а затем уточненные значения $y_{1,i+1}$ и $y_{2,i+1}$

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + 0.5h(y_{2,i} + \tilde{y}_{2,i+1}) \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + 0.5h\left(x_i y_{2,i} + x_{i+1}\tilde{y}_{2,i+1} - 4(y_{1,i} + \tilde{y}_{1,i+1}) + (0.2k-1)(x_i^2 + x_{i+1}^2) + 0.4k\right), i = 0,1,...,n. \end{cases}$$

Пример выполнения задания 2

Ручной счет

В задаче Коши на отрезке $x \in [0;1]$

$$y'' - xy' + 4y = 9x^2 + 10; \; y(0) = 0; \; y'(0) = 0$$

сделаем замену $y_1 = y; \; y_2 = y'$ и перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = xy_2 - 4y_1 + 9x^2 + 10 \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = 0; \; y_2(0) = 0.$$

Промежуточные значения функций $\tilde{y}_{1,i+1}$ и $\tilde{y}_{2,i+1}$ будем вычислять по формулам

$$\begin{cases} \tilde{y}_{1,i+1} = y_{1,i} + hy_{2,i} \\ \tilde{y}_{2,i+1} = y_{2,i} + h\left(x_i y_{2,i} - 4y_{1,i} + 9x_i^2 + 10\right), \end{cases}$$

а уточненные значения $y_{1,i+1}$ и $y_{2,i+1}$ по формулам

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + 0.5h(y_{2,i} + \tilde{y}_{2,i+1}) \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + 0.5h\left(x_i y_{2,i} + x_{i+1}\tilde{y}_{2,i+1} - 4(y_{1,i} + \tilde{y}_{1,i+1}) + 9(x_i^2 + x_{i+1}^2) + 20\right), \end{cases} \quad i = 0,1,...,n$$

Разбив отрезок $[0;1]$ на $n = 4$ части, получим $n+1 = 5$ точек разбиения с шагом $h = 1/4 = 0.25$, в каждой точке разбиения вычисляем значения функций $\tilde{y}_{1,i+1}$, $\tilde{y}_{2,i+1}$, $y_{1,i+1}$, $y_{2,i+1}$. Все значения заносим в таблицу.

i	x_i	$\tilde{y}_{1,i}$	$\tilde{y}_{2,i}$	$y_{1,i}$	$y_{2,i}$	Точное решение y_i	Абсолютная погрешность $\lvert y_{1,i} - y_i \rvert$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.25	0	2.5	0.3125	2.6484	0.3122	0.0003
2	0.5	0.9746	4.9937	1.2678	5.2513	1.2448	0.023
3	0.75	2.5806	7.4448	2.8548	7.7674	2.7861	0.0686
4	1	4.7966	9.812	5.0522	10.1542	4.9167	0.1355

Ответ: $y_0 = 0, \; y_1 = 0.3125, \; y_2 = 1.2678 \; y_3 = 2.8548, \; y_4 = 5.0522 \; n = 8$.

Теперь разобьем отрезок $[0;1]$ на $n=8$ частей, получим $n+1=9$ точек разбиения с шагом $h=1/8=0.125$ и все результаты оформим в виде таблицы.

i	x_i	$\tilde{y}_{1,i}$	$\tilde{y}_{2,i}$	$y_{1,i}$	$y_{2,i}$	Точное решение y_i	Абсолютная погрешность $\lvert y_{1,i}-y_i \rvert$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.125	0	1.25	0.0781	1.2686	0.0781	0
2	0.25	0.2367	2.4983	0.3136	2.5327	0.3121	0.0014
3	0.375	0.6301	3.741	0.7057	3.7883	0.7015	0.0042
4	0.5	1.1792	4.974	1.2533	5.0311	1.2448	0.0085
5	0.625	1.8822	6.193	1.9548	6.2567	1.9404	0.0144
6	0.75	2.7369	7.3939	2.808	7.4609	2.7861	0.0218
7	0.875	3.7406	8.5721	3.81	8.6393	3.7793	0.0308
8	1	4.89	9.7234	4.9577	9.7877	4.9167	0.041

<u>*Ответ:*</u> $y_0=0,\ y_1=0.0781,\ y_2=0.3136,\ y_3=0.7057,\ y_4=1.2533,\ y_5=1.9548,\ y_6=2.808,$
$y_7=3.81,\ y_8=4.9577$.

