МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор
_______________А.А.Волков
«____»______________2016 г.

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена
по научной специальности

01.01.02	**Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление**
Шифр	*Наименование специальности*
01.06.01	**Механика и математика**
Код	*Направление подготовки*
	Дифференциальные уравнения
	Наименование основной профессиональной образовательной программы

Программа одобрена на заседании методической комиссии ИФО
Протокол № 7 от 02.03 2016 г.

Председатель экзаменационной комиссии	_______________	Фриштер Л.Ю. *Фимилия И.О.*
Председатель методической комиссии	_______________	Саинов М.П. *Фимилия И.О.*

Разработчик программы:

Профессор *Должность*	_______________	Алероев Т.С. *Фимилия И.О.*

Москва 2016

Оглавление

Введение

Проведение экзамена позволяет выявить уровень подготовленности обучающихся в аспирантуре к научно-исследовательской и опытно-экспериментальной деятельности, раскрыть мировоззренческое видение ими насущных проблем данной отрасли науки, сущность современных подходов к их разрешению, определения путей и способов организации собственного научного исследования.

Экзамен кандидатского минимума по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» является одной из традиционных форм аттестации уровня научно-исследовательской подготовки аспирантов. Вместе с тем на современном этапе развития многоуровневого физико-математического образования, который связан с поиском путей обеспечения высокого уровня научно-исследовательских работ аспирантов в постоянно эволюционирующей среде прикладных исследований, его значимость в процессе целенаправленной профессиональной подготовки специалистов высшей квалификации существенно возрастает. Данная программа охватывает следующие основные разделы:

Раздел 1. Введение. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы.

Раздел 2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Раздел 3. Исследование устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Раздел 4. Уравнения с частными производными первого порядка.

Раздел 5. Элементы вариационного исчисления.

Раздел 6. Интегральные уравнения.

Раздел 7. Постановка основных задач математической физики.

Раздел 8. Эллиптические уравнения. Гармонические функции и их свойства.

Раздел 9. Обобщенные и классические решения эллиптических задач.

Раздел 10. Уравнения параболического типа.

Раздел 11. Уравнения гиперболического типа.

Раздел 12. Нелинейные уравнения математической физики.

Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии Министерства образования Российской Федерации по машиностроению при участии МИЭМ, МАТИ, СГАУ и МАИ (ТУ) (программы – минимум), а также сотрудниками кафедры Технического регулирования МГСУ.

РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

1. Понятие первого интеграла дифференциального уравнения (ДУ). Теоремы Коши для ДУ первого порядка разрешенных и не разрешенных относительно производной.

2. Область существования решения. Теорема Коши для нормальной системы ДУ и для ДУ высших порядков. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы. Сведение задачи Коши для нормальной системы ДУ к задаче существования единственного непрерывного решения соответствующего интегрального уравнения.

3. Линейные системы ДУ и линейные ДУ высшего порядка, формулы Остроградского–Лиувилля–Якоби. Структура общего решения линейных однородных систем ДУ.

4.Матрица Коши. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянной. Уравнения с постоянными коэффициентами, общий вид решения.

5.Квазиполиномы. ДУ с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

РАЗДЕЛ 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Операторная форма постановки краевой задачи. Методы интегрирования краевых задач.

2. Общий метод решения краевой задачи. Случаи единственного решения, множества решений и их отсутствия для краевой задачи.

3. Метод функции Грина. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Теорема о существовании и единственности решения краевой задачи.

5. Формулировка теоремы об условиях существования функции Грина.

РАЗДЕЛ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Автономные и неавтономные динамические системы. Свойства фазовых траекторий автономных динамических систем.

2. Положения равновесия. Классификация фазовых траекторий автономных динамических систем. Условия существования фазовых траекторий без самопересечения, самопересекающихся траекторий – циклов и точек покоя.

3. Теорема о принадлежности фазовой траектории состоянию равновесия динамической системы. Определения устойчивости, асимптотической устойчивости, устойчивости в целом, неустойчивости решений по Ляпунову.

