задача при нахождении общего решения неоднородного уравнения состоит в правильной записи частного решения $\tilde{y}$, потому что всё остальное (дифференцирование и метод неопределённых коэффициентов) не представляет собой ничего сложного. Поэтому остальные примеры посвятим именно нахождению $\tilde{y}$.

Пример 17

Определить вид частного решения линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 4y' + 4y = 3x^2.$$

Решение

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)^2 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2.$$

Значит, общее решение однородного уравнения такое:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

Правая часть данного уравнения $3x^2$ — это многочлен второй степени, а поскольку экспонента в правой части отсутствует, то, значит, $m = 0$. Поскольку m не совпадает с нашими k, то, значит, $l = 0$. Вывод: частное решение данного уравнения надо искать в виде многочлена второй степени

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Ответ: $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C.$

2) Пусть

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x],$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Если числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x],$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Если числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности m, то указанную выше форму частного решения следует умножить на x^m.

Пример 18

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x).$$

Решение

Запишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 13 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm 3i.$$

Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Анализируя правую часть заданного уравнения, видим, что $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\alpha \pm i\beta = 2 \pm i \neq k$, $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = -2$. Согласно приведённому выше правилу записи частного решения имеем

$$\tilde{y} = e^{2x}(A\cos x + B\sin x).$$

Найдём первую и вторую производные этой функции:

$$\tilde{y}' = e^{2x}[(2A+B)\cos x + (2B-A)\sin x],$$
$$\tilde{y}'' = e^{2x}[(3A+4B)\cos x + (3B-4A)\sin x].$$

Подставим функцию $\tilde{y}$ и её производные в исходное уравнение:

$$e^{2x}[(3A+4B+8A+4B+13A)\cos x + (3B-4A+8B-4A+13B)\sin x] = e^{2x}(\cos x - 2\sin x).$$

Дальше применяем метод неопределённых коэффициентов, приравнивая множители, стоящие при одинаковых функциях справа и слева, что даёт систему двух уравнений с двумя неизвестными A и B:

$$\begin{cases} 24A+8B=1 \\ -8A+24B=-2 \end{cases}, \begin{cases} 24A+8B=1 \\ -24A+72B=-6 \end{cases}, \begin{cases} B=-1/16 \\ A=1/16 \end{cases}.$$

Следовательно, частным решением будет

$$\tilde{y} = \frac{1}{16}e^{2x}(\cos x - \sin x).$$

Общее решение заданного уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{16}e^{2x}(\cos x - \sin x).$$

Ответ: $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{16}e^{2x}(\cos x - \sin x).$

Пример 19

Найти общее решение ОДУ

$$y'' + 4y = 4(4x-1)\sin 2x.$$

Решение

Характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет два комплексно-сопряжённых корня $k=\pm 2i$. Общее решение однородного уравнения, таким образом, выглядит как

$$y_{одн} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

В правой части заданного уравнения отсутствует экспонента, что означает $\alpha = 0$. Число $\beta = 2$, и, значит, $\alpha \pm i\beta = \pm 2i = k$. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ равны, соответственно, 0 и $4(4x-1)$, т.е. старшая степень многочленов – 1. В соответствии с правилом нахождения частного решения неоднородного уравнения в случае совпадения $\alpha \pm i\beta$ с k это решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = x[(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x] = (Ax^2+Bx)\cos 2x + (Cx^2+Dx)\sin 2x.$$

Вычислим производные этой функции:

$$\tilde{y}' = (2Ax+B+2Cx^2+2Dx)\cos 2x + (2Cx+D-2Ax^2-2Bx)\sin 2x;$$
$$\begin{aligned}\tilde{y}'' &= (2A+4Cx+2D+4Cx+2D-4Ax^2-4Bx)\cos 2x + \\ &+ (2C-4Ax-2B-4Ax-2B-4Cx^2-4Dx)\sin 2x = \\ &= (2A+8Cx+4D-4Ax^2-4Bx)\cos 2x + (2C-8Ax-4B-4Cx^2-4Dx)\sin 2x.\end{aligned}$$

