

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

для выполнения работ компьютерного практикума по дисциплине

Информатика

Часть 3

**«Численно-аналитические методы, алгоритмы и программы
решения прикладных задач на ЭВМ»**

Студент: _____

Институт: _____

Курс: _____

Группа: _____

Преподаватель: _____

Москва 2018

Результаты сдачи контрольных мероприятий студентом _____			
Контрольное мероприятие	Преподаватель	Отметка о зачете работы	Подпись
Практическая работа 1			
Практическая работа 2			
Практическая работа 3			
Практическая работа 4			
Практическая работа 5			
Практическая работа 6			
Практическая работа 7			
Контрольная работа			
Результат текущего контроля			

Рабочая тетрадь предназначена для студентов всех специальностей и направлений подготовки МГСУ, изучающих курс «Информатика». В тетради приведены формы для оформления результатов ручного счета, реализующих алгоритмы выполнения работы на ЭВМ.

Принятые в заданиях номера институтов МГСУ

Институты	ИСА	ИГЭС	ИИЭСМ	ИФО	ИЭУИС	ИМОЯК	Мытищ. филиал
К	1	2	3	4	5	6	7

Составители:

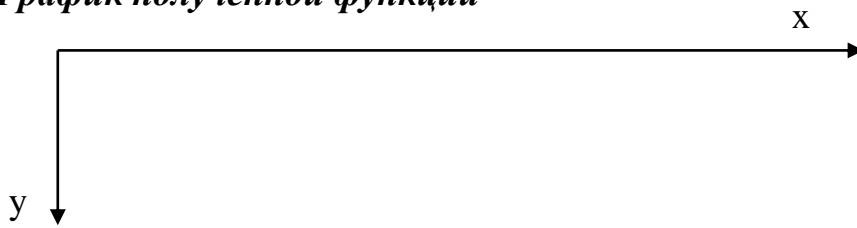
профессор, доктор технических наук В.К. Ахметов
 доцент, кандидат технических наук Т.Н. Горбунова,
 доцент, кандидат физико-математических наук Ю.В. Осипов
 доцент, кандидат технических наук Г.Л. Сафина,
 доцент, кандидат экономических наук О.Л. Широкова,
 старший преподаватель, Ю.П. Галагуз,
 ассистент А.И. Нагибович

Рецензент

профессор, доктор технических наук Р.Л. Лейбов

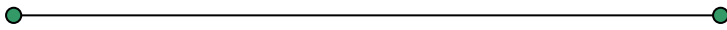
Результаты счета

График полученной функции



Ручной счет (N=___)

Разностная схема (расположение точек разбиения при N=___ с нумерацией)



i=2	x ₂ =_____	p ₂ =_____	f ₂ =_____
i=3	x ₃ =_____	p ₃ =_____	f ₃ =_____
i=4	x ₄ =_____	p ₄ =_____	f ₄ =_____

Система конечно-разностных уравнений (для всех точек) .