4. Теоремы о необходимых и достаточных условиях всех типов устойчивости решений линейных динамических систем ДУ. Исследование устойчивости решений систем ДУ с помощью функций Ляпунова.

5. Определение производной функции в силу данной системы ДУ. Теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости.

6. Теорема Четаева о неустойчивости. Устойчивость решений линейных ДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами. Критерии устойчивости Рауса–Гурвица, Льенара–Шипара и Михайлова.

7. Сведение задачи исследования устойчивости невозмущенного решения неавтономной динамической системы ДУ общего вида к исследованию нулевого решения системы первого приближения.

8. Формулировка теорем об устойчивости и неустойчивости решений динамической системы дифференциальных уравнений по первому приближению.

РАЗДЕЛ 4. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Интегрирование ДУ первого порядка с частными производными. Сведение задачи интегрирования линейного однородного ДУ в частных производных первого порядка к эквивалентной задаче интегрирования соответствующей системы обыкновенных ДУ.

2. Уравнения характеристик. Первые интегралы соответствующей системы ДУ. Теорема об общем решении однородного ДУ в частных производных первого порядка.

3. Интегрирование линейных неоднородных ДУ в частных производных первого порядка. Интегрирование квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши в обобщенной форме. Теория Гамильтона–Якоби.

РАЗДЕЛ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона.

РАЗДЕЛ 6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегральные уравнения с непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром. Теорема Гильберта-Шмидта. Ряд Неймана.

РАЗДЕЛ 7. ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Основные уравнения математической физики (колебаний, диффузии, переноса, гидродинамики, Максвелла, Шредингера). Классификация уравнений с частными производными и систем.

2. Проблема краевых и начальных условий, корректность. Пример Адамара. Аналитические решения. Теорема Коши–Ковалевской.

РАЗДЕЛ 8. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Понятие правильной эллиптичности. Фундаментальное решение. Интегральное представление функций.

2. Связь гармонических функций двух переменных с аналитическими функциями комплексного переменного. Теоремы о среднем. Принцип максимума, теорема о среднем, лемма о нормальной производной.

3. Теорема об устранимой особой точке. Функция Грина, метод отражений, физический смысл.

РАЗДЕЛ 9. ОБОБЩЕННЫЕ И КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Классические решения основных краевых задач. Обобщенные решения краевых задач.

2. Разрешимость и спектральные свойства первой краевой задачи. Фредгольмова разрешимость эллиптических задач.

3. Вариационный принцип, метод Ритца. Свойства обобщенных собственных функций для оператора Лапласа.

4. Задача на собственные значения и разложения по собственным функциям.

РАЗДЕЛ 10. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши.

2. Функция источника. Формула Пуассона. Принцип Дюамеля. Теоремы о стабилизации. Принцип максимума. Теорема единственности.

3. Смешанные задачи. Построение приближенных решений методом Фурье и методом Галеркина.

РАЗДЕЛ 11. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное Решение. Задача Коши. Формула Даламбера. Формула Кирхгофа, метод спуска. Принцип Дюамеля.

2. Распространение волн, фронт волны. Смешанные задачи. Построение приближенных решений методом Фурье и методом Галеркина.

РАЗДЕЛ 12. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Монотонные операторы и их свойства. Нелинейные эллиптические, параболические и гиперболические уравнения. Основные свойства.

Перечень вопросов к кандидатскому экзамену, осваиваемых на обязательных дисциплинах в рамках программы послевузовского профессионального образования

Дисциплина «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ».

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.

3. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля–Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

4. Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.

5. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.

6. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстродействия для линейных систем.

7. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.

8. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.

9. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.

10. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

11. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона–Якоби.

Дисциплина «УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ»

1. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши–Ковалевской.

2. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.

3. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.)

4. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)

5. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.)

6. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.