Теперь подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2A+8Cx+4D-4Ax^2-4Bx+4Ax^2+4Bx)\cos 2x+$$
$$+(2C-8Ax-4B-4Cx^2-4Dx+4Cx^2+4Dx)\sin 2x=4(4x-1)\sin 2x.$$

Правая часть равенства должна быть тождественно равна левой, откуда, приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем:

$$\begin{cases} 2A+8Cx+4D=0 \\ 2C-8Ax-4B=16x-4 \end{cases}.$$

Равенства системы надо рассматривать не как уравнения относительно x, а как тождества. Отсюда, приравнивая свободные члены и множители при x в правых и левых частях равенств, найдём неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} 2A+4D=0 \\ 8C=0 \\ 2C-4B=-4 \\ -8A=16 \end{cases}, \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}.$$

Складывая решение однородного и частное решение неоднородного уравнений с учётом найденных коэффициентов A, B, C, D, получаем общее решение данного неоднородного ОДУ:

$$y = C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x[(-2x+1)\cos 2x+\sin 2x]=(C_1+x-2x^2)\cos 2x+(C_2+x)\sin 2x.$$

Ответ: $y=(C_1+x-2x^2)\cos 2x+(C_2+x)\sin 2x.$

В заключение заметим, что если правая часть неоднородного ОДУ является суммой нескольких функций $f_1(x),\ ...,f_n(x)$, то такое уравнение решается путём нахождения частных решений для каждой из них, а общее решение исходного уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и суммы всех этих частных решений.

4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Общие положения

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{4.1}$$

общее решение уравнения можно представить в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_ч,$$

где y_1, y_2 — система фундаментальных решения соответствующего однородного уравнения, а $y_ч$ — частное решение уравнения.

Для однозначного определения решения (нахождения констант C_1, C_2) требуется задать дополнительные (два) условия. Если условия на функцию и её производную задаются в одной точке, имеем задачу Коши. Если условия задаются в разных точках ($a \neq b$), имеем краевую задачу.

Краевой называется следующая задача:

при $a \le x \le b$ найти решение уравнения (4.1), удовлетворяющее краевым (граничным) условиям:

$$a_1 y'(a) + b_1 y(a) = d_1, \;\; a_2 y'(b) + b_2 y(b) = d_2. \tag{4.2}$$

4.2. Задача Штурма — Лиувилля

Задачей Штурма — Лиувилля называется задача нахождения собственных чисел и собственных функций (тождественно не равных нулю) следующей краевой задачи:

$$y'' + ky = 0, \;\; a < x < b,$$
$$a_1 y(a) + b_1 y'(a) = 0, \; a_2 y(b) + b_2 y'(b) = 0.$$

Пример 20

Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$y'' + ky = 0, \; 0 < x < \pi,$$
$$y(0) = 0, \;\; y(\pi) = 0.$$

Решение

1) Рассмотрим случай $k < 0$, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\sqrt{-k}x} + C_2 e^{-\sqrt{-k}x}.$$

Из краевых условий для нахождения констант имеем систему

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-k}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-k}x} = 0 \end{cases}.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, следовательно, нетривиальных решений нет ($y = 0$).

2) Рассмотрим случай $k = 0$, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x.$$

Из краевых условий для нахождения констант имеем систему

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 \pi = 0 \end{cases}.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, следовательно, нетривиальных решений нет ($y = 0$).

3) Рассмотрим случай $k > 0$, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos\sqrt{k}x + C_2 \sin\sqrt{k}x.$$

Из краевых условий для нахождения констант имеем систему

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\sqrt{k}\pi = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет нетривиальное решение только при

$$\sin\sqrt{k}\pi = 0.$$

Следовательно, собственные числа

$$k_n = n^2.$$

Соответствующие собственные функции

$$y_n = \sin \pi n, \; n = 1, 2, ...$$

Ответ: $k_n = n^2$ — собственные числа, $y_n = \sin \pi n$ — собственные функции, $n = 1, 2, ...$

5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Общие положения

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные.

Решением системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций $x_1(t),...,x_n(t)$, которые при подстановке в каждое из уравнений превращают его в тождество.

