

На правах рукописи



ДАО НГОК КХОА

**РАСЧЁТ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПО МЕТОДУ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ**

Специальность 2.1.9 – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва - 2023

Диссертационная работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ)

Научный руководитель: доктор технических наук, доцент
Филатов Владимир Владимирович

Официальные оппоненты: **Иванов Сергей Павлович**
доктор технических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Поволжский государственный технологический университет», кафедра «Сопротивление материалов и прикладная механика», заведующий кафедрой
Волкова Мария Владимировна
Кандидат технических наук,
Обнинский институт атомной энергетики – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», отделение ядерной физики и технологий, доцент

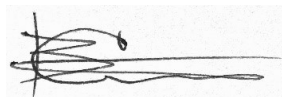
Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (ВолгГТУ)

Защита состоится «24» Мая 2023 года в 15.00 (по местному времени) на заседании диссертационного совета 24.2.339.05, созданного на базе ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» по адресу: 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д.26, Зал Учёного совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» по адресу: 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26 и на официальном сайте: www.mgsu.ru

Автореферат разослан «__» _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Сидоров Виталий Валентинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертационного исследования. Вьетнам - развивающаяся страна, находящаяся в Юго-Восточной Азии. Экономика Вьетнама постепенно восстанавливается после кризиса и основным драйвером этого процесса является строительная отрасль. Темпы роста строительного сектора во Вьетнаме в период с 2015 по 2019 гг. составляют в среднем 8,8% в год и являются самыми высокими за весь посткризисный период. По данным Главного управления статистики, с точки зрения вклада в ВВП страны строительный сектор занимает третье место среди других отраслей экономики. При этом существует ряд факторов, не только замедляющих темпы роста строительной отрасли, но и являющихся угрозой ее стабильного развития. Низкая производительность труда, недостаточное количество высококвалифицированных инженерно-технических кадров, недостаточная степень внедрения информационных технологий и технологий цифрового моделирования в производственные процессы. Решение этих проблем – важная задача, стоящая не только перед руководством Вьетнама, но и перед всем вьетнамским обществом.

Современные строительные объекты представляют собой сложные пространственные системы, призванные обеспечить высокотехнологичные производственные процессы и процессы жизнеобеспечения. В последние десятилетия наметился рост нетипового строительства, значительно увеличилась массовая доля высотных и большепролетных зданий и сооружений. При проектировании все чаще выдвигаются требования: снижения материалоемкости; выявления резервов несущей способности конструкций; эстетической выразительности сооружений, усложняющих расчетную схему; моделирования процессов возведения и жизненного цикла объектов. Учет нелинейной работы конструкций позволяет строить более адекватные расчетные схемы сооружений и наиболее точно прогнозировать процессы, происходящие во время строительства и эксплуатации сооружения.

Решение практических задач нелинейной строительной механики в подавляющем большинстве случаев выполняется с применением вычислительных комплексов, созданных на базе метода конечных элементов (МКЭ). Для оценки точности и достоверности получаемых таким образом результатов, необходимо развивать другие методы расчета. В данной работе для решения задач по расчету прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке привлекается хорошо себя зарекомендовавший при расчете строительных конструкций метод последовательных аппроксимаций (МПА).

Степень разработанности темы диссертации.

Начало развитию теории расчета конструкций в геометрически нелинейной постановке было положено в работах Л. Эйлера, Г. Кирхгофа, А. Сен-Венана, Ф.Клебша, И.Г. Бубнова, Теодора фон Кармана, А и Л Фепплей, Г.Хенки, С.Леви, Е. Бергмана. С.П. Тимошенко.

Расчету пластин в геометрически нелинейной постановке посвящены работы Полубариновой-Кочиной П.Я., Андреева Л.Е., Вагнера Г., Варвака П. М., Воровича И.И., Григолюка Э.И., Даревского В.М., Зволинского Н.В., Олейникова Г.А., Панова Д.Ю., Подорожного А.А., Постнова В.А., Ромашевского А.Ю., Свердлова И.А., Слепова Б.И., Соколова П.А., Стригунова В.М., Фаерберга И.И., Федергофера К., Феодосьева В.И.

Расчету оболочек в геометрически нелинейной постановке посвящены работы Власова В.З., Вольмира А.С., Галимова К.З., Ганеева М.С., Иванова С.П., Муштари Х.М., Новожилова В.В.

Развитию теории расчета конструкций, контактирующих с упругим основанием посвятили свои труды многие российские ученые: Андреев В.И., Болотин В.В., Власов В.З., Герсеванов Н.М., Горбунов-Посадов М.И., Демин И.И., Динник А.М., Жемочкин Б.Н., Ишкова А.Г., Киселев В.А., Клейн Г.К., Коренев Б.Г., Коренева Е.Б., Крылов А.Н., Кузнецов С.В., Леонтьев Н.Н., Пастернак П.Л., Саргсян А.Е., Симвулиди И.А., Сеницын А.П., Соболев Д.Н., Травуш В.И., Цейтлин А.И., Цытович Н.А. и др.

Исследования Акимова П.А., Белостоцкого А.М., Бурмана З.И., Вольмира А.С., Габбасова Р.Ф., Корнишина М.С., Мкртычева О.В., Постнова В.А., Резникова Р.А., Розина Л.А.,

Сахарова А.С., Смирнова А.Ф. и иных учёных внесли важный вклад в развитие численных методов при расчете конструкций с учетом больших прогибов.

Целью диссертационной работы является разработка методики, алгоритмов и программ для расчёта гибких прямоугольных пластин на статические нагрузки с применением разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА) без упругого основания и на упругом основании.

В соответствии с поставленной целью были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Выполнен обзор работ, посвященных расчету пластин и оболочек в геометрически нелинейной постановке.

2. Разработана методика, алгоритм и программа расчёта на ЭВМ прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА) без учета контакта с упругим основанием.

3. Разработана методика, алгоритм и программа расчёта на ЭВМ прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА) с учетом полного и частичного контакта с упругим основанием.

4. Выполнено сравнение полученных результатов с известными аналитическими и численными решениями

Объектом исследования являются прямоугольные гибкие пластины, в том числе, взаимодействующие с упругим основанием.

Предметом исследования является напряженно-деформированное состояние гибких прямоугольных пластин под действием статических нагрузок без упругого основания и на упругом основании.

Научная новизна диссертационного исследования состоит:

1. Разработана методика расчета прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке с использованием разностных уравнений МПА. Разработан алгоритм расчета гибких пластин и составлена программа для ЭВМ с использованием программного пакета MATLAB.