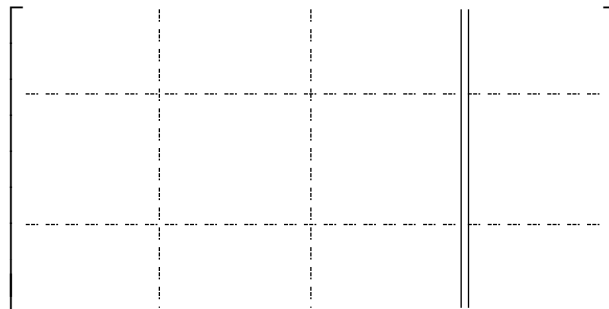
{

Или, исключая $y_1 = y_5 = 0$,

{

Решение методом Гаусса

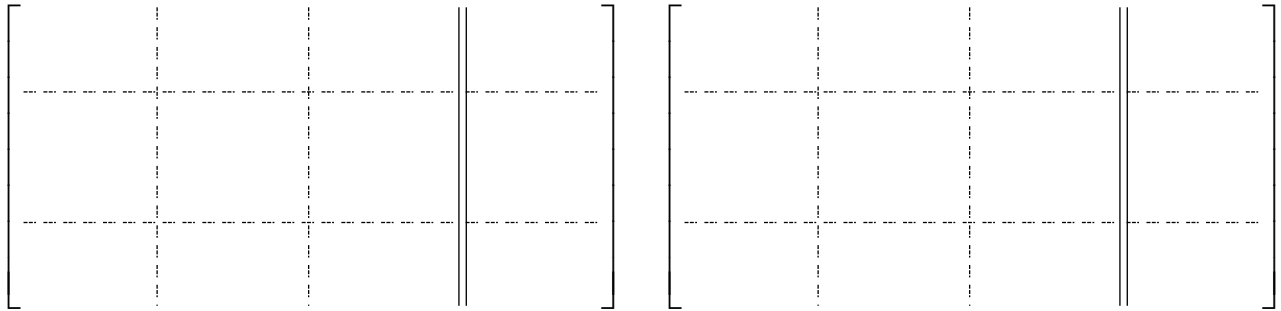
Расширенная матрица



Прямой ход

1-й шаг

2-й шаг



Обратный ход

Система с треугольной матрицей:

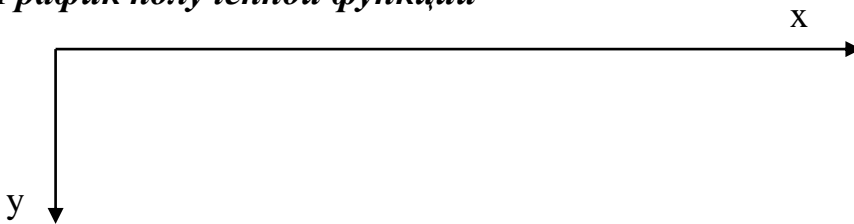
$$\left\{ \begin{array}{llll} y_2 & y_3 & y_4 & = \\ & y_3 & y_4 & = \\ & & y_4 & = \end{array} \right.$$

Вычисление неизвестных

Из 3-го уравнения:	
Из 2-го уравнения:	
Из 1-го уравнения:	

Ответ:

График полученной функции



Практическая работа №1	Фамилия И.О.	Подпись
Работу выполнил:	Студент	
Выполнение на ЭВМ:	Преподаватель	
Ручной счет:	Преподаватель	
Защита работы:	Преподаватель	

Практическая работа № 2 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Задание: Решить задачу определения критической силы и формы потери устойчивости для сжатого стержня методом конечных разностей.

Постановка задачи (вариант G=__, S=__)

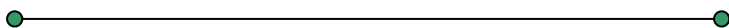
$$\begin{cases} -Ry'' = Py, & x \in (0, l) \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

R=_____

1. Решить задачу на ЭВМ (N=__).
2. Решить задачу вручную (N=__).

Решение задачи на ЭВМ (N= __).

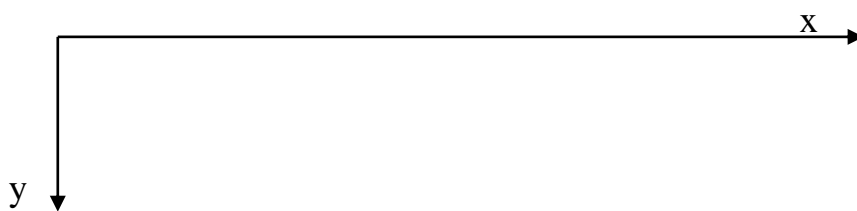
Разностная схема (расположение точек разбиения при N=__ с нумерацией)



Текст программы

Результаты счета

График формы потери устойчивости при минимальной критической силе $P_{\min} = \underline{\hspace{2cm}}$.



Ручной счет ($N = \underline{\hspace{1cm}}$)

Разностная схема (расположение точек разбиения при $N = \underline{\hspace{1cm}}$ с нумерацией)



$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$R_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$R_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$R_3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Конечно-разностные уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Матричный вид $A \bar{y} = pB \bar{y}$

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс

$$\tilde{A} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}^{(0)} = (1,1,1);$$

$$\underline{k=0}: \lambda^{(0)} = |\nu^{(0)}| =$$

$$\bar{y}^{(0)} = \frac{1}{\lambda^{(0)}} \bar{v}^{(0)} =$$

$$\bar{v}^{(1)} = \tilde{A} \bar{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\underline{k=1}: \lambda^{(1)} = |\nu^{(1)}| =$$

$$\bar{y}^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \bar{v}^{(1)} =$$

$$\bar{v}^{(2)} = \tilde{A}\bar{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\underline{k=2}: \lambda^{(2)} = |\nu^{(2)}| =$$

$$\bar{y}^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} \bar{v}^{(2)} =$$

$$\bar{v}^{(3)} = \tilde{A}\bar{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\underline{k=3}: \lambda^{(3)} = |\nu^{(3)}| =$$

$$\bar{y}^{(3)} = \frac{1}{\lambda^{(3)}} \bar{v}^{(3)} =$$

Ответ: $\rho_{\min} = 1/\lambda =$ $\bar{y} = ($ $)$

График формы потери устойчивости при минимальной критической силе



Практическая работа №2	Фамилия И.О.	Подпись
Работу выполнил:	Студент	
Выполнение на ЭВМ:	Преподаватель	
Ручной счет:	Преподаватель	
Защита работы:	Преподаватель	