В общем виде система первого порядка записывается как

$$\begin{cases} F_1(t,x_1,x_1',...,x_n,x_n')=0 \\ .... \\ F_n(t,x_1,x_1',...,x_n,x_n')=0 \end{cases}$$

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} x_1'=f_1(t,x_1,x_2,...,x_n) \\ .... \\ x_n'=f_n(t,x_1,x_2,...,x_n) \end{cases}$$

Нормальная система уравнений может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы. Покажем это ещё раз на примере системы трёх уравнений.

Пример 21

Привести к дифференциальному уравнению третьего порядка нормальную систему трёх линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=z \\ y'=3x \\ z'=y-2z-x \end{cases}.$$

Решение

Продифференцируем первое уравнение:

$$x''=z'=y-2z-x=y-2x'-x\,.$$

Продифференцировав ещё раз это равенство, получим требуемое:

$$x'''=y'-2x''-x'=3x-2x''-x',\ \ x'''+2x''+x'-3x=0.$$

Ответ: $x'''+2x''+x'-3x=0.$

Можно проделать такую операцию и в обратном порядке, т.е. из дифференциального уравнения n-го порядка

$$x^{(n)}=f\left(t,x,x',x'',...,x^{(n-1)}\right)$$

получить нормальную систему дифференциальных уравнений. Для этого введём новые функции:

$$x_1=x,\ \ x_2=x_1'=x',\ \ x_3=x_2'=x'',...,\ \ x_n=x_{n-1}'=x^{(n-1)},$$

после чего получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=x_3 \\ .... \\ x_n'=f(t,x_{1,}x_2,...,x_n) \end{cases}.$$

В следующем разделе мы рассмотрим простейшие системы линейных дифференциальных уравнений.

5.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами может быть решена следующим способом, основанным на составлении характеристического уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}.$$

Будем искать решение в виде экспонент, которые не меняются при дифференцировании:

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}, \quad \frac{dx}{dt} = \alpha k e^{kt}, \quad \frac{dy}{dt} = \beta k e^{kt}.$$

Подставляя это в систему, получим после сокращения на экспоненту следующую систему уравнений, в которой неизвестными являются три величины (α, β и k):

$$\begin{cases} \alpha k = \alpha a + \beta b \\ \beta k = \alpha c + \beta d \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} (a-k)\alpha + b\beta = 0 \\ c\alpha + (d-k)\beta = 0 \end{cases}. \tag{5.1}$$

Как известно из теории систем линейных уравнений, а это однородная система, кроме тривиального нулевого решения ($\alpha = 0,\ \beta = 0$), нетривиальное может быть только в том случае, когда определитель матрицы системы равен нулю (в этом случае получается бесчисленное множество решений):

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = (a-k)(d-k) - cb = k^2 - (a+d)k + (ad - cb) = 0.$$

Таким образом, для неизвестного параметра k получилось квадратное уравнение, которое, как и в случае линейного однородного ОДУ 2-го порядка, называется характеристическим. Определитель может быть записан сразу из заданной системы дифференциальных уравнений. Достаточно коэффициенты при x и y в системе записать в виде определителя, а затем к элементам в главной диагонали приписать $-k$.

После нахождения корней характеристического уравнения, а здесь опять могут быть три варианта ($D > 0$, $D = 0$, $D < 0$), найденные k подставляют в систему и находят α и β.

Пример 22

Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}.$$

Решение

Записываем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-k & 5 \\ 4 & -3-k \end{vmatrix} = (-2-k)(-3-k) - 20 = k^2 + 5k - 14 = 0.$$

Его корнями будут: $k_1 = 2$, $k_2 = -7$.

Теперь $k = 2$ подставляем в систему (5.1) и получаем следующее:

$$\begin{cases}(-2-2)\alpha+5\beta=0\\4\alpha+(-3-2)\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\alpha+5\beta=0\\4\alpha-5\beta=0\end{cases}\Rightarrow 4\alpha=5\beta\Rightarrow\alpha=5C_1,\beta=4C_1.$$

Заметим, что в системе уравнения идентичны, что и должно было быть для того, чтобы система имела бесконечное множество решений. В следующих примерах ситуация будет аналогичной.