2. Разработана методика, учитывающая влияние частичного или полного контакта с упругим основанием на НДС гибких пластин прямоугольного очертания. Разработан алгоритм расчета и составлена программа для ЭВМ.

3. Получено решение новых задач по расчёту гибких прямоугольных пластин: с различными граничными условиями на действие разрывных нагрузок, с учётом неполного контакта с упругим основанием и на упругом основании с переменным коэффициентом отпора.

Соответствие темы диссертации требованиям паспорта специальностей ВАК. Диссертация выполнена в рамках специальности 2.1.9 — «Строительная механика» (Технические науки); п.2. Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета; п.4. Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в разработке методики, алгоритмов и программ для расчёта на ЭВМ прямоугольных пластинок в геометрически нелинейной постановке с привлечением разностных уравнений МПА. Возможность учета работы гибкой пластины при неполном контакте с упругим основанием позволяет выполнять расчеты при прогнозировании влияния аварийных воздействий и проверять остаточный ресурс конструкции при известных параметрах аварийного воздействия. Под аварийным воздействием здесь следует понимать возможные карстовые провалы, подмывы грунта и т.п. Методика позволяет оценивать НДС при заданных, в том числе больших, осадках основания.

Методология и методы исследований: в ходе проведения исследований использовались классические положения теории упругости, строительной механики, теории расчета пластин с учетом больших прогибов. Численная реализация построена на применении метода последовательных аппроксимаций (МПА), хорошо себя зарекомендовавшего при расчете пластин и оболочек на действие разрывных нагрузок, на упругом основании.

Достоверность полученных результатов базируется на строгой математической постановке задач, на хорошем совпадении с известными ранее опубликованными результатами других авторов, на численном исследовании сходимости решения для всех решенных задач.

Апробация результатов результаты диссертационной работы были доложены на международных конференциях: 1 доклад на международной конференции «XXVIII R-P-S Seminar 2019» с 9 по 13 сентября 2019, Žilina, Slovakia, 2 доклада на III международной научно-технической конференции “Строительство и архитектура: теория и практика инновационного развития” (CAPID 2020) с 28 по 30 сентября 2020 в онлайн формате и 1 доклад на Первой Национальной конференции «Актуальные проблемы строительной отрасли и образования» 30 сентября 2020.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликованы 3 статья в журналах, входящих в перечень Scopus, одна статья в журнале, включенной в Перечень рецензируемых научных изданий и одна публикация в других научных журналах и изданиях.

Личный вклад автора: заключается в том, что непосредственно автором была составлена методика, алгоритм и программы расчета гибких пластина на упругом основании и без упругого основания на базе разностных уравнений последовательных аппроксимаций (МПА). Лично автором решены новые задачи по расчету гибких пластин без упругого основания с учетом различных краевых условий и действия разрывных нагрузок, и задачи по расчету гибких пластин на упругом основании, в том числе при неполном контакте с упругим основанием и с переменным коэффициентом отпора.

На защиту выносятся следующие научные результаты, полученные автором:

1. Методика, алгоритмы и программы расчёта гибких пластин без упругого основания и на упругом основании на основе разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА).

2. Результаты решения новых задач по расчёту гибких пластин без упругого основания с учетом различных краевых условий и действия разрывных нагрузок

3. Результаты решения новых задач по расчету гибких пластин на упругом основании, при неполном контакте с упругим основанием, с учетом контакта с основанием переменной жесткости.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа содержит введение, 4 главы, основные выводы и заключение, библиографический список, состоящий из 222 наименований, и двух приложений. Объем диссертации составляет 150 страницы машинописного текста, 13 таблиц и 57 рисунков в основном тексте.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируются цели и задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, оценивается достоверность полученных результатов.

Глава 1. Автор приводит краткий экскурс по развитию теории расчета гибких пластин. Приведен обзор литературы по расчёту пластин в геометрически нелинейной постановке и в меньшей степени по расчету гибких оболочек.

В отдельные параграфы автором вынесены обзор работ, посвященных расчету гибких пластин, контактирующих с упругим основанием и обзор работ по расчету конструкций методом последовательных аппроксимаций (МПА). Указанный метод позволяет эффективно учитывать конечные разрывы параметров нагрузки, характеристик конструкции и основания.

Во второй главе построен алгоритм расчета прямоугольных пластин на статические нагрузки с учетом геометрически нелинейности на базе разностных уравнений последовательных аппроксимаций.

Запишем систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок, известных как уравнения фон Кармана:

$$\frac{D}{H} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{H} q; \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (2)$$

где: H – толщина пластинки;

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)} - \text{цилиндрическая жёсткость};$$

μ – коэффициент Пуассона;

q – интенсивность поперечной нагрузки, распределённой по заданному закону;

E – модуль упругости материала;

x, y – координаты.

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

Φ – функция напряжений;

w – прогиб (вертикальное перемещение по оси z);

Далее для удобства построения численного решения преведём систему разрешающих уравнений (1) и (2) к безразмерному виду:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{q}. \quad (3)$$

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \psi = -k \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right), \quad (4)$$

где: $k = \frac{EHa^2}{D}$.

$$\psi = \frac{\Phi H}{D}; \bar{w} = \frac{w}{a}; \xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{a}; \quad (5)$$

$$\bar{\nabla}^2 = a^2 \nabla^2; \bar{q} = \frac{qa^3}{D}. \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{w} = -m; \text{ или } \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = -m; \quad (7)$$

$$\bar{\nabla}^2 \psi = -f; \text{ или } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} = l; \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = n; \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} = t; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = b; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = c; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = d. \quad (10)$$

Уравнение (3) запишем так:

$$\bar{\nabla}^2 m = -(bn + cl - 2dt) - \bar{q}. \quad (11)$$

Аналогично запишем (4):

$$\bar{\nabla}^2 f = k(nl - t^2). \quad (12)$$

Если обозначим обобщенный изгибающий момент $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}$, то

$$M = \frac{D \cdot m}{a}. \quad (13)$$

Для численного решения уравнений (3) и (4) обозначим:

$$\lambda = cl + bn - 2dt; \quad (14)$$

$$\alpha = k(t^2 - nl); \quad (15)$$

$$g = \lambda + \bar{q} \quad (16)$$

Тогда алгоритм решения уравнений (3) и (4) сводится к совместному решению системы четырёх дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -g; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = -m; \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = -\alpha; \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f; \quad (20)$$

Алгоритм решения системы уравнений (17) – (20) следующий. На первом этапе решаем задачу в линейной постановке. Из решения (17) при $\lambda=0$ и, как следствие из (16) $g = \bar{q}$, найдем значения функции m . Подставляя найденные m в (18) вычислим значения \bar{w} . По известным значениям прогибов численно определим производные, т.е. используя (9) найдем значения l , n и t . По (15) вычислим α . Определив правую часть, решаем уравнение (19). Из его решения найдем значения функции f . Это позволит перейти к решению (20) и определить ψ . Вычислив по (10) вторые частные производные от ψ , найдем b , c и d . Определим по (14) параметр λ .

