НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математики

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Методические указания
к практическим занятиям и самостоятельной работе
для обучающихся по направлению подготовки
01.06.01 Математика и механика

Составители:
Т.С. Алероев, О.А. Васильева, Е.А. Ларионов

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2018

УДК 51
ББК 22.1
Д50

Рецензент — доктор физико-математических наук *Н.Н.Рогачева*,
доцент кафедры прикладной математики НИУ МГСУ

Д50 **Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление** [Электронный ресурс] : методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика / сост. : Т.С. Алероев, О.А. Васильева, Е.А. Ларионов ; М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т, каф. прикладной математики. — Электрон. дан. и прогр. (0,95 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2018. — Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS. — Загл. с титул. экрана.

Приведен материал по следующим вопросам: обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, динамические системы и оптимальное управление.

Для подготовки кадров высшей квалификации всех форм обучения по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика.

Учебное электронное издание

Редактор *Н.А. Котова*
Корректор *В.К. Чупрова*
Верстка и дизайн титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2007, ПО Adobe Acrobat Pro

Подписано к использованию 15.10.2018 г. Объем данных 0,95 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» является формирование углубленного уровня освоения компетенций аспиранта в области исследования и решения задач фундаментальной и прикладной математики, механики и естествознания.

Для успешного изучения дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения по программам специалитета или бакалавриата и магистратуры следующих дисциплин: «Линейная алгебра», «Математический анализ», «Функциональный анализ» и «Дифференциальные уравнения».

В результате изучения данного курса у аспиранта должно сформироваться целостное представление об основных понятиях и методах, о месте и роли математики в различных областях науки и техники.

В методических указаниях рассмотрены следующие разделы курса: обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, динамические системы и оптимальное управление. Кратко изложены теоретические положения и примеры решения типовых задач.

Методические указания предназначены для аспирантов, обучающихся по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, а также для специалистов в различных областях естественных наук, применяющих математические методы исследования.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x); \tag{1}$$

соответствующее ему однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

или кратко

$$L[y] = 0, \tag{2}$$

где $L[y]$ — линейный дифференциальный оператор.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Если линейно независимые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения (2) с непрерывными на отрезке $a \le x \le b$ коэффициентами $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \ne 0$$

для любого $x \in [a, b]$.

Теорема 2. Общим решением линейного однородного уравнения (2) при $a \le x \le b$ с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ является линейная комбинация n линейно независимых решений (2) $y_i(x)$:

$$y_{\text{обод}}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i\,(x),$$

где c_i — произвольные постоянные. Система $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ называется фундаментальной системой уравнения (2).

Теорема 3. Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) при $a \le x \le b$ с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения $y_{\text{обод}}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$, соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения $y_{\text{ч}}(x)$ неоднородного уравнения (1).

Если известно общее решение однородного уравнения (2), то частное решение неоднородного уравнения находят методом вариации постоянных.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x).$$

Функции $c_i(x)$ находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Решение. Общее решение однородного уравнения

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Частное решение неоднородного уравнения найдем методом вариации постоянных. Варьируем коэффициенты c_1, c_2:

$$y(x) = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x,$$

$c_1(x)$, $c_2(x)$ определим из системы

$$\begin{cases} c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = 0; \\ c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \sin x = \dfrac{1}{\sin x}; \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad c_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + \widetilde{c}_1;$$

$$c_2'(x) = -c_1' \frac{\sin x}{\cos x} = -1, \quad c_2'(x) = -\int dx = x + \widetilde{c}_2;$$

$$y_{\text{он}}(x) = \widetilde{c}_1 \sin x + \widetilde{c}_2 \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x \cos x.$$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть в некоторой n-мерной области G задано дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с вещественными коэффициентами $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ для любого x из G:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{x_i x_j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + c(x)u = f(x). \tag{3}$$

Уравнение (3) называется эллиптическим в точке x^0 из области G, если все n собственных значений матрицы $A(x^0) = \|a_{ij}(x^0)\|$ положительны (отрицательны). Уравнение называется эллиптическим на множестве, принадлежащем области G, если оно эллиптично в каждой точке этого множества.