Таким образом, мы нашли первое решение данной системы: $x_1 = 5C_1e^{2t}$, $y_1 = 4C_1e^{2t}$.

Второе решение найдём, полагая $k = -7$:

$$\begin{cases}(-2+7)\alpha+5\beta=0\\4\alpha+(-3+7)\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\alpha+5\beta=0\\4\alpha+4\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=-\beta\Rightarrow\alpha=C_2,\beta=-C_2.$$

А значит, второе решение таково:

$$x_2 = C_2e^{-7t},\ y_2 = -C_2e^{-7t}.$$

В силу линейности системы сумма решений также является решением, и это будет общее решение заданной системы дифференциальных уравнений:

$$x = 5C_1e^{2t} + C_2e^{-7t}, y = 4C_1e^{2t} + C_2e^{-7t}.$$

Ответ: $x = 5C_1e^{2t} + C_2e^{-7t}, y = 4C_1e^{2t} + C_2e^{-7t}$.

Пример 23

Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-4y\\\dfrac{dy}{dt}=x+6y\end{cases}.$$

Решение

Записываем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-k & -4\\1 & 6-k\end{vmatrix}=(2-k)(6-k)+4=k^2-8k+16=(k-4)^2=0.$$

Корень получился кратный: $k_1 = k_2 = 4$.

В этом случае, по аналогии с дифференциальным уравнением 2-го порядка, решение системы приходится искать в виде

$$x=(\alpha+\varphi t)e^{4t},\ \frac{dx}{dt}=(4\alpha+4\varphi t+\varphi)e^{4t},\ y=(\beta+\psi t)e^{4t},\ \frac{dy}{dt}=(4\beta+4\psi t+\psi)e^{4t}.$$

После подстановки этих выражений в систему и сокращения на экспоненту получим новую систему уравнений

$$\begin{cases}2\alpha+2\varphi t-4\alpha-4\varphi t-\varphi-4\beta-4\psi t=0\\\alpha+\varphi t+6\beta+6\psi t-4\beta-4\psi t-\psi=0\end{cases},$$

$$\begin{cases}(-2\alpha-\varphi-4\beta)+(-2\varphi-4\psi)t=0\\(\alpha+2\beta-\psi)+(\varphi+2\psi)t=0\end{cases}.$$

Поскольку эти равенства должны выполняться при любых значениях переменной t, то, значит, неизвестные параметры должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} -2\alpha-\varphi-4\beta=0 \\ -2\varphi-4\psi=0 \\ \alpha+2\beta-\psi=0 \\ \varphi+2\psi=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi=-2\psi \\ \alpha+2\beta=\psi \end{cases} \Rightarrow \varphi \begin{cases} \psi=C_2 \\ \varphi=-2C_2 \\ \beta=C_1 \\ \alpha=C_2-2C_1 \end{cases}.$$

Таким образом, получаем ответ.

Ответ: $x=(C_2-2C_1-2C_2t)e^{4t}$, $y=(C_1+C_2t)e^{4t}$.

Пример 24

Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=8x-13y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-2y \end{cases}.$$

Решение

Записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 8-k & -13 \\ 2 & -2-k \end{vmatrix}=(8-k)(-2-k)+26=k^2-6k+10=0.$$

Корни равны: $k_{1,2}=3\pm\sqrt{9-10}=3\pm i$, они отличаются только знаками мнимых частей (корни комплексно сопряжённые).