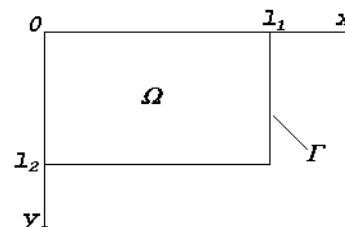
Практическая работа № 3

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Задание. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области методом конечных разностей.

Постановка задачи (вариант G=__, S=__)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 U = F(x, y), \quad \Omega = (0 < x < l_1, 0 < y < l_2) \\ U_{\Gamma} = \varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(y), & x = 0 \\ \varphi_2(y), & x = l_1 \\ \varphi_3(x), & y = 0 \\ \varphi_4(x), & y = l_2 \end{cases} \end{array} \right.$$



$F(x, y) =$ _____

краевые условия: при $x=0$ и $x=l_1$ $U = \varphi_1(y) = \varphi_2(y) =$

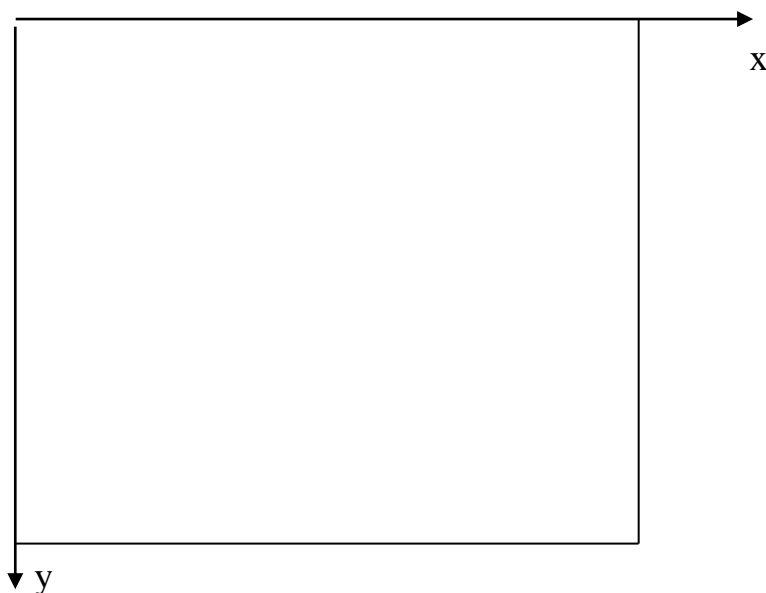
при $y=0$ и $y=l_2$ $U = \varphi_3(x) = \varphi_4(x) =$

$l_1=1, l_2=1.$

1. Решить задачу на ЭВМ (N1=__, N2=__).
2. Решить задачу вручную (N1=__, N2=__) (ограничиться при решении разностной системы уравнений методом Зейделя тремя итерациями).

Решение задачи на ЭВМ.

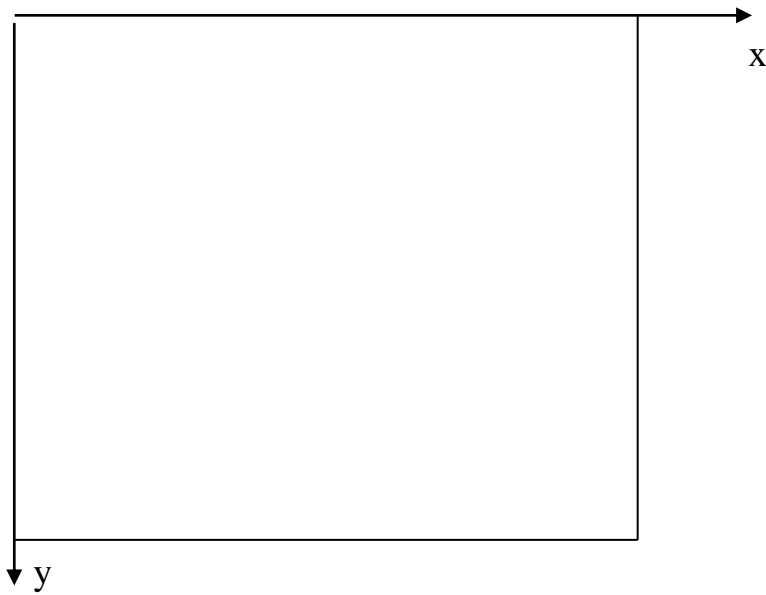
Конечно-разностная сетка (при N1=__, N2=__)