Задание 3. Решение краевой задачи методом конечных разностей

<u>*Варианты задания*</u>

Решить краевую задачу методом конечных разностей

$$\begin{cases} y''-xy'+4y=(0.2k-1)x^2+0.2k, & x\in[0;1] \\ y(0)=0 \\ y(1)=0.1k-1/12, \end{cases}$$

где k — номер студента по журналу.

Аппроксимация производных первого и второго порядка с точностью $O(h^2)$, с использованием формулы $y'\approx\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$ и $y''\approx\dfrac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}$, приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} y_0=0 \\ \dfrac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}-x_i\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+4y_i=(0.2k-1)x_i^2+0.2k, \quad i=1,2,\ldots,n-1, \\ y_n=0.1k-1/12, \end{cases}$$

которую можно решить методом прогонки.

П р и м е р в ы п о л н е н и я з а д а н и я 3

<u>**Ручной счет**</u>

Решить краевую задачу методом конечных разностей

$$\begin{cases} y''-xy'+4y=9x^2+10, & x\in[0;1] \\ y(0)=0 \\ y(1)=59/12 \end{cases}$$

Разбив отрезок [0; 1] на n частей и в каждой точке разбиения заменяя $y'\approx\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$ и $y''\approx\dfrac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}$, получим систему линейный уравнений

$$\begin{cases} y_0=0 \\ \dfrac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}-x_i\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+4y_i=9x_i^2+10, \quad i=1,2,\ldots,n-1 \\ y_n=59/12, \end{cases}$$

или в виде

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ (2 + x_i h) y_{i-1} + (8h^2 - 4) y_i + (2 - x_i h) y_{i+1} = 2h^2 \left(9x_i^2 + 10 \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ y_n = 59/12 \end{cases}.$$

Разобьем отрезок $[0;1]$ на $n = 4$ части, получим $n+1 = 5$ точек разбиения с шагом $h = 1/4 = 0.25$, имеем

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ (2 + x_1 h) y_0 + (8h^2 - 4) y_1 + (2 - x_1 h) y_2 = 2h^2 \left(9x_1^2 + 10 \right) \\ (2 + x_2 h) y_1 + (8h^2 - 4) y_2 + (2 - x_2 h) y_3 = 2h^2 \left(9x_2^2 + 10 \right) \\ (2 + x_3 h) y_2 + (8h^2 - 4) y_3 + (2 - x_3 h) y_4 = 2h^2 \left(9x_3^2 + 10 \right) \\ y_4 = 59/12 \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет трехдиагональный вид, поэтому для ее решения применим метод прогонки. Все результаты сведем в таблицу.

i	a_i	b_i	c_i	d_i	P_i	Q_i	y_i	Точное решение y_i^*	$\lvert y_i - y_i^* \rvert$
0	0	–1	0	0	0	0	0	0	0
1	2.06	3.5	1.94	1.32	0.55	–0.38	0.3112	0.3122	0.0009
2	2.13	3.5	1.88	1.53	0.81	–1	1.2437	1.2448	0.0011
3	2.19	3.5	1.81	1.88	1.04	–2.35	2.7855	2.7861	0.0006
4	0	–1	0	4.92	0	4.92	4.9167	4.9167	0

Ответ: $y_0 = 0,\ y_1 = 0.3112,\ y_2 = 1.2437,\ y_3 = 2.7855,\ y_4 = 4.9167$.

При разбиении отрезка $[0;1]$ на $n = 8$ частей получим $n+1 = 9$ точек разбиения, шаг разбиения $h = 1/8 = 0.125$ и систему из 9 линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ (2 + x_1 h) y_0 + (8h^2 - 4) y_1 + (2 - x_1 h) y_2 = 2h^2 \left(9x_1^2 + 10 \right) \\ (2 + x_2 h) y_1 + (8h^2 - 4) y_2 + (2 - x_2 h) y_3 = 2h^2 \left(9x_2^2 + 10 \right) \\ (2 + x_3 h) y_2 + (8h^2 - 4) y_3 + (2 - x_3 h) y_4 = 2h^2 \left(9x_3^2 + 10 \right) \\ (2 + x_4 h) y_3 + (8h^2 - 4) y_4 + (2 - x_4 h) y_5 = 2h^2 \left(9x_4^2 + 10 \right) \\ (2 + x_5 h) y_4 + (8h^2 - 4) y_5 + (2 - x_5 h) y_6 = 2h^2 \left(9x_5^2 + 10 \right) \\ (2 + x_6 h) y_5 + (8h^2 - 4) y_6 + (2 - x_6 h) y_7 = 2h^2 \left(9x_6^2 + 10 \right) \\ (2 + x_7 h) y_6 + (8h^2 - 4) y_7 + (2 - x_7 h) y_8 = 2h^2 \left(9x_7^2 + 10 \right) \\ y_8 = 59/12 \end{cases}$$