7. Пространства Соболева W_m^p. Теоремы вложения, следы функций из W_m^p на границе области.

8. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.

9. Псевдодифференциальные операторы (определение, основные свойства).

10. Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.

11. Монотонные нелинейные эллиптические уравнения. Основные свойства.

12. Монотонные нелинейные параболические уравнения. Основные свойства.

Вопросы кандидатского экзамена по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных и нелинейных систем первого порядка ([1], § 3, 21).
2. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями ([1], § 7, 8, 10, 12, 14).
3. Линейные уравнения и системы с переменными коэффициентами. Многообразие решений. Формула Лиувилля – Остроградского ([1], § 14, 17, 18).
4. Теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и от параметров ([1], § 23).
5. Гладкость решения по начальным данным и параметрам ([1], § 24)
6. Автономные системы. Классификация особых точек ([1], § 15, 16).
7. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению ([1], § 26).
8. Предельные циклы ([1], § 28).
9. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка ([2], часть II, гл. 1 § I).
10. Элементы вариационного исчисления. Функции Лагранжа (лагранжиан). Условия экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Энергия. Импульс. Гамильтониан. Уравнение Гамильтона-Якоби ([2], часть I, гл. 2, [3], гл. 1, [9] часть I, гл. 5, § 31-36, гл. 6 § 37, 38).
11. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина ([3], гл. 1).

12. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода ([4], гл. IV, § 17, 18; [7], гл. II, § 4).
13. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром; теорема Гильберта-Шмидта ([4], гл. IV, § 19-22; [7], гл. II, § 5).
14. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Задача Коши; теорема Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных ([4], гл. I, § 3; [6], гл. I, § 2, 3; [7], гл. 1, § 1, 2).
15. Физические задачи, приводящие к эллиптическим уравнениям. Свойства гармонических функций (гладкость, теоремы о среднем, принцип максимума, теоремы об устранении особенности, теорема Лиувилля). Фундаментальное решение задачи Лапласа ([4], гл. I, § 2; гл. V, § 24, 27; [5], гл. IV, § 1, 2; [6], гл. II, § 27 - 30; [7], гл. I, § 3, гл. IV § 3).
16. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом потенциалов. Разностные методы решения краевых задач ([4], гл. V, § 27, 28, 31; [5], гл. IV, § 5, дополнение 1, §3; [6], гл. III, § 31 - 36).
17. Обобщенные решения основных краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений ([7], гл. IV, § 1, 2; [8], гл. II).
18. Вариационный метод решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Метод Ритца ([7], гл. IV, § 1, п. 9).
19. Задачи на собственные значения. Разложение в ряд по собственным функциям ([4], гл. V, § 21, 22; [7], гл. IV, § 1, п. 3-5; [8], гл. II).
20. Физические задачи, приводящие к параболическим уравнениям. Свойства решений однородного уравнения теплопроводности (гладкость, принцип максимума). Фундаментальное решение. Задача Коши. ([4], гл. I, § 2; гл. III, § 11, 16; [5], гл. III, § 1; [6], гл. III, § 38 - 40; [7], гл. VI, § 1; [8], гл. III).
21. Основные начально-граничные задачи для уравнения теплопроводности; классические и обобщенные решения начально-

граничных задач; решение смешанных задач методом Фурье. Решение смешанных задач методом конечных разностей ([4], гл. VI, § 34; [5], дополнение I, § 2; [6], дополнение § 42, 43; [7], гл. VI, § 1, [8], гл. III).

22. Физические задачи, приводящие к гиперболическим уравнениям. Конечная гладкость решений волнового уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. ([4], гл. I, § 2; гл. III, § 12-14; [5], гл. II, § 2, гл. V, § 1; [8], гл. IV).
23. Основные начально-граничные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье решения начально-граничных задач. Метод Галеркина решения начально-граничных задач для волнового уравнения ([4], гл. VI, § 33; [5], гл. II, § 3, гл. V, § 3; [6], гл. II, § 17-23; [7], гл. V, § 2; [8], гл. IV).
24. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста ([4], гл. II, § 5-9, гл. III, § 3).
25. Пространства дифференцируемых функций H^k. Эквивалентные нормировки пространств H^0 и H^1. Вложение пространства H^k в C^l ([2], часть I, гл. III; [7], гл. III, § 3-6; [8], § 1-7).