Выполнив несложные преобразования с разностными аналогами уравнений (17) – (20) и выражая g и λ через функцию прогибов \bar{w} , можно показать, что параметр λ пропорционален третьей степени \bar{w} , а g – первой. Введем обозначения:

$$k_\lambda = \frac{\lambda}{\bar{w}^3}; \quad k_g = \frac{g}{\bar{w}} \quad (21)$$

и вычислим значения введенных коэффициентов. Поставим (21) в уравнение (16) и запишем его так:

$$k_\lambda \bar{w}^3 - k_g \bar{w} + q = 0 \quad (22)$$

Решая (22) получим уточненное значение \bar{w} . Используя уравнение (21), находим уточнённое значение параметра g .

Сравниваем текущее значение и значение g в начале итерации. Если разница больше наперед заданного малого значения, цикл повторяется.

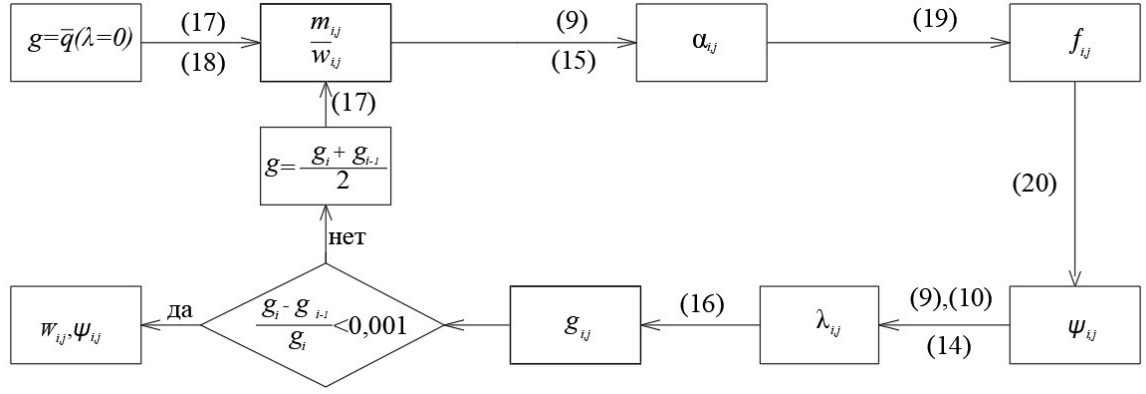
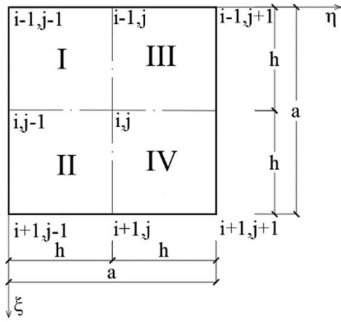


Рисунок 1. Блок-схема решения гибких пластин на статические нагрузки.

Габбасовым Р.Ф. предложена разностная аппроксимация (МПА) дифференциального уравнения в частных производных второго порядка общего вида:

$$\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi^2} + \delta_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi} + \beta_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \eta^2} \right) = -p. \quad (23)$$



Дифференциальные уравнения (17)-(20) являются частными случаями (23). Поэтому мы можем использовать разностные уравнения МПА для аппроксимаций дифференциальных уравнений типа (17)-(20). На рисунке 2 обозначена нумерация областей, примыкающих к расчетной точке i,j , в которой искомая функция и ее первые две частные производные могут претерпевать конечный разрыв.

Рисунок 2. Часть расчётной сетки в регулярной точке i,j .

Разностное уравнение МПА аппроксимирующее (17) в регулярной точке области интегрирования:

$$\begin{aligned} & m_{i-1,j-1} + 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + \\ & + 4m_{i,j-1} - 20m_{ij} + 4m_{i,j+1} + \\ & + m_{i+1,j-1} + 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1} - 0,5h \left({}^{I-II} \Delta m_{i,j-1}^\xi - 7^{I-II} \Delta m_{i,j}^\xi - 7^{III-IV} \Delta m_{i,j}^\xi + \right. \\ & \left. + {}^{III-IV} \Delta m_{i,j+1}^\xi \right) - 0,5h \left({}^{I-III} \Delta m_{i-1,j}^\eta - 7^{I-III} \Delta m_{i,j}^\eta - 7^{II-IV} \Delta m_{i,j}^\eta + \right. \\ & \left. + {}^{II-IV} \Delta m_{i+1,j}^\eta \right) = -\frac{3}{2} h^2 \left({}^I g_{ij} + {}^{II} g_{ij} + {}^{III} g_{ij} + {}^{IV} g_{ij} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

В этом уравнении:

${}^I g_{ij}$, ${}^{II} g_{ij}$, ${}^{III} g_{ij}$, ${}^{IV} g_{ij}$ – значения g в точке i,j , принадлежащие I , II , III , IV области соответственно (рисунок 2);

$$m_{i,j}^\xi = \frac{\partial m}{\partial \xi}_{i,j}; \quad m_{i,j}^\eta = \frac{\partial m}{\partial \eta}_{i,j};$$

${}^{I-II} \Delta m_{i,j}^\xi = {}^I m_{i,j}^\xi - {}^{II} m_{i,j}^\xi$, ${}^{III-IV} \Delta m_{i,j}^\xi = {}^{III} m_{i,j}^\xi - {}^{IV} m_{i,j}^\xi$ – разность значений в точке i,j принадлежащих примыкающим к точке областям $I-II$ и $III-IV$.

Остальные величины подобного типа имеют аналогичный смысл.