Уравнение (3) называется гиперболическим в точке x^0 из области G, если число положительных (отрицательных) собственных значений матрицы $A(x^0)$ равно n–1 и одно собственное значение матрицы отрицательно (положительно). Уравнение называется гиперболическим на множестве, принадлежащем области G, если оно гиперболично в каждой точке этого множества.

Уравнение (3) называется параболическим в точке x^0 из области G, если число положительных (отрицательных) собственных значений матрицы $A(x^0)$ меньше n, и остальные собственные значения матрицы равны нулю. Уравнение называется параболическим на множестве, принадлежащем области G, если оно является параболическим в каждой точке этого множества.

Пример 2. Определить тип уравнения Чаплыгина ($n = 2$):

$$u_{x_1x_1} + x_1 u_{x_2x_2} = f(x_1, x_2)$$

в двумерной области $G = \{x = (x_1, x_2) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$.

Решение. Матрица $A(x)$ имеет вид

$$A(x) = A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Определим собственные значения матрицы. Собственные значения равны: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = x_1$.

При $x_1 < 0$ одно собственное число матрицы положительно и одно отрицательно, таким образом, мы имеем n–1 положительных собственных значений и одно отрицательное. Следовательно, на множестве

$$\{x : x_1 < 0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$$

уравнение имеет гиперболический тип.

При $x_1 > 0$ все собственные числа положительны. Отсюда следует, что на множестве

$$\{x : x_1 > 0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$$

уравнение имеет эллиптический тип.

При $x_1 = 0$ одно собственное значение положительно, другое равно нулю. Таким образом, на множестве

$$\{x : x_1 = 0, x_2^2 < 1\}$$

уравнение имеет параболический тип.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Пусть (X, d) — метрическое пространство с метрикой d и $\{f^t\}$ — множество непрерывных преобразований в себя, параметризованное индексом t, который пробегает множество неотрицательных действительных чисел. При этом f^t непрерывно по t и $f^{t_1+t_2} = f^{t_1} \cdot f^{t_2}$ для любых неотрицательных t_1 и t_2.

Преобразование f^t называется отображением сдвига, X — фазовым пространством, $\{f^t\}$ — динамической системой. Образ начальной точки при сдвигах на любое $t > 0$ называется фазовой кривой или траекторией динамической системы.

Примером динамической системы является задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x),\ x(t) = (x_1(t), (x_2(t), ..., x_n(t)), t > 0 \qquad (4)$$

с начальным условием

$$x(0) = x^0. \qquad (5)$$

Множество преобразований $\{f^t\}$ пространства R^n определяется решением системы (4), (5). Фазовым пространством системы является пространство R^n. Решение системы (4), (5) $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ определяет закон движения точки в пространстве R^n, t интерпретируется как время, производные функций $x_i = x_i(t)$ задают координаты скорости точки в момент времени t.

Состояния равновесия динамической системы относятся к простейшим аттракторам. Координаты состояния равновесия находят из системы уравнений:

$$F(x) = 0.$$

Исследование на устойчивость решения $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), (\tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_n(t))$ системы уравнений (4), (5) с помощью замены переменных $y_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ можно свести к исследованию на устойчивость тривиального решения.

Исследование на устойчивость тривиального решения системы (4), (5) может быть проведено с помощью второго метода А.М. Ляпунова.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если существует дифференцируемая функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности начала координат двум условиям:

1) функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, причем в указанной окрестности $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ только в начале координат;

2) производная при $t \geq t_0 = 0$ $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$, то точка покоя $(x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0)$ устойчива.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если существует дифференцируемая функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности начала координат двум условиям:

1) функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, причем в указанной окрестности $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ только в начале координат;

2) производная $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$, и для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует константа $c(\delta) < 0$ такая, что вне δ-окрестности начала координат и $t \geq T \geq t_0 = 0$:

$$\frac{dv}{dt} \leq \mathrm{c} < 0,$$

то точка покоя $(x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0)$ асимптотически устойчива.