Решаем эту систему равнений методом прогонки, результаты заносим в таблицу.

i	a_i	b_i	c_i	d_i	P_i	Q_i	y_i	Точное решение y_i^*	$\lvert y_i - y_i^* \rvert$
0	0	–1	0	0	0	0	0	0	0
1	2.02	3.88	1.98	0.32	0.51	–0.08	0.0780	0.0781	0.0001
2	2.03	3.88	1.97	0.33	0.69	–0.18	0.3120	0.3122	0.0002
3	2.05	3.88	1.95	0.35	0.80	–0.29	0.7012	0.7015	0.0003
4	2.06	3.88	1.94	0.38	0.87	–0.44	1.2445	1.2448	0.0003
5	2.08	3.88	1.92	0.42	0.93	–0.64	1.9402	1.9404	0.0002
6	2.09	3.88	1.91	0.47	0.99	–0.94	2.7860	2.7861	0.0002
7	2.11	3.88	1.89	0.53	1.05	–1.40	3.7792	3.7793	0.0001
8	0	–1	0	4.92	0	4.92	4.9167	4.9167	0

Ответ: $y_0 = 0,\ y_1 = 0.078,\ y_2 = 0.312,\ y_3 = 0.7012,\ y_4 = 1.2445,\ y_5 = 1.9402,\ y_6 = 2.786,$
$y_7 = 3.7792,\ y_8 = 4.9167$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

Правила оформления работы

Курсовая работа выполняется на белых односторонних листах формата А4.

1. *Титульный лист*

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА
по дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

ВАРИАНТ № ________

ВЫПОЛНИЛ: ______________________

ГРУППА: ИФО-4- ______

РАБОТА СДАНА ___ ___________________ 20___ г.

ПРОВЕРИЛ: _______________________

ОЦЕНКА: ________

МОСКВА 20 ___ г.

2. *Постановка задачи*

Выписать общую краевую задачу на отрезке $[a,b]$ для уравнения второго порядка. Записать свой вариант задачи на заданном отрезке.

3. *Составление систем линейных алгебраических уравнений*

Разбить заданный отрезок на n частей и подставить в дифференциальное уравнение вместо y' и y'' центральные разностные производные первого и второго порядка. Преобразовать уравнения к стандартному виду.

А. Используя аппроксимацию производной с точностью $O(h)$, составить алгебраические уравнения по краевым условиям. При $n = 4$ выписать систему 5 уравнений с 5 неизвестными. При $n = 8$ выписать систему 9 уравнений с 9 неизвестными.

Б. Используя аппроксимацию производной с точностью $O(h^2)$, составить алгебраические уравнения по краевым условиям. При $n = 4$ выписать систему 5 уравнений с 5 неизвестными. При $n = 8$ выписать систему 9 уравнений с 9 неизвестными.

Методом Гаусса преобразовать первое и последнее уравнения систем к виду, пригодному для применения метода прогонки.

4. *Решение систем уравнений методом прогонки*

Сформулировать условия применения метода прогонки и его преимущества. Выписать общий вид системы линейных алгебраических уравнений для решения методом прогонки. Записать рекуррентные формулы для нахождения прогоночных коэффициентов и решений системы.

Для каждой из 4 систем:

- выписать таблицу коэффициентов системы;
- вычислить и записать в таблицу прогоночные коэффициенты;
- найти и записать в таблицу решения системы;
- вычислить и записать в таблицу значения точного решения;
- вычислить и записать в таблицу значения абсолютных погрешностей.

i	a_i	b_i	c_i	d_i	P_i	Q_i	y_i	Точное решение y_i^*	$\left\|y_i - y_i^*\right\|$

5. *Вычисление погрешностей*

Отдельно для аппроксимации краевых условий с точностью $O(h)$ и $O(h^2)$ вычислить в пяти точках сетки разбиения отрезка на 4 части локальные значения абсолютной и относительной погрешности. Результаты записать в таблицу.

i	x_i	$y_i^{(4)}$	$y_i^{(8)}$	$R_i = \left\|y_i^{(4)} - y_i^{(8)}\right\|$	$\varepsilon_i = R_i / \left\|y_i^{(8)}\right\|$

Вычислить абсолютную погрешность $R = \max\{R_i\}$ и относительную погрешность $\varepsilon = \max\{\varepsilon_i\}$.