Задачи кандидатского экзамена по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

1. Определить тип уравнения

   а) $U_{xx} + 4U_{xy} + U_{yy} + U_x + U_y + 2U – x^2y = 0$

   б) $2U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 2U_x + 2U_y - U = 0$

   в) $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + U_x + U_y + 3U – xy^2 = 0$

   г) $4U_{xx} + 2U_{yy} – 6U_{zz} + 6U_{xy} + 10U_{xz} + 4U_{yz} + 2U = 0$

   д) $(U_{xx})^2 + (U_{xx} - 2)U_{xy} - (U_{yy})^2 = 0, U = x^2 + y^2$

2. Привести к каноническому виду

   а) $U_{xx} – 2\sin x\, U_{xy} – \cos^2 x\, U_{yy} – \cos x\, U_y = 0$

   б) $U_{xx} + y\, U_{yy} + 0,5U_y = 0$

в) $U_{xx} - 2\cos x\, U_{xy} + (3+\sin^2 x)U_{yy} - yU_y = 0$

г) $U_{xx} - 2xU_{xy} + x^2 U_{yy} - 2U_y = 0$

д) $U_{xx} - 2\sin x\, U_{xy} - \cos^2 x\, U_{yy} - \cos x\, U_y = 0$

е) $U_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} - 32U = 0$

ж) $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + 9U_x + 9U_y - 9U = 0$

3. Найти общее решение уравнения

а) $\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$ б) $U_{xy}=1$

в) $U_{xy} + \frac{1}{x}U_y = 0$ г) $U_{yx} = 5U_y$

д) $U_{xy} + yU_y - U = 0$ е) $U_{xx} - U_{yy} = 0$

ж) $2U_{xx} - 5U_{xy} + 3U_{yy} = 0$ з) $y^2 U_{xx} + yU_{yy} + 0{,}5U_y = 0$ $(y<0)$

4. Решить задачу Коши для уравнения

$$U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} = 0$$

с данными

$$U(x,y)|_{y=0} = 3x^2, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

5. Решить задачу Гурса для уравнения

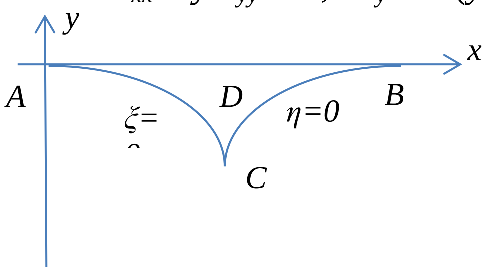
$$U_{xx} + 6U_{xy} + 5U_{yy} = 0$$

с данными

$$U(x,y)|_{y=x} = \psi_1(x), \qquad U(x,y)|_{y=5x} = \psi_2(x), \qquad \psi_1(0) = \psi_2(0).$$

6. Для уравнения

$$U_{xx} + yU_{yy} + 0{,}5U_y = 0 \ (y<0) \qquad (1)$$



в области D (см. рис.), где AC и CB – характеристики уравнения (1), $B= (1,0)$, решить следующие задачи с краевыми данными:

а) 1) $U(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1,$

2) производная $U_y(x,0)$ ограничена;

б) 1) $U(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1,$

2) $\lim_{y\to 0-0}(-y)^{\frac{1}{2}}U_y(x,y) = \nu(x), 0 < x < 1;$

в) 1) $U(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1,$

2)$U(x,y)|_{AC} = \psi(x), 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tau(0) = \psi(0);$

г) 1) $\lim_{y\to 0-0}(-y)^{\frac{1}{2}}U_y(x,y) = \nu(x), 0 < x < 1,$

2)$U(x,y)|_{AC} = \psi(x), 0 \le x \le \frac{1}{2};$

д) 2)$U(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), 0 \le x \le \frac{1}{2};$

2)$U(x,y)|_{CB} = \psi_2(x), \frac{1}{2} \le x \le 1, \psi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{1}{2}\right);$

где во всех пяти задачах функции $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные достаточно гладки функции.