Результаты счета

Ручной счет

Конечно-разностная сетка (при $N_1=$ __, $N_2=$ __)



$$h_1=1/4=0.25, h_2=1/2=0.5$$

$\varphi_3(0)=$	$\varphi_1(0)=$
$\varphi_3(0.25)=$	$\varphi_1(0.5)=$
$\varphi_3(0.5)=$	$\varphi_1(1)=$
$\varphi_3(0.75)=$	
$\varphi_3(1)=$	

$$\text{Формула итераций: } u_{i,j}^{(k)} = \frac{\left(\frac{u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k-1)}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k-1)}}{h_2^2} - f_{ij} \right)}{\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right)};$$

$$h_1^2 = 0.25^2 = 0.0625; \quad h_2^2 = 0.5^2 = 0.25; \quad \frac{2}{h_1^2} = 32; \quad \frac{2}{h_2^2} = 8;$$

$$\underline{k=0}: \quad u_{1,1}^{(0)} = u_{2,1}^{(0)} = u_{3,1}^{(0)} = 0 \quad (\text{Начальные значения});$$

$$\underline{k=1}: \quad i=1, j=1,$$

$$u_{1,1}^{(1)} = \frac{\frac{u_{0,1}^{(1)} + u_{2,1}^{(0)}}{0.0625} + \frac{u_{1,0}^{(1)} + u_{1,2}^{(0)}}{0.25} - f_{11}}{40} = \frac{0.0625}{40} + \frac{0.25}{40} =$$

$$= \quad i=2, j=1,$$

$$u_{2,1}^{(1)} = \frac{\frac{u_{1,1}^{(1)} + u_{3,1}^{(0)}}{0.0625} + \frac{u_{2,0}^{(1)} + u_{2,2}^{(0)}}{0.25} - f_{21}}{40} = \frac{0.0625}{40} + \frac{0.25}{40} =$$

$$i=3, j=1,$$

$$u_{3,1}^{(1)} = \frac{\frac{u_{2,1}^{(1)} + u_{4,1}^{(0)}}{0.0625} + \frac{u_{3,0}^{(1)} + u_{3,2}^{(0)}}{0.25} - f_{31}}{40} = \frac{0.0625}{40} + \frac{0.25}{40} =$$

$$\underline{k=2}: \quad i=1, j=1,$$

$$u_{1,1}^{(2)} = \frac{\frac{u_{0,1}^{(2)} + u_{2,1}^{(1)}}{0.0625} + \frac{u_{1,0}^{(2)} + u_{1,2}^{(1)}}{0.25} - f_{11}}{40} = \frac{0.0625}{40} + \frac{0.25}{40} =$$

$$i=2, j=1,$$

$$u_{2,1}^{(2)} = \frac{\frac{u_{1,1}^{(2)} + u_{3,1}^{(1)}}{0.0625} + \frac{u_{2,0}^{(2)} + u_{2,2}^{(1)}}{0.25} - f_{21}}{40} = \frac{0.0625}{40} + \frac{0.25}{40} =$$

$i=3, j=1,$

$$u_{3,1}^{(2)} = \frac{\frac{u_{2,1}^{(2)} + u_{4,1}^{(1)}}{0.0625} + \frac{u_{3,0}^{(2)} + u_{3,2}^{(1)}}{0.25} - f_{31}}{40} = \frac{\frac{0.0625}{0.0625} + \frac{0.25}{0.25} -}{40}$$

$k=3: i=1, j=1,$

$$u_{1,1}^{(3)} = \frac{\frac{u_{0,1}^{(3)} + u_{2,1}^{(2)}}{0.0625} + \frac{u_{1,0}^{(3)} + u_{1,2}^{(2)}}{0.25} - f_{11}}{40} = \frac{\frac{0.0625}{0.0625} + \frac{0.25}{0.25} -}{40}$$