Возьмём один из этих корней ($3+i$) и подставим его в систему, получим

$$\begin{cases} (8-3-i)\alpha-13\beta=0 \\ 2\alpha+(-2-3-i)\beta=0 \end{cases}, \begin{cases} (5-i)\alpha-13\beta=0 \\ 2\alpha-(5+i)\beta=0 \end{cases}.$$

После умножения первого уравнения на 2, а второго — на ($5-i$) увидим, что уравнения системы одинаковы:

$$\begin{cases} 2(5-i)\alpha-26\beta=0 \\ 2(5-i)\alpha-(5+i)(5-i)\beta=2(5-i)\alpha-26\beta=0 \end{cases}$$

$$(5-i)\alpha=13\beta, \underline{\alpha=13,\ \beta=5-i}.$$

Теперь можно записать решение исходной системы:

$$x=13e^{(3+i)t}=13e^{3t}(\cos x+i\sin x),$$

$$y=(5-i)e^{(3+i)t}=e^{3t}(5-i)\cdot(\cos x+i\sin x)=e^{3t}[(5\cos x+\sin x)+i(5\sin x-\cos x)].$$

Решения получились комплексными, и если их подставить в заданную систему, то отдельно должны быть равны действительные и мнимые части. Поэтому в случае комплексно сопряжённых корней характеристического уравнения первым решением будут действительные части x и y, умноженные на константу C_1, вторым — мнимые части, умноженные на константу C_2. Окончательно, имеем следующее.

Ответ: $x=13e^{3t}(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $y=e^{3t}[C_1(5\cos x+\sin x)+C_2(5\sin x-\cos x)]$.

Вторым способом решения системы дифференциальных уравнений является приведение её к однородному ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим пример отыскания решения системы дифференциальных уравнений этим методом.

Пример 25

Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}.$$

Решение

Продифференцируем первое уравнение по переменной t и затем воспользуемся вторым уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + 4(x - 2y).$$

Выразив y из первого уравнения, подставим его в полученное:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4\left(x - \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}x\right) \Rightarrow x'' + x' - 6x = 0.$$

Для последнего уравнения записываем характеристическое уравнение: $k^2 + k - 6 = 0$, корни которого равны $k_1 = -3,\ k_2 = 2$. Значит, $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$. Поскольку $y = \frac{1}{4}\left(x' - x\right)$, а $x' = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t}$, то $y(t) = -C_1e^{-3t} + \frac{1}{4}C_2e^{2t}$, получаем решение.

Ответ: $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$, $y(t) = -C_1e^{-3t} + \frac{1}{4}C_2e^{2t}$.

6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если дифференциальное уравнение не поддаётся аналитическому решению, то можно найти приближённое решение с помощью численных методов. Приведём два из них.

Простейшим численным методом является метод Эйлера. С его помощью найдём приближённое решение ОДУ первого порядка с начальным условием на отрезке $[x_o, x]$:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 .$$

Данный отрезок разобьём на *n* равных отрезков длиной *h*: $h = \dfrac{x - x_0}{n}$. В точке $x_1 = x_0 + h$ функция приближённо равна (вспомним определение дифференциала)

$$y(x_0 + h) \equiv y_1 \approx y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_{0,} y_0) .$$

Геометрически это означает, что приращение *y* берётся на касательной к графику функции, а не на самой кривой.

На следующем шаге опять приращение функции берём на касательной:

$$y(x_0 + 2h) \equiv y_2 \approx y_1 + hy'(x_1) = y_1 + hf(x_{1,} y_1) .$$

Этот процесс продолжаем до последней точки $x = x_0 + (n-1)h$. И в результате получаем набор точек на плоскости $(x_{0,} y_0), \ldots, (x, y_{n-1})$, через которые нужно плавно провести кривую, являющуюся графическим решением заданного уравнения.

Этот метод быстро накапливает ошибки даже при очень мелком шаге *h*. Более точным и часто применяемым считается метод Рунге — Кутта. Приведём конечные формулы для расчёта последовательных значений искомой функции:

$$y_{i+1} = y_i + h\overline{f}(x_i, y_i) ,$$

где $\overline{f} = \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, $k_1 = f(x_i, y_i)$,

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \; k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \; k_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right).$$

Написав по этим формулам программу, можно приближенно решать дифференциальные уравнения.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x),\ x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\ t > 0, \tag{7.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x^0. \tag{7.2}$$

Фазовым пространством системы является пространство R^n. Решение системы (7.1), (7.2)

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(t),\ \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_n = \tilde{x}_n(t)$$

определяет закон движения точки в пространстве R^n , t интерпретируется как время, производные функций $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t)$ задают координаты скорости точки в момент времени.