Разностные уравнения МПА аппроксимирующие (18-20) в регулярной точке области интегрирования:

$$\begin{aligned}
& \bar{w}_{i-1,j-1} + 4\bar{w}_{i-1,j} + \bar{w}_{i-1,j+1} + \\
& + 4\bar{w}_{i,j-1} - 20\bar{w}_{ij} + 4\bar{w}_{i,j+1} + \\
& + \bar{w}_{i+1,j-1} + 4\bar{w}_{i+1,j} + \bar{w}_{i+1,j+1} = -\frac{h^2}{12} (m_{i-1,j-1} + 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + \\
& + 4m_{i,j-1} + 52m_{ij} + 4m_{i,j+1} + m_{i+1,j-1} + 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1}) + \\
& + \frac{h^3}{24} ({}^{I-II} \Delta m_{i,j-1}^\xi + 5{}^{I-II} \Delta m_{i,j}^\xi + 5{}^{III-IV} \Delta m_{i,j}^\xi + {}^{III-IV} \Delta m_{i,j+1}^\xi + \\
& + {}^{I-III} \Delta m_{i-1,j}^\eta + 5{}^{I-III} \Delta m_{i,j}^\eta + 5{}^{II-IV} \Delta m_{i,j}^\eta + {}^{II-IV} \Delta m_{i+1,j}^\eta).
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& f_{i-1,j-1} + 4f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} + \\
& + 4f_{i,j-1} - 20f_{ij} + 4f_{i,j+1} + \\
& + f_{i+1,j-1} + 4f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} = -\frac{h^2}{12} (\alpha_{i-1,j-1} + 4\alpha_{i-1,j} + \alpha_{i-1,j+1} + \\
& + 4\alpha_{i,j-1} + 52\alpha_{ij} + 4\alpha_{i,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + 4\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i+1,j+1}) + \\
& + \frac{h^3}{24} ({}^{I-II} \Delta \alpha_{i,j-1}^\xi + 5{}^{I-II} \Delta \alpha_{i,j}^\xi + 5{}^{III-IV} \Delta \alpha_{i,j}^\xi + {}^{III-IV} \Delta \alpha_{i,j+1}^\xi + \\
& + {}^{I-III} \Delta \alpha_{i-1,j}^\eta + 5{}^{I-III} \Delta \alpha_{i,j}^\eta + 5{}^{II-IV} \Delta \alpha_{i,j}^\eta + {}^{II-IV} \Delta \alpha_{i+1,j}^\eta).
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
& \psi_{i-1,j-1} + 4\psi_{i-1,j} + \psi_{i-1,j+1} + \\
& + 4\psi_{i,j-1} - 20\psi_{ij} + 4\psi_{i,j+1} + \\
& + \psi_{i+1,j-1} + 4\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j+1} = -\frac{h^2}{12} (f_{i-1,j-1} + 4f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} + \\
& + 4f_{i,j-1} + 52f_{ij} + 4f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} + 4f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) + \\
& + \frac{h^3}{24} ({}^{I-II} \Delta f_{i,j-1}^\xi + 5{}^{I-II} \Delta f_{i,j}^\xi + 5{}^{III-IV} \Delta f_{i,j}^\xi + {}^{III-IV} \Delta f_{i,j+1}^\xi + \\
& + {}^{I-III} \Delta f_{i-1,j}^\eta + 5{}^{I-III} \Delta f_{i,j}^\eta + 5{}^{II-IV} \Delta f_{i,j}^\eta + {}^{II-IV} \Delta f_{i+1,j}^\eta).
\end{aligned} \tag{27}$$

Полная система алгебраических уравнений состоит из уравнений (24) – (27), записанных для все регулярных точек, с учётом краевых условий:

$$\text{- жесткая заделка: } \bar{w} = 0; \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = 0; m = -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \text{ и } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

- шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опора:

$$\bar{w} = 0; m = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

- свободного от закреплений:

$$q^{(n)} = 0; m = -(1-\mu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Таким образом, исходная система двух дифференциальных неоднородных нелинейных уравнений четвёртого порядка (1,2) сводятся к четырём однотипным дифференциальным

уравнением второго порядка (17-20).

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных привлекается метод последовательных аппроксимаций (МПА), хорошо себя зарекомендовавший при решении уравнений типа Пуассона.

Разностные уравнения МПА (24-27) позволяют производить расчет гибких пластин с различными видами краевых условий на действие различных нагрузок, в том числе разрывных.

В главе 3 разработанная выше методика расчёта гибких прямоугольных пластин обобщается на случай контакта с упругим основанием. При расчете гибких пластинок на упругом основании типа Винклера в дифференциальном уравнении (1) вместо q будем иметь $q-Kw$. Так как уравнение (2) не изменится, запишем ниже только измененное уравнение (1):

$$\frac{D}{H} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{H} (q - Kw); \quad (28)$$

где: K – коэффициент постели.

Запишем дифференциальное уравнение (28) в безразмерном виде:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} + (\bar{q} - \bar{K} \bar{w}). \quad (29)$$

где безразмерные величины:

$$\bar{K} = \frac{a^4 K}{D}.$$

При сохранении всех предыдущих обозначений, в разрешающей системе безразмерных дифференциальных уравнений (17) – (20) изменится только уравнение (17):

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -(g - \bar{K} w); \quad (30)$$

Запишем аппроксимацию уравнения (30) разностным уравнением МПА во внутренней точке i, j на квадратной сетке:

$$\begin{aligned} & m_{i-1, j-1} + 4m_{i-1, j} + m_{i-1, j+1} + \\ & + 4m_{i, j-1} - 20m_{ij} + 4m_{i, j+1} + \\ & + m_{i+1, j-1} + 4m_{i+1, j} + m_{i+1, j+1} - 0,5h \left({}^I \Delta m_{i, j-1}^\xi - 7 {}^I \Delta m_{i, j}^\xi - 7 {}^{III-IV} \Delta m_{i, j}^\xi + \right. \\ & \left. + {}^{III-IV} \Delta m_{i, j+1}^\xi \right) - 0,5h \left({}^{I-III} \Delta m_{i-1, j}^\eta - 7 {}^{I-III} \Delta m_{i, j}^\eta - 7 {}^{II-IV} \Delta m_{i, j}^\eta + \right. \\ & \left. + {}^{II-IV} \Delta m_{i+1, j}^\eta \right) = -\frac{3}{2} h^2 \left({}^I g_{ij} + {}^{II} g_{ij} + {}^{III} g_{ij} + {}^{IV} g_{ij} \right) + \Omega_1. \end{aligned} \quad (31)$$