Сравнить погрешности при аппроксимации краевых условий с точностью $O(h)$ и $O(h^2)$.

6. *Построение графиков*

В одной системе координат на заданном отрезке построить графики точного решения, а также нанести точки (x_i, y_i) — решения конечно-разностных систем при $n = 4$ и $n = 8$ с точностью $O(h)$ и $O(h^2)$ (использовать разные значки для точек при различных значениях n).

7. *Вычисление центральных разностных производных первого порядка*

Выписать общую формулу для центральной разностной производной y'_n и оценку погрешности при замене производной y' на y'_n. Вычислить центральные разностные производные y'_n в середине заданного отрезка $c = (a + b)/2$ при $n = 4$ и $n = 8$ с точностью $O(h^2)$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления разностных производных. Результаты записать в таблицу.

$y'(0.5)$	$y'_4(0.5)$	$y'_8(0.5)$	$R_4 = \left\|y' - y'_4\right\|$	$R_8 = \left\|y' - y'_8\right\|$	$\varepsilon_4 = R_4 / \left\|y'\right\|$	$\varepsilon_8 = R_8 / \left\|y'\right\|$

8. *Вычисление центральных разностных производных второго порядка*

Выписать общую формулу для центральной разностной производной y''_n и оценку погрешности при замене производной y'' на y''_n. Вычислить центральные разностные производные y''_n в середине заданного отрезка $c = (a + b)/2$ при $n = 4$ и $n = 8$ с точностью $O(h^2)$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления разностных производных. Результаты записать в таблицу.

$y''(0.5)$	$y''_4(0.5)$	$y''_8(0.5)$	$R_4 = \lvert y'' - y''_4 \rvert$	$R_8 = \lvert y'' - y''_8 \rvert$	$\varepsilon_4 = R_4 / \lvert y'' \rvert$	$\varepsilon_8 = R_8 / \lvert y'' \rvert$