$i=2, j=1,$

$$u_{2,1}^{(3)} = \frac{\frac{u_{1,1}^{(3)} + u_{3,1}^{(2)}}{0.0625} + \frac{u_{2,0}^{(3)} + u_{2,2}^{(2)}}{0.25} - f_{21}}{40} = \frac{\frac{0.0625}{0.0625} + \frac{0.25}{0.25} -}{40}$$

$i=3, j=1,$

$$u_{3,1}^{(3)} = \frac{\frac{u_{2,1}^{(3)} + u_{4,1}^{(2)}}{0.0625} + \frac{u_{3,0}^{(3)} + u_{3,2}^{(2)}}{0.25} - f_{31}}{40} = \frac{\frac{0.0625}{0.0625} + \frac{0.25}{0.25} -}{40}$$

Ответ:

<i>Практическая работа №3</i>	<i>Фамилия И.О.</i>	<i>Подпись</i>
<i>Работу выполнил:</i>	<i>Студент</i>	
<i>Выполнение на ЭВМ:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Ручной счет:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Защита работы:</i>	<i>Преподаватель</i>	

Практическая работа № 4

ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ (задача Коши)

Задание. Определить прогиб консоли (решить задачу Коши) методом Эйлера.

Исходная постановка задачи (вариант G=___, S=___)

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{M(x)}{EJ(x)} \sqrt{[1 + (y'(x))^2]^3}, & x > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \text{ - начальные условия}$$

$EJ(x)$ - жесткость балки, $M(x)$ - изгибающий момент в балке - заданные функции.

$y(x)$ - прогиб балки: $y(x)=?$

$$M(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad EJ = \underline{\hspace{2cm}}, \quad c = \underline{\hspace{2cm}}, \quad l = \underline{\hspace{2cm}}$$

Постановка исходной задачи в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ y'(x) = z(x) \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad x > 0$$

где

$$f(x, z) = \frac{M(x)}{EJ(x)} \sqrt{(1 + z^2(x))^3}.$$

Для решения применить следующий вариант метода Эйлера, т.е.

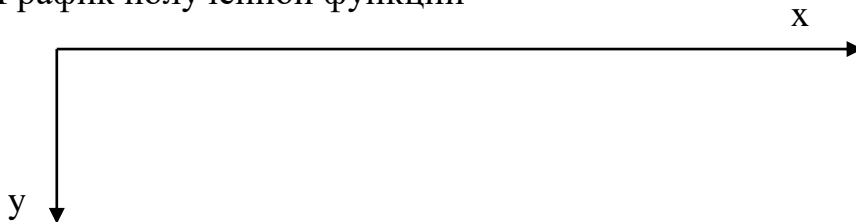
$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot f(x_i, z_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (z_i + z_{i+1}) \end{cases}$$

i - номер точки разбиения в разностной схеме.

3. Решить задачу на ЭВМ ($N=$ ___).

4. Решить задачу вручную ($N=$ ___).

График полученной функции



Ручной счет (N=___)

Разностная схема (расположение точек разбиения при N=___ с нумерацией)



$i=0$	$x_0 = \underline{\hspace{1cm}}$	$z_0 = \underline{\hspace{1cm}}$	$y_0 = \underline{\hspace{2cm}}$
	$M_0 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$		$f_0 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
$i=1$	$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$z_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$y_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
	$M_1 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$		$f_1 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
$i=2$	$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$z_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$y_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
	$M_2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$		$f_2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
$i=3$	$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$z_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$y_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
	$M_3 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$		$f_3 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
$i=4$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$z_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$y_4 = \underline{\hspace{2cm}}$

График полученной функции



<i>Практическая работа №4</i>	<i>Фамилия И.О.</i>	<i>Подпись</i>
<i>Работу выполнил:</i>	<i>Студент</i>	
<i>Выполнение на ЭВМ:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Ручной счет:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Защита работы:</i>	<i>Преподаватель</i>	

Ручной счет

Конечно-разностная сетка (при $N=$ __, $k=$ __, $h=$ ____, $\tau=$ __)



Результаты счета

k	t	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0						
1						
2						
3						

<i>Практическая работа №5</i>	<i>Фамилия И.О.</i>	<i>Подпись</i>
<i>Работу выполнил:</i>	<i>Студент</i>	
<i>Выполнение на ЭВМ:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Ручной счет:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Защита работы:</i>	<i>Преподаватель</i>	

Практическая работа № 6
ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задание: Решить задачу линейного программирования.