Пример 3 . Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 x_2^2 x_3^2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2 x_2 x_3^2;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1^2 x_2^2 x_3.$$

Решение. Функция $v(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ является функцией Ляпунова для рассматриваемой задачи. Действительно, она удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1) функция $v(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 0$ неотрицательна в окрестности начала координат, и $v(x_1, x_2, x_3) = 0$ только в начале координат;

2) производная $\frac{dv}{dt} = -8x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1^2x_2^2x_3^2 = -4x_1^2x_2^2x_3^2 \le 0$.

Следовательно, тривиальное решение системы устойчиво.

Пример 4. Исследовать на асимптотическую устойчивость тривиальное решение системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1^3 - 2x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2^3.$$

Решение. Функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости Ляпунова для рассматриваемой задачи. Действительно,

1) функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \ge 0$ неотрицательна в окрестности начала координат и $v(x_1, x_2) = 0$ только в начале координат;

2) производная $\frac{dv}{dt} = 2x_1(-x_1^3 - 2x_2) + 2x_2(2x_1 - x_2^3) = -2x_1^4 - 2x_2^4 \le 0$. Вне δ-окрестности (δ > 0) начала координат $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ge \delta \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \ge \delta^2 \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 \ge \delta^4$. Учитывая последнее неравенство, имеем $\delta^4 \le x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 \le 2x_1^4 + 2x_2^4$, и, таким образом, вне δ-окрестности начала координат

$$\frac{dv}{dt} \le c = -\delta^4,$$

Следовательно, тривиальное решение системы асимптотически устойчиво.

Теорема Четаева о неустойчивости. Если существует дифференцируемая функция

$$v = v(x_1, x_2, ..., x_n),$$

удовлетворяющая в некоторой замкнутой окрестности начала координат двум условиям:

1) в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область G, в которой функция $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, причем $v = v(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ на лежащей в указанной окрестности части границы области G;

2) в области G производная $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, причем в области $\widetilde{G} = \{x : v \ge \alpha > 0\}$ производная $\frac{dv}{dt} \ge \beta > 0$, то точка покоя $(x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0)$ системы неустойчива.

Пример 5. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^3 + x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2^3.$$

Решение. Функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева. Действительно,

1) функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 > 0$ положительна в сколь угодно малой окрестности начала координат при $|x_1| > |x_2|$ и $v(x_1, x_2) = 0$ при $|x_1| = |x_2|$;

2) производная $\frac{dv}{dt} = 2x_1(x_1^3 + x_2) - 2x_2(x_1 + x_2^3) = 2x_1^4 - 2x_2^4 > 0$ при $|x_1| > |x_2|$, при $v(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \ge \alpha > 0$ производная $\frac{dv}{dt} = 2(x_1^4 - x_2^4) = 2(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \ge 2\alpha^2 = \beta > 0$.

Следовательно, тривиальное решение системы неустойчиво.

4. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Пусть поведение модели объекта управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)), \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)), \\ \ldots, \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)), \end{cases}$$

которую в векторной форме записывают следующим образом:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

здесь x — вектор состояния системы, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$, R^n — n-мерное евклидово пространство; u — вектор управления, $u = (u_1, \ldots, u_q)^T \in U \subseteq R^q$; U — некоторое заданное множество допустимых значений управления; t — время, $t \in T = [t_0, t_1]$ — интервал времени функционирования системы; $f(t, x, u)$ — непрерывная вместе со своими частными производными вектор-функция,

$$f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \ldots, f_n(t, x, u)^T : T \times R^n \times U \to R^n.$$

Схематично информацию о текущем состоянии системы можно изобразить в виде блок-схемы (рис. 1)