Варианты заданий расчетно-графической работы по вычислительной математике

№	Дифференциальное уравнение	$[a,b]$	Граничное условие слева (при $x = a$)	Граничное условие справа (при $x = b$)
1	$y'' - 4xy' + 16y = 12x^2 + 16$	[–2,–1]	$y'(-2) + y(-2) = -15$	$y(-1) = 2$
2	$y'' + 4xy' - 16y = 12x^2 - 16$	[–2,–1]	$y(-2) = 17$	$y'(-1) + y(-1) = -2$
3	$y'' + 3xy' - 12y = 12x^2 - 12$	[–1,0]	$y(-1) = 2$	$2y'(0) + y(0) = 1$
4	$y'' - 3xy' + 12y = 12x^2 + 12$	[–1,0]	$3y'(-1) + y(-1) = -10$	$y(0) = 1$
5	$y'' + 2xy' - 8y = 12x^2 - 8$	[0,1]	$y'(0) + 2y(0) = 2$	$y(1) = 2$
6	$y'' - 4xy' + 16y = 12x^2 + 16$	[1,2]	$y(1) = 2$	$y'(2) - y(2) = 15$
7	$y'' + 4xy' - 16y = 12x^2 - 16$	[1,2]	$y'(1) - y(1) = 2$	$y(2) = 17$
8	$y'' + 3xy' - 12y = 12x^2 - 12$	[0,1]	$3y'(0) - y(0) = -1$	$y(1) = 2$
9	$y'' - 3xy' + 12y = 12x^2 + 12$	[0,1]	$y(0) = 1$	$2y'(1) + y(1) = 10$
10	$y'' + 2xy' - 8y = 12x^2 - 8$	[–2, –1]	$y(-2) = 17$	$2y'(-1) - y(-1) = -10$
11	$y'' - 4xy' + 16y = 12x^2 + 16$	[0,1]	$y'(0) - 3y(0) = -3$	$y(1) = 2$
12	$y'' + 4xy' - 16y = 12x^2 - 16$	[0,1]	$y(0) = 1$	$y'(1) + 2y(1) = 8$
13	$y'' + 3xy' - 12y = 12x^2 - 12$	[–2,–1]	$y(-2) = 17$	$y'(-1) - 2y(-1) = -8$
14	$y'' - 3xy' + 12y = 12x^2 + 12$	[–2,–1]	$2y'(-2) + y(-2) = -47$	$y(-1) = 2$
15	$y'' + 2xy' - 8y = 12x^2 - 8$	[–1,0]	$3y'(-1) + y(-1) = -10$	$y(0) = 1$
16	$y'' - 4xy' + 16y = 12x^2 + 16$	[–1,0]	$y(-1) = 2$	$4y'(0) + 3y(0) = 3$
17	$y'' + 4xy' - 16y = 12x^2 - 16$	[–1,0]	$2y'(-1) - 3y(-1) = -14$	$y(0) = 1$
18	$y'' + 3xy' - 12y = 12x^2 - 12$	[1,2]	$2y'(1) + 3y(1) = 14$	$y(2) = 17$
19	$y'' - 3xy' + 12y = 12x^2 + 12$	[1,2]	$y(1) = 2$	$2y'(2) - 3y(2) = 13$
20	$y'' + 2xy' - 8y = 12x^2 - 8$	[1,2]	$y'(1) - 4y(1) = -4$	$y(2) = 17$
21	$y'' - 5xy' + 20y = 12x^2 + 20$	[–2,–1]	$y(-2) = 17$	$y'(-1) - y(-1) = -6$
22	$y'' + 5xy' - 20y = 12x^2 - 20$	[–2,–1]	$y'(-2) + 2y(-2) = 2$	$y(-1) = 2$
23	$y'' + 6xy' - 24y = 12x^2 - 24$	[–1,0]	$y'(-1) + 2y(-1) = 0$	$y(0) = 1$
24	$y'' - 6xy' + 24y = 12x^2 + 24$	[–1,0]	$y(-1) = 2$	$y'(0) - 2y(0) = -2$
25	$y'' + 7xy' - 28y = 12x^2 - 28$	[0,1]	$y(0) = 1$	$y'(1) + 2y(1) = 8$
26	$y'' - 5xy' + 20y = 12x^2 + 20$	[1,2]	$3y'(1) - 4y(1) = 4$	$y(2) = 17$
27	$y'' + 5xy' - 20y = 12x^2 - 20$	[1,2]	$y(1) = 2$	$y'(2) + y(2) = 49$
28	$y'' + 6xy' - 24y = 12x^2 - 24$	[0,1]	$y(0) = 1$	$2y'(1) - 3y(1) = 2$
29	$y'' - 6xy' + 24y = 12x^2 + 24$	[0,1]	$3y'(0) + 2y(0) = 2$	$y(1) = 2$
30	$y'' + 7xy' - 28y = 12x^2 - 28$	[–2, –1]	$3y'(-2) + 5y(-2) = -11$	$y(-1) = 2$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акимов П.А., Кайтуков Т.Б, Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н. Строительная информатика / П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров. — Москва: АСВ, 2014. — 432 с. — ISBN 978-5-4323-0066-9.
2. Демидович Б. П., Марон И.А. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — Санкт-Петербург: Лань, 2011. — 664 с. — ISBN 978-5-8114-0695-1.
3. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие для вузов / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. — Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. — 240 с. — ISBN 978-5-9963-0333-5.
4. Варапаев В.Н., Осипов Ю.В., Сафина Г.Л., Рогачева Н.Н. Вычислительная математика. Учебное пособие / В.Н. Варапаев, Ю.В. Осипов, Г.Л. Сафина, Н.Н. Рогачева. — Москва: МГСУ, 2017. — URL: http://www.iprbookshop.ru/60773 (дата обращения 20. 05. 2019).
5. Варапаев В.Н., Осипов Ю.В., Сафина Г.Л., Рогачева Н.Н. Вычислительные методы математического анализа. Учебное пособие / В.Н. Варапаев, Ю.В. Осипов, Г.Л. Сафина, Н.Н. Рогачева. — Москва: МГСУ, 2017. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=31997445 (дата обращения 10.02. 2018).
6. Рогачева Н.Н., Осипов Ю.В., Сафина Г.Л. Погрешности вычислений. Учебное пособие / Н.Н. Рогачева, Ю.В. Осипов, Г.Л. Сафина. — Москва: МГСУ, 2018. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): ил.; 12 см. — ISBN 978-5-7264-1917-6.