7. Показать, что задача Коши для уравнения

$$U_{xx} + yU_{yy} + 0{,}5U_y = 0\ (y<0) \qquad (2)$$

в классической постановке

$$U(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1,\ U_y(x,0) = \nu(x),\ 0 < x < 1$$

поставлена некорректно.

8. Доказать, что видоизмененная задача Коши для уравнения (2) с данными:

$$U(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1;\ \lim_{y\to 0-0}(-y)^{\frac{1}{2}}U_y(x,y) = \nu(x), 0 < x < 1,$$

поставлена корректно.

9. Построить общее решение уравнения третьего порядка

$$U_{xxx} - U_{yyx} = 0 \qquad (3)$$

10. Доказать, что краевая задача для уравнения (3) с данными:

$$U(x,0)=\varphi_1(x), \quad U_y(x,0)=\varphi_2(x), \quad U_{yy}(x,0)=\varphi_3(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\varphi_i(x)$ $i=1,2,3$ – заданные достаточно гладкие функции, поставлена некорректно.

11. Найти решение краевой задачи для уравнения (3) по данным:

$$U(0,y)=\varphi_1(y), \qquad U_x(0,y)=\varphi_2(y), \qquad U_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), \qquad 0 \le y \le 1,$$

где $\varphi_i(x)$ $i=1,2,3$ – заданные достаточно гладкие функции.

12. Построить решение уравнения струны

$$U_{xx} - U_{tt} = 0 \qquad (4)$$

по граничным данным

$$U(x,t)|_{t=x} = \varphi(x), \ \left.\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=-x} = \psi(x), \qquad 0 \le x < +\infty,$$

где φ и ψ – заданные функции, и обосновать её единственность.

13. Корректно ли поставлена краевая задача для уравнения (4) с данными:

$$U(x,t)|_{t=x} = \varphi(x), 0 \le x < +\infty,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=x} = \psi(x), 0 \le x < +\infty,$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции.

14. Доказать, что если функция $U(x,y)$ является гармонической в области D, то произведение $U_x U_y$ – также является гармонической в области D.

15. Найти точку экстремума гармонической функции $U(x,y)$ в $\overline{D}$, если:

$$U(x,y) = xy, \qquad D = \{x^2 + y^2 < 1\}.$$

16. Доказать, что формула

$$U(x,y) = e^{\lambda x+\mu y} V(x,y),$$

где $V(x,y)$ – гармоническая функция, дает общее решение уравнения эллиптического типа

$$U_{xx} + U_{yy} - 2\lambda U_x - 2\mu U_y + (\lambda^2 + \mu^2)U = 0$$

с постоянными коэффициентами λ и μ.

17. На основании формулы, выражающей теорему о среднем, вывести принцип экстремума для гармонической функции.

18. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$E(x,t) = E(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}},$$

где $|x-y|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$, y_i – действительные параметры, при $t > 0$ являются решением уравнения теплопроводности

$$U_t - \Delta U \equiv U_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = 0.$$

19. Решить интегральные уравнения:

a) $\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)dt$;

b) $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (x-1)\varphi(t)dt$;

c) $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - t)\varphi(t)dt$, $f(x) \in C[0;2\pi]$;

d) $\varphi(x) = \sin x + \int_0^{\pi} \cos t \, \varphi(t)dt$;

e) $\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \varphi(t)dt$, $a \le x \le b$, где $f(x)$ - заданная непрерывная на $[a;b]$ функция.