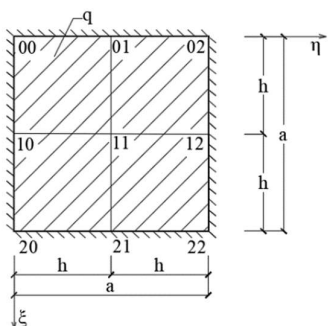
где:

$$\Omega_1 = \frac{h^2}{12} \left(\begin{aligned} & {}^I \bar{K}_{i-1, j-1} \bar{w}_{i-1, j-1} + 2 \left({}^I \bar{K}_{i-1, j} + {}^{III} \bar{K}_{i-1, j} \right) \bar{w}_{i-1, j} + {}^{III} \bar{K}_{i-1, j+1} \bar{w}_{i-1, j+1} + \\ & + 2 \left({}^I \bar{K}_{i, j-1} + {}^{II} \bar{K}_{i, j-1} \right) \bar{w}_{i, j-1} + 13 \left({}^I \bar{K}_{i, j} + {}^{II} \bar{K}_{i, j} + \right. \\ & \left. + {}^{III} \bar{K}_{i, j} + {}^{IV} \bar{K}_{i, j} \right) \bar{w}_{ij} + 2 \left({}^{III} \bar{K}_{i, j+1} + {}^{IV} \bar{K}_{i, j+1} \right) \bar{w}_{i, j+1} + \\ & \left. + {}^{II} \bar{K}_{i+1, j-1} \bar{w}_{i+1, j-1} + 2 \left({}^{II} \bar{K}_{i+1, j} + {}^{IV} \bar{K}_{i+1, j} \right) \bar{w}_{i+1, j} + {}^{IV} \bar{K}_{i+1, j+1} \bar{w}_{i+1, j+1} \right). \end{aligned} \right) \quad (32)$$

Разностное уравнение (31) с учетом (32) позволяет вести расчет пластин, как при полном контакте с упругим основанием, так и при частичном отпоре, т.е при наличии зон, где контакт отсутствует.

Алгоритм расчета аналогичен алгоритму расчета пластин без учета отпора упругого основания, изложенному в главе 2.

Глава 4. посвящена описанию составленных автором программ для ЭВМ по расчету гибких прямоугольных пластин на действие статических нагрузок. Программы составлены в среде MATLAB. Кроме того, в четвертой главе приведены решения тестовых и новых задач по расчету гибких пластин на действие разрывных нагрузок, на сплошном упругом основании, на основании с переменным коэффициентом отпора, при неполном контакте с упругим основанием. Под неполным контактом, в данном случае, следует понимать наличие зон под подошвой конструкции, где отпор основания отсутствует.



1. Расчёт гибкой квадратной пластины, закреплённой по всем краям, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой (рисунок 3). Толщина пластинки $H=0,1\text{ см}$, сторона $a=10\text{ см}$, нагрузка $q=0,5\text{ кг/см}^2$, $E=0,75\cdot 106\text{ кг/см}^2$ и $\mu=0,316$.

Рисунок 3. Квадратная пластинка, закреплённая по свободно сближающимся краям.

Таблица 1. Значения максимального прогиба) при разных шагах сетки.

Шаг сетки h	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$	$h=1/64$
Номер цикла итерации	29	37	38	38	26
Максимальные значения прогиба (см)	0,075	0,0766	0,0778	0,0782	0,0782
Расхождение максимальных прогибов по сравнению с результатом Вольмира	7,12%	5,39%	3,65%	3,28%	3,28%

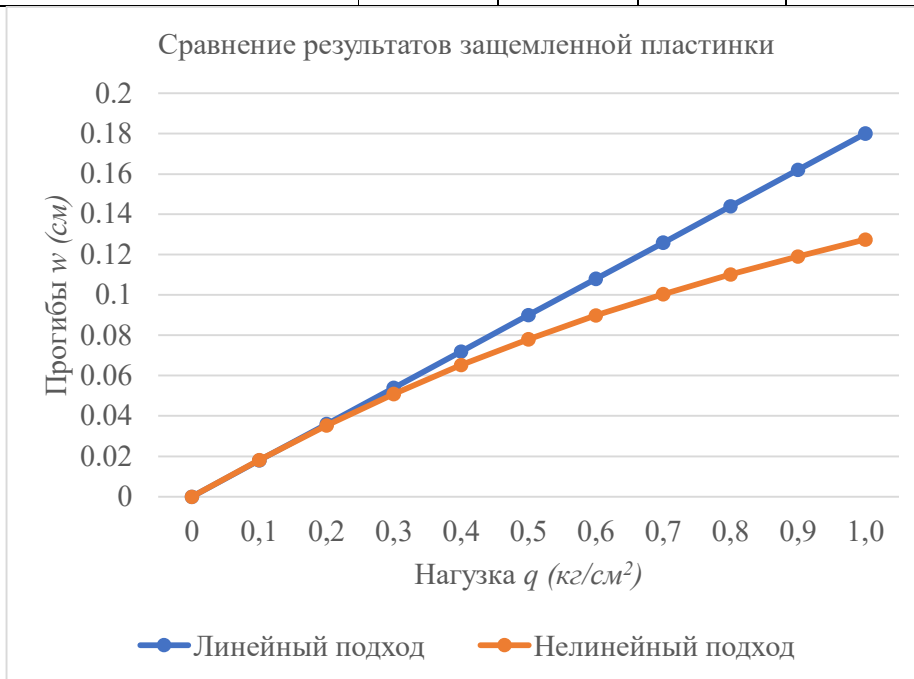
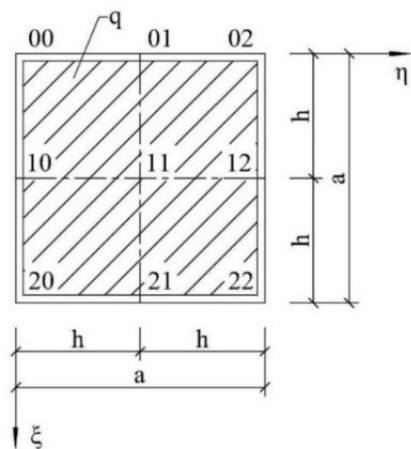


Рисунок 4. Результаты расчета гибкой пластины в линейной и геометрически нелинейной постановке.

Анализируя приведенные на *рисунке 4* графики, мы видим, что при заданных жесткостных характеристиках пластины, ее работа на изгиб удовлетворительно описывается линейной теорией вплоть до достижения прогибов 0,05 длины стороны. В указанных пределах значения прогибов по линейной и геометрически нелинейной теориям почти совпадают.



2. Расчёт шарнирно опёртой гибкой квадратной пластинки со свободно сближающимися краями, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой (рисунк 5). Толщина пластинки $H=0,1\text{см}$, сторона $a=10\text{см}$, нагрузка $q=0,5\text{ кг/см}^2$, $E=0,75\cdot 10^6\text{ кг/см}^2$ и $\mu=0,316$.