Постановка задачи (вариант G=___, S=___)

Найти максимум и точку максимума функции Z

$$Z = _x_1 + _x_2$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \\ \leq 0 \\ \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Решить задачу на ЭВМ с помощью стандартной подпрограммы SIMPLPR.
2. Решить задачу вручную геометрическим методом в соответствии с примером в теоретической части.

Решение задачи на ЭВМ.

Матричная формулировка

Найти $\max z = (\bar{c}, \bar{x})$ при ограничениях

$$A \bar{x} \leq \bar{b}$$

и дополнительном условии $\bar{x} \geq 0$

$$\text{где } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}$$

Текст программы

Ручной счет

Графическое решение задачи (построение многоугольника ограничений, прямой $z=0$ и определение точки максимума).

Ответ :

<i>Практическая работа №6</i>	<i>Фамилия И.О.</i>	<i>Подпись</i>
<i>Работу выполнил:</i>	<i>Студент</i>	
<i>Выполнение на ЭВМ:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Ручной счет:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Защита работы:</i>	<i>Преподаватель</i>	

Практическая работа № 7
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

Задание: Решить задачу о изгибе растянуто-изогнутой балки методом конечных элементов.

Исходная постановка задачи (вариант $G=$ __, $S=$ __)

Найти функцию $y(x)$ при которой функционал

$$\Phi(y(x)) = \frac{1}{2} \int_0^l (EJ(y'(x))^2 + py(x)^2) dx - \int_0^l M(x)y(x) dx$$

принимает минимальной значение.

$EJ=$ __ $P=$ __ $l=$ __

$M(x)=$ _____

Составить конечно-элементную систему уравнений (матрицу жесткости и вектор нагрузки) и решить полученную систему.

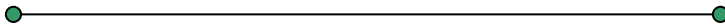
1. Решить задачу на ЭВМ для $N=$ __ точек ($N-1$ конечных элементов)

Представить результаты счета для $N=$ __, то есть __ конечных элементов.

2. Решить задачу вручную для $N=$ __, т.е. __ конечных элементов .

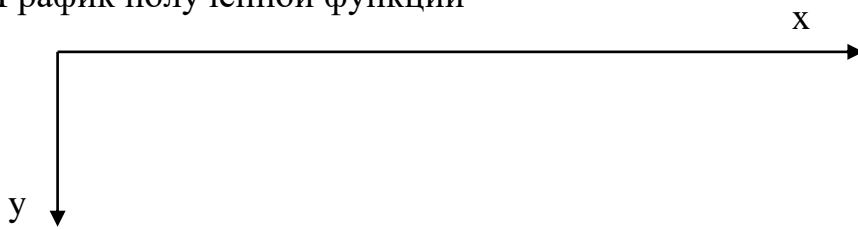
Решение задачи на ЭВМ.

Конечно-элементная схема (расположение элементов при $N=$ __ с нумерацией)



Текст программы

График полученной функции



Ручной счет (N=___)

Конечно-элементная схема (расположение элементов при N=___ с нумерацией)



Локальные матрицы жесткости:

$$K^i = \text{---} \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} + \text{---} \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3$$

Локальные векторы нагрузки

$$M_1 = \text{---} = \text{---}$$

$$M_2 = \text{---} = \text{---}$$

$$M_3 = \text{---} = \text{---}$$

$$R^1 = \text{---} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \quad R^2 = \text{---} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \quad R^3 = R^1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

Общие матрица жесткости и вектор нагрузки без учета закреплений

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

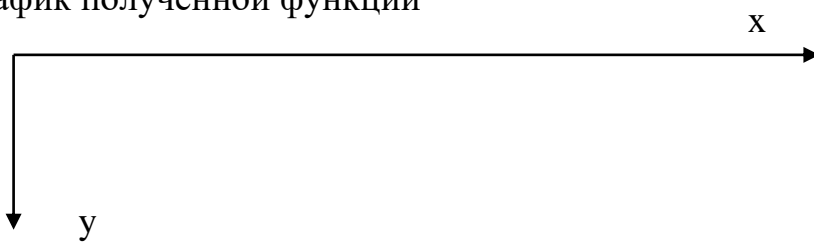
С учетом закреплений

$$K = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений $K \bar{y} = \bar{R}$

Ответ:

График полученной функции



<i>Практическая работа №7</i>	<i>Фамилия И.О.</i>	<i>Подпись</i>
<i>Работу выполнил:</i>	<i>Студент</i>	
<i>Выполнение на ЭВМ:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Ручной счет:</i>	<i>Преподаватель</i>	
<i>Защита работы:</i>	<i>Преподаватель</i>	