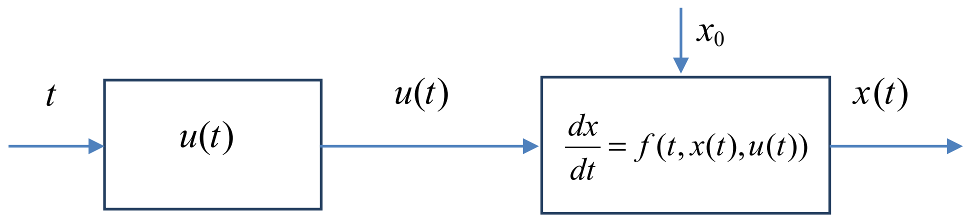

Рис. 1. Текущее состояние системы

Момент начала процесса t_0 задан, а время окончания процесса t_1 определяется моментом достижения точкой $(t, x(t))$ некоторой заданной поверхности $\Gamma \subseteq R^{n+1}$:

$$\Gamma = \{(t_1, x) \mid \Gamma_i(t_1, x) = 0,\ i = 1, \ldots, l : t_1 \in (t_0, \infty), x \in R^n\},$$

т.е. в момент t_1 должны выполняться условия

$$\Gamma_i(t_1, x(t_1)) = 0,\ i = 1, \ldots, l,$$

где $0 \le t \le n + 1$, при $l = n + 1$ множество Γ представлено точкой в пространстве R^{n+1}, функции $\Gamma_i(t_1, x)$ — непрерывно дифференцируемы; система векторов

$$\{\partial\Gamma_i(t_1, x)/\partial x_1, \ldots, \partial\Gamma_i(t_1, x)/\partial x_n, \partial\Gamma_i(t_1, x)/\partial x_1\},\ i = 1, \ldots, l,$$

линейно независима $\forall (t, x) \in R^{n+1}$.

Начальное состояние системы в R^n зададим условием $x(t_0) = x_0$.

Определим множество допустимых процессов $D(t_0, x_0)$ как множество троек $d = (t_1, x(.), u(.))$, которые включают момент окончания процесса t_1, траекторию $x(.)$ и управление $u(.)$ (где $\forall t \in T$, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in U$, функции $x(.)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а $u(.) \in U_0$ кусочно-непрерывны), удовлетворяющие уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$ почти всюду на множестве T и условию

$$\Gamma = \{(t_1, x) \mid \Gamma_1(t_1, x) = 0,\ i = 1, ..., l : t_1 \in (t_0, \infty), x \in R^n\}.$$

На множестве $D(t_0, x_0)$ определим функционал качества управления

$$I(d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt + F(t_1, x(t_1)), \tag{6}$$

где $f^0(t,x(t),u(t))$и $F(t_1, x(t_1))$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции, причем $f^0(t,x(t),u(t))$ называется интегральным членом, а $F(t_1, x(t_1))$ — терминальным членом.

Задача оптимального управления ставится следующим образом: найти такую тройку

$$d^* = (t_1^*,\ x^*(.),\ u^*(.)) \in D(t_0, x_0),$$

что

$$I(d^*) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d). \tag{7}$$

Задача (7) с функционалом (6) называется задачей Больца. Если в функционале (6) терминальный член$F(t_1, x(t_1))$ равен нулю, то такая задача называется задачей Лагранжа. Если интегральный член $f^0(t,x(t),u(t))$ равен нулю, то задача (7) называется задачей Майери.

Для решения задачи управления нужно воспользоваться так называемым принципом максимума, который утверждает, что если на тройке $d^* = (t_1^*,\ x^*(.),\ u^*(.)) \in D(t_0, x_0)$ достигается минимум функционала, то существует такая вектор-функция $\Psi(t) = (\Psi_1(t), ..., \Psi_n(t))^T$, при которой:

1) в каждой точке непрерывности управления $u^*(t)$ функция $H(t, \Psi(t),\ x^*(t), u)$ (называемая гамильтонианом) достигает максимума по управлению, т.е.

$$\max_{u \in U} H(t, \Psi(t),\ x^*(t), u) = H(t, \Psi(t),\ x^*(t),\ u^*(t)),$$

где

$$H(t, \Psi, x, u) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j f_1(t, x, u) - f^0(t, x, u);$$

2) выполняется условие трансверсальности

$$\delta F(t_1^*) - H(t_1^*)\,\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(t_1^*)\,\delta x_j = 0$$