Рисунок 5. Квадратная шарнирно опёртая пластинка со свободно сближающимися краями.

Таблица 2. Значения максимального прогиба и изгибающего момента. Сравнение с приближенным результатом А.С Вольмира и решением по обобщённым уравнениям метода конечных разностей (МКР) при разных шагах сетки.

Шаг h	Решение по МПА		Решение по МКР		Аналитическое решение А.С Вольмира
	W_{max} (см)	$M_{11}(x)$ (кг.см)	W_{max} (см)	$M_{11}(x)$ (кг.см)	W_{max} (см)
1/4	0,133	0,936	0,134	0,918	0,1519
1/8	0,141	0,982	0,141	0,976	
1/16	0,143	0,999	0,142	0,998	
1/32	0,143	1,003	0,143	1,003	
1/64	0,142	1,008	0,143	1,004	

В таблице 2 приведены безразмерные значения максимального прогиба и изгибающего момента, полученные двумя численными методами. В первом случае с использованием разностных уравнений МПА, во втором случае с привлечением обобщенных разностных уравнений МКР. Сравнение результатов, полученных этими численными методами, показывает, что при отсутствии таких разрывных параметров как полосовые нагрузки, скачкообразное изменение жесткости (конечные разрывы равномерно распределенной нагрузки учитываются обоими методами) и при достаточно частой сетке они практически совпадают. Т.е., при указанном отсутствии разрывов, обобщенные разностные уравнения МКР обеспечивают ту же точность, что и уравнения МПА. Кроме того, оба метода демонстрируют быструю сходимость решения на вложенных одна в другую расчетных сетках. Погрешность численного решения при сравнении с аналитическом А.С Вольмира составляет $\Delta = 5,86\%$.

3. Квадратная пластинка с двумя шарнирными и двумя заделанными сближающимися краями (рисунок 6). По-прежнему будем считать, что толщина пластинки $H=0,1$ см, сторона $a=10$ см, нагрузка $q=0,5$ кг/см², модуль упругости $E=0,75 \cdot 10^6$ кг/см². Для иллюстрации возможностей алгоритма рассмотрим вариант, где стороны пластины имеют различные краевые условия: две противоположные стороны жёстко зашпелены, а оставшиеся две - шарнирно опёрты.

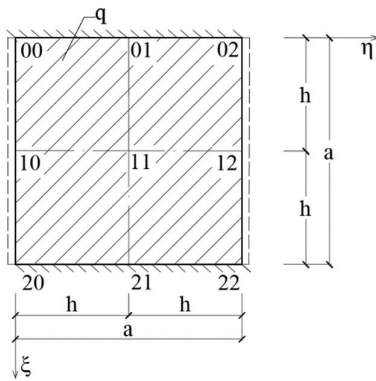


Рисунок 6. квадратная пластинка с двумя шарнирно опёртыми свободно сближающимися краями и двумя свободно зашпелёнными сближающимися краями.

Результаты расчета по МПА и МКР сведены в таблице 3. Отметим, что максимальные значения прогибов больше, чем в задаче, где рассматривалась пластина с зашпелёнными краями и меньше, чем значения прогибов в шарнирно опёртой пластине,

что является качественной оценкой правильности полученного решения.

Таблица 3. Максимальный прогиб изгибающий момент и сравнение с решением по обобщённым уравнениям метода конечных разностей (МКР) при разных шагах сетки.

Таблица 3. Максимальный прогиб изгибающий момент и сравнение с решением по обобщённым уравнениям метода конечных разностей (МКР) при разных шагах сетки.

Шаг h	Решение по МПА					Решение по МКР				
	W_{max} (см)	$M_{11}(y)$ (кг.см)	$M_{11}(x)$ (кг.см)	$M_{01}(y)$ (кг.см)	$M_{01}(x)$ (кг.см)	W_{max} (см)	$M_{11}(y)$ (кг.см)	$M_{11}(x)$ (кг.см)	$M_{01}(y)$ (кг.см)	$M_{01}(x)$ (кг.см)
1/4	0,097	0,771	1,045	-0,832	-2,634	0,115	0,837	0,946	-0,569	-1,8
1/8	0,102	0,806	1,122	-0,895	-2,832	0,109	0,834	0,109	-0,816	-2,581
1/16	0,1037	0,821	1,145	-0,906	-2,867	0,106	0,829	1,135	-0,887	-2,807
1/32	0,1043	0,825	1,151	-0,909	-2,876	0,1048	0,827	1,149	-0,904	-2,862
1/64	0,10435	0,826	1,153	-0,9097	-2,8787	0,1045	0,827	1,152	-0,9085	-2,875

5. Расчёт гибкой квадратной зашпелённой пластинки со свободно сближающимися краям, половина площади которой загружена распределённой нагрузкой одной интенсивности, а вторая половина другой интенсивности. Рассмотрим пример расчета пластины на действие кусочно постоянной распределённой нагрузки. Характеристики пластины оставим прежними. Изменим характер нагружения. На одной половине пластины приложим распределённую нагрузку значения q , а на другой половине – $2q$ (Рисунок 7).

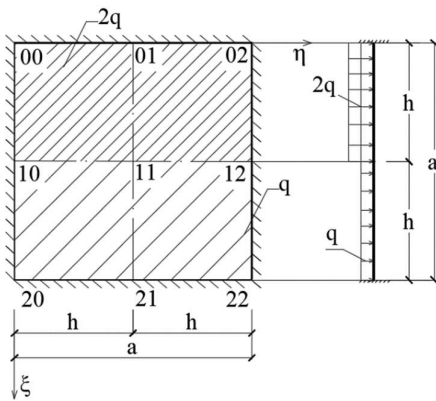


Рисунок 7. Квадратная зашпелённая гибкая пластина.