Исследование на устойчивость решения $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_n(t))$ системы уравнений (7.1), (7.2) с помощью замены переменных $y_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i(t),\ i = 1, 2, ..., n$ можно свести к исследованию на устойчивость тривиального решения, которое может быть проведено с помощью второго метода А.М. Ляпунова.

Теорема Ляпунова об устойчивости

Если существует дифференцируемая функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности начала координат двум условиям:

1) функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, причём в указанной окрестности $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ только в начале координат;
2) производная при $t \geq t_0 = 0$ $\dfrac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0,$

то точка покоя $(x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0)$ устойчива.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости

Если существует дифференцируемая функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности начала координат двум условиям:

1) функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, причём в указанной окрестности $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ только в начале координат;
2) производная $\dfrac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0,$

и для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует константа $c(\delta) < 0$ такая, что вне δ-окрестности начала координат и $t \geq T \geq t_0 = 0$

$$\frac{dv}{dt} \leq c < 0,$$

то точка покоя $(x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0)$ асимптотически устойчива.

Пример 26

Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 x_2^2 x_3^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2 x_2 x_3^2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1^2 x_2^2 x_3.$$

Решение

Функция $v(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ является функцией Ляпунова для рассматриваемой задачи. Действительно, она удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1) функция $v\left(x_1, x_2, x_3 \right) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ неотрицательна в окрестности начала координат, и $v(x_1, x_2, x_3) = 0$ только в начале координат;
2) производная $\dfrac{dv}{dt} = -8x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2^2 x_3^2 = -4x_1^2 x_2^2 x_3^2 \leq 0.$

Следовательно, тривиальное решение системы устойчиво.

Пример 27

Исследовать на асимптотическую устойчивость тривиальное решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 - 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Решение

Функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости Ляпунова для рассматриваемой задачи. Действительно,

1) функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ неотрицательна в окрестности начала координат, и $v(x_1, x_2) = 0$ только в начале координат;
2) производная $\dfrac{dv}{dt} = 2x_1(-x_1^3 - 2x_2) + 2x_2(2x_1 - x_2^3) = -2x_1^4 - 2x_2^4 \leq 0.$ Вне δ-окрестности (δ > 0) начала координат $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \delta \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq \delta^2 \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 \geq \delta^4.$ Учитывая последнее неравенство, имеем $\delta^4 \leq x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \leq 2x_1^4 + 2x_2^4$, и, таким образом, вне δ-окрестности начала координат

$$\frac{dv}{dt} \leq c = -\delta^4.$$

Следовательно, тривиальное решение системы асимптотически устойчиво.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти общее решение ДУ

   1) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = \dfrac{2y^2}{x}$. Ответ: $y = \dfrac{\ln x}{C - \ln^2 x}$, $y = 0$

   2) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$. Ответ: $y = -C_1 \cos x + C_2 - x$

   3) $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$. Ответ: $y = C_1 + C_2 e^x + (e^x + 1)\ln(1 + e^{-x})$

   4) $y'' + y = 4\sin x$. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x$

2. Решить задачу Кош

   1) $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$, $y(0) = 1$. Ответ: $y = \dfrac{e^{-x^2}}{1-x}$

3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}.$$

Ответ:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$$
$$y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Знания и умения, приобретённые обучающимися в результате изучения дисциплины, будут использованы при изучении последующих дисциплин и написании ВКР. В результате изучения данного курса должно укрепиться целостное представление об основных понятиях и методах, о месте и роли математики в различных областях человеческой деятельности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. — 12-е изд. / Д. Т. Письменный. — Москва : Айрис-пресс, 2014. — 603 с. — ISBN 978-5-8112-5257-2.
2. Коновалова Л.В. Дифференциальные уравнения и их применение в технике / Л.В. Коновалова.— Электрон. текстовые данные.— Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский строительный университет, 2015.— 57 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49956.html.— ЭБС «IPRbooks».
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. Учебник. Изд. 8-е / Л.Э. Эльсгольц. — Москва : Изд-во ЛКИ, 2020. — 312 с. — ISBN 9785382018492.