при любых δt_1 и δx_i, удовлетворяющих системе

$$\delta\Gamma_i(t_1^*,\ x^*(t_1^*)) = 0,\ i = 1, ..., l,$$
$$\Gamma_i(t_1^*,\ x^*(t_1^*)) = 0,\ i = 1, ..., l,$$

где

$$H(t_1^*) = H(t_1^*, \Psi(t_1^*),\ x^*(t_1^*),\ u^*(t_1^*)),$$
$$F(t_1^*) = F(t_1^*,\ x^*(t_1^*)).$$

Вариации определяются следующим образом:

$$\delta F(t_1^*) = \delta F(t_1^*,\ x^*(t_1^*)) = \frac{\partial F(t_1^*,\ x^*(t_1^*))}{\partial t_1}\,\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(t_1^*,\ x^*(t_1^*))}{\partial x_j}\delta x_j,$$

$$\delta\Gamma_j(t_1^*,\ x^*(t_1^*)) = \frac{\partial \Gamma_j(t_1^*,\ x^*(t_1^*))}{\partial t_1}\,\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_j(t_1^*,\ x^*(t_1^*))}{\partial x_j}\,\delta x_j;$$

3) удовлетворяется система уравнений

$$\dot{x}_j^*(t) = \frac{\partial H(t, \Psi(t),\ x^*(t), u(t))}{\partial \Psi_j} = f_j(t,\ x^*(t),\ u^*(t)),\ \ x_j^*(t_0) = x_{0j},\ \ j = 1, ..., n, \tag{8}$$

$$\dot{\Psi}_j(t) = -\frac{\partial H(t,\ \Psi(t),\ x^*(t),\ u^*(t))}{\partial x_j},\ \ j = 1, ..., n. \tag{9}$$

В формулировке утверждения функции $\Psi_1(t), ..., \Psi_n(t)$ называются вспомогательными переменными, а система (8)–(9) — системой канонических уравнений.

Решением задачи управления является пара $(x^*(.), u^*(.))$ — оптимальная траектория и управление.

Краткий алгоритм применения принципа максимума

1) составляется гамильтониан

$$H(t, \Psi, x, u) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u);$$

2) находится структура оптимального управления

$$u^*(t) = u^*(t, \Psi(t), x(t))$$

из условия максимума, составленного на первом шаге гамильтониана;

3) составляется система канонических уравнений (8)–(9) с заданными в задаче условиями;

4) из условий трансверсальности находятся недостающие краевые условия для уравнений составленной системы;

5) решается краевая задача для системы канонических уравнений;

6) определяется тройка $(t_1^*\ x^*(.),\ u^*(.))$, на которой достигается экстремум функционала.

Пример 6. Имеется модель управления

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/2,$$

где $x \in R;\ u \in R;\ t \in [0,1]$ и функционал

$$I = \int_0^1 [u^2(t) + x^2(t)]dt \to \min.$$

Найти оптимальную пару $(x^*(.), u^*(.))$, на которой достигается минимум функционала

$$I = \int_0^1 [u^2(t) + x^2(t)]dt.$$

Решение. Так как в задаче отсутствует терминальный член, то эта задача является задачей Лагранжа.

В нашем случае $f(t, x, u) = u$ (это следует из соотношений $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $\dot{x}(t) = u(t)$), $f^0(t, x, u) = u^2 + x^2$ (это следует из соотношений $I(d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt$ и $I = \int_0^1 [u^2(t) + x^2(t)]\,dt$).

Далее очевидно, что

$$\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 1 = 0, \Gamma_2(t_1, x(t_1)\,) = x(t_1) - 1/2 = 0.$$

В соответствии с алгоритмом составим гамильтониан

$$H(t, \Psi, x, u) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u).$$

В нашем случае $n = 1$ и

$$H(t, \Psi, x, u) = \sum_{j=1}^{1} \Psi_j f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u) = \Psi_1 f_1(t, x, u) - f^0(t, x, u) =$$
$$= \Psi f_1(t, x, u) - f^0(t, x, u) = \Psi u - u^2 - x^2$$

(выше уже подчеркивалось, что $f_1(t, x, u) = u$, а $f^0(t, x, u) = u^2 + x^2$).