Таблица 4. Прогиб точки 11 при различных шагах сетки

h	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$
Номер цикла итерации	41	66	62	66
Прогиб точки 11 (см)	0,0962	0,095	0,0963	0,0969

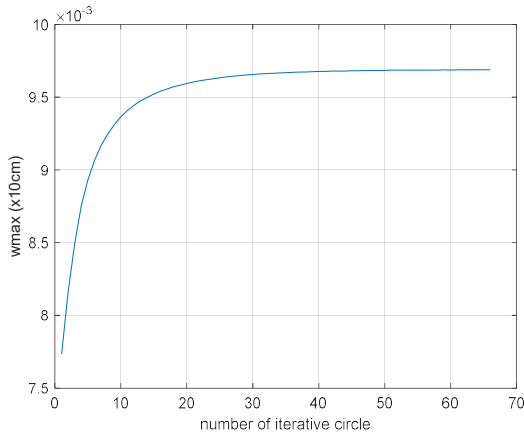


Рисунок 8. Графики изменения прогиба точки 11 по номеру цикла итерации при шаге $h=1/32$

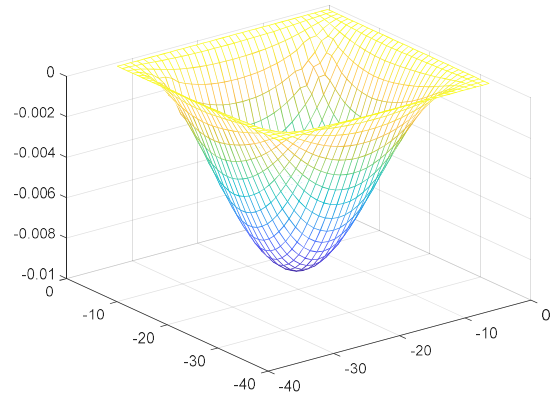


Рисунок 9. Графики прогибов в пластинке при шаге: $h = 1/32$.

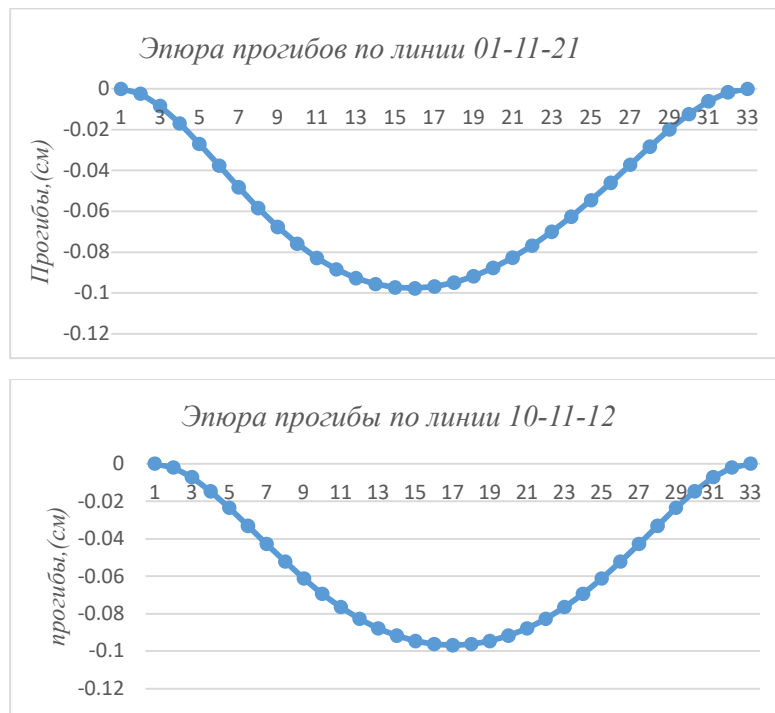


Рисунок 10. Графики прогибов по линии при шаге $h = 1/32$.

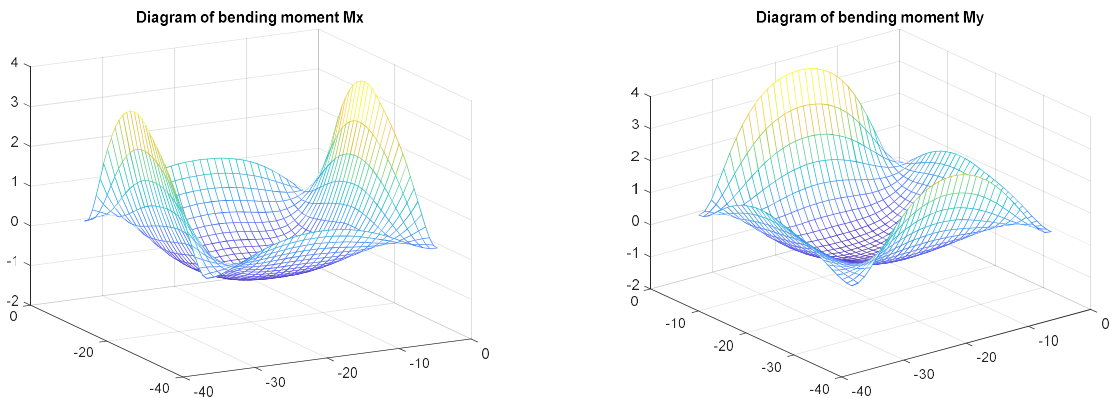


Рисунок 11. Графики моментов в пластинке при шаге $h = 1/32$.

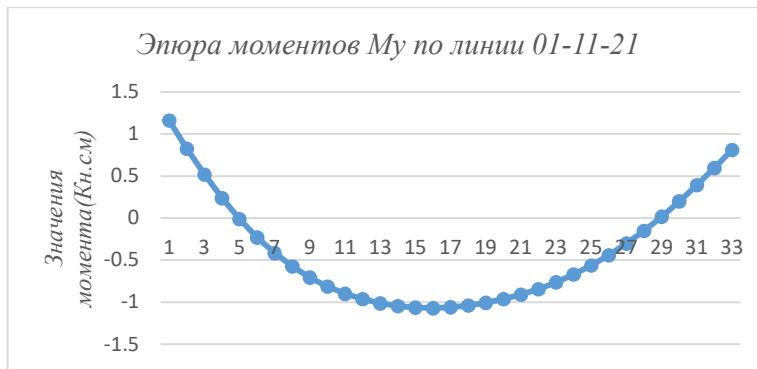
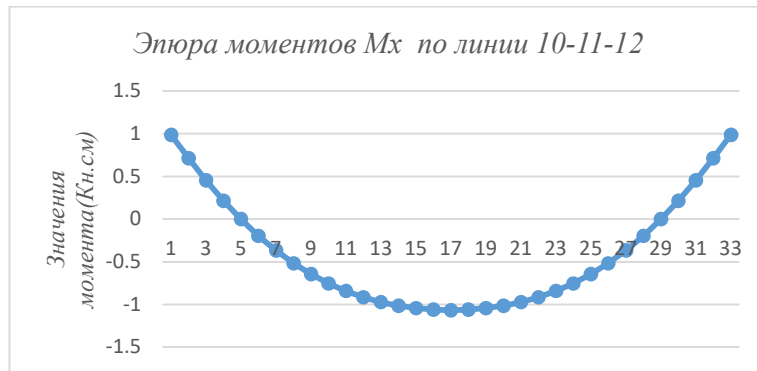
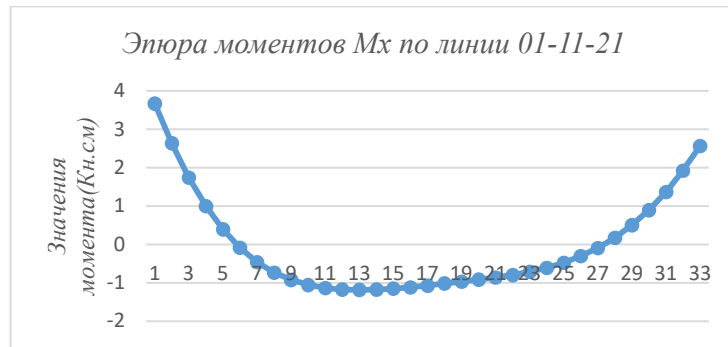