20. Решить уравнение $\varphi(x) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\varphi(t)dt = 2x - 4$.

21. Проверить, что функция $y(x) = 1 - x$ является решением интегрального уравнения $\int_0^x e^{x-t} y(t)dt = x$.

22. Решить уравнение $y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1$.

23. Найти общее решение дифференциального уравнения $y = xy' + x^2 y''$, $y = y(x)$.

24. Найти все решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = x' + \dfrac{xy'}{y}; \\ x'y + xy' = 1, \ \ x = x(t), \ \ y = y(t). \end{cases}$$

25. Решить дифференциальные уравнения:

a) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;

b) $y'' + y = 2tgx$;

c) $x^2 y''-4xy'+6y=0$;

d) $y'+2y^2=\frac{6}{x^2}$;

e) $x\,y'+2y+x^5 y^3 e^x=0$;

f) $y''-x\,y'-y=0$.

Критерии оценки

«ОТЛИЧНО»

- полно раскрыто содержание материала в объеме программы;
- четко и правильно даны определения, раскрыто содержание понятий;
- верно использованы научные термины;
- ответ самостоятельный, использованы ранее приобретенные знания;
- четко прослеживается межпредметная связь с историей и философией науки, специальными дисциплинами и др;
- при ответе раскрыты причинно-следственные связи, закономерности.

«ХОРОШО»

- раскрыто основное содержание материала;
- в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины;
- ответ самостоятельный;
- при определении понятий допущены неточности, нарушена последовательность изложения;
- небольшие недостатки при использовании научной терминологии;
- небольшие неточности в выводах.

«УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО»

- усвоено основное содержание учебного материала, изложено фрагментарно не всегда последовательно;
- определения понятий недостаточно четкие;
- допущены существенные ошибки и неточности в использовании научной терминологии.

«НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО»

- не усвоено основное содержание учебного материала, изложено фрагментарно, не последовательно;
- определения понятий не четкие;
- допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии определение понятий.

Литература

Основная.

№ п/п	Наименование учебной литературы	Автор, место издания, издательство год
1	2	3
1	Уравнения математической физики.	Владимиров В.С., Жаринов В.В. М.: Физматлит, 2000.
2	Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.	Лионс Ж.-Л. М.: Наука, 1983.
3	Практический курс по уравнениям математической физики.	Пикулин В.П., Похожаев С.И. М.: Наука, 1995.
4	Обыкновенные дифференциальные уравнения.	Понтрягин Л.С. М.: Наука, 1998 (и последующие издания).
5	Дифференциальные уравнения в частных производных.	Михайлов В.П.
6	Уравнения математической физики.	Тихонов А.Н., Самарский А.А. М.: ГИТТЛ, 1953 (и последующие издания).
7	Дифференциальные уравнения.	Трикоми Ф. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
8	Обыкновенные дифференциальные уравнения.	Федорюк М.В. М.: Наука, 1980.
9	Курс высшей математики.	Смирнов В.И. Т.IV, ч. I, II, М.: Наука, 1981, 550 с.
10	Оптимальное управление.	Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. М.: Наука, 1979.

№ п/п	Наименование учебной литературы	Автор, место издания, издательство год
11	Лекции об уравнениях с частными производными.	Петровский И.Г. М.: Физматгиз, 1950, 303 с.
12	Краевые задачи математической физики.	Ладыженская О.А. М.: Наука, 1973, 404 с.

Дополнительная.

№ п/п	Наименование учебной литературы	Автор, место издания, издательство год
1	2	3
1	Обыкновенные дифференциальные уравнения.	Арнольд В.И. М.: Наука, 1971.
2	Дифференциальные уравнения математической физики.	Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. М.: Изд-во МГТУ, 1996.
3	Лекции об уравнениях с частными производными.	Петровский И.Г. М.: Наука, 1961.
4	Дифференциальные уравнения.	Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. М.: Наука, 1985.
5	Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.	Шубин М.А. М.: Наука, 1978.