Находим максимум составленного гамильтониана по u. Из необходимых условий безусловного экстремума получаем

$$[H(t, \Psi, x, u)]'_u = [\Psi u - u^2 - x^2]'_u = \Psi(t) - 2u = 0.$$

Получаем уравнение $\Psi(t) - 2u = 0$. Решая это уравнение, получим $u^* = \Psi(t)/2$. Найденное решение обеспечивает максимум гамильтониана $H(t, \Psi, x, u)$ по u (так как удовлетворяются достаточные условия экстремума

$$[H(t, \Psi, x, u)]''_u = [\Psi u - u^2 - x^2]''_u = -2 < 0).$$

Из условий (8)–(9), имеем

$$\dot{x}(t) = u^*(t) = \Psi(t)/2, \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = 1/2,$$

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{-\partial H(t, \Psi(t), x, u^*)}{\partial x} = 2x(t).$$

Таким образом, мы получили следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \Psi(t)/2 \\ \dot{\Psi}(t) = 2x(t) \end{cases},$$

$x(0) = 0, \;\; x(1) = 1/2$. Последняя система эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \Psi(t) = 2x'(t) \\ \dot{\Psi}(t) = 2x''(t) \end{cases}.$$

Полученная система эквивалентна уравнению

$$2x''(t) = 2x(t).$$

Итак, мы получили следующую краевую задачу:

$$x''(t) = x(t), \tag{10}$$

$$x(0) = 0, \;\; x(1) = 1/2. \tag{11}$$

Для ее решения составим характеристическое уравнение для уравнения (10) $k^2 - 1 = 0$. Решение этого уравнения имеет вид $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. Из этого следует, что общее решение уравнения (10) имеет вид $x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}$. Чтобы найти C_1, C_2, удовлетворим общее решение уравнения (10) краевым условиям (11):

$$\begin{cases} x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{-0} = 0 \\ x(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} = 1/2 \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы имеем $C_1 = -C_2$. Подставляя полученное выражение во второе уравнение системы, получаем $C_1(e - e^{-1}) = 1/2$, откуда $C_1 = \dfrac{1}{2(e - e^{-1})}$. Так как $C_1 = -C_2$, то $C_2 = \dfrac{-1}{2(e - e^{-1})}$. Таким образом, оптимальная траектория имеет вид

$$x^*(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} = \frac{1}{2(e - e^{-1})}\left(e^t - e^{-t}\right) = \frac{e}{2(e^2 - 1)}\left(e^t - e^{-t}\right),$$

а оптимальное управление

$$u^*(t) = \left[\frac{e}{2(e^2 - 1)}\left(e^t - e^{-t}\right)\right]' = \frac{e}{2(e^2 - 1)}\left(e^t + e^{-t}\right).$$

Библиографический список

Пантелеев А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс : учебное пособие с мультимедиа сопровождением / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков. — Электрон. текстовые данные. — Москва : Логос, 2010. — 383 с.

Оптимальное управление в примерах и задачах / [Пантелеев А.В. и др.]. — Москва : МАИ, 1996. —210 с.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения : учебник / Л.Э. Эльсгольц. — Изд. 8-е. — Москва : ЛКИ, 2014. — 312 с.

Васильева О.А. Краткое сообщение о DYNSYS 1.2.3 // Математика. Компьютер. Образование : сборник трудов XII международной конференции / под общ. ред. Г.Ю. Ризниченко. — Ижевск : Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — Т. 2. — С. 424–426.

Васильева О.А. Программный модуль DYNSYS 1.3.2. Математика. Компьютер. Образование : сборник научных тезисов. 2006. — С. 26.

Васильева О.А. Краткое сообщение о программном модуле DYNSYS 1.3.3 Математика. Компьютер. Образование : сборник трудов XVI международной конференции / под общ. ред. Г.Ю. Ризниченко. — Ижевск : Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — Т. 1. — С. 218–219.