Рисунок 12. Графики изгибающих моментов при $h=1/32$ по линиям 01-11-21 и 10-11-12.

Скорость приближения искомого значения прогиба точки к установившемуся значению в итерационном процессе, в зависимости от числа итераций, проиллюстрирована графиками на рисунке 8.

Анализируя информацию на рисунках 10, 11 и 12 можно отметить, что качественно характер распределения значений изгибающего момента соответствует характеру нагружения. На той половине пластины, где интенсивность распределенной нагрузки выше, значения опорных и пролетных моментов превосходят аналогичные для менее нагруженной половины симметричной пластины.

6. Расчёт шарнирно опёртой гибкой квадратной пластинки со свободно сближающимися краями, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой, с учетом отпора упругого основания. Характеристики пластинки и характер нагружения заимствуем из параграфа 2, а именно: толщина пластинки $H=0,1\text{см}$, сторона $a=10\text{см}$, нагрузка $q=0,5\text{кг/см}^2$, $E=0,75\cdot 10^6\text{кг/см}^2$ и $\mu=0,316$; Пластина всей поверхностью контактирует с упругим основанием винклеровского типа, где $K=2,15\text{кг/см}^3$ – принятое значение коэффициента жесткости основания (коэффициента пропорциональности отпора упругого основания). (Рисунок 13)

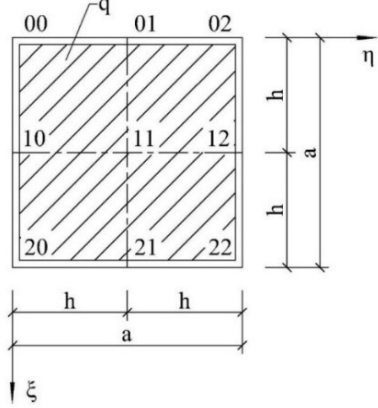


Рисунок 13. Шарнирно опёртая гибкая квадратная пластинка со свободно сближающимися краями.

Таблица 5. Прогиб точки 11 при различных шагах сетки для трех вариантов расчетной схемы пластины.

Шаг расчетной сетки h	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$	$h=1/64$
Максимальные прогибы гибкой пластины на сплошном упругом основании (см)	0,1097	0,1168	0,1177	0,118	0,1181
Прогибы точки 11 гибкой пластины, половина которой покоится на упругом основании(см)	0,1212	0,1291	0,1306	0,1308	0,1308
Максимальные прогибы гибкой пластины без упругого основания (см)	0,133	0,141	0,143	0,143	0,142

Полученные значения максимальных прогибов для пластины, частично опирающейся на упругое основание, меньше чем значения прогибов пластины без основания и больше, чем у пластины полностью лежащей на упругом основании, что качественно подтверждает полученные результаты.

7. Расчёт гибкой квадратной пластинки, со свободно сближающимися защемлёнными краями, с учётом отпора упругого основания. По прежнему будем считать, что толщина пластинки $H=0,1\text{ см}$, сторона $a=10\text{см}$, нагрузка $q=0,5\text{кг/см}^2$, модуль упругости $E=0,75\cdot 10^6\text{кг/см}^2$, коэффициент Пуассона $\mu=0,316$. Коэффициент отпора упругого основания по модели Винклера $K=2,15\text{кг/см}^3$ (Рисунок 14).

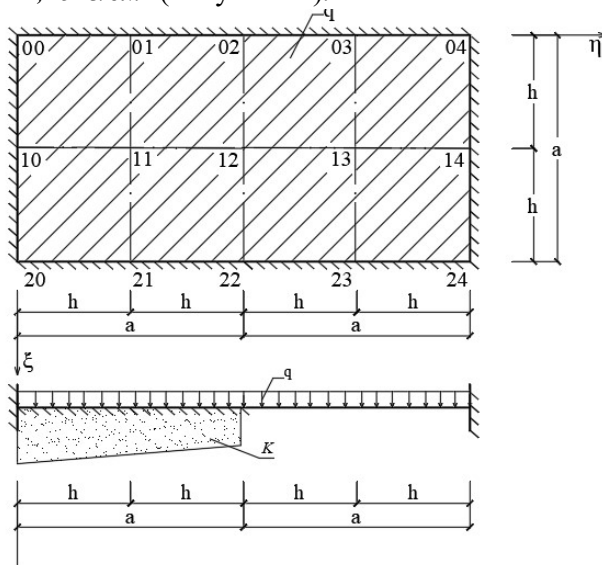


Рисунок 14. Прямоугольная защемлённая пластинка со свободно сближающимися краями

Численная методика позволяет задавать произвольный закон изменения характеристики отпора основания по площади опирания пластины. Граница основания проходит по линии 02-12-22 (рис.14). Рассмотрим окрестности точки 12. Нумерация зон, примыкающих к точке i,j приведена на рисунке 2. Запишем значения параметра K в точках 02, 12, 22: приведены на рисунке 14. Значения параметра K в точках 02, 12, 22: $^I K_{12} = ^{II} K_{12} = K$, $^{III} K_{12} = ^{IV} K_{12} = 0$, $^I K_{02} = ^I K_{22} = K$, $^{III} K_{02} = ^{IV} K_{22} = 0$. Запишем уравнение (31) для точки 12 и указанных выше значений $K_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
& m_{01} + 4m_{02} + m_{03} + \\
& + 4m_{11} - 20m_{12} + 4m_{13} + \\
& + m_{21} + 4m_{22} + m_{23} - \\
& - \frac{h^2}{12} \left(\begin{array}{l} \overline{Kw}_{01} + 2\overline{Kw}_{02} + 0\overline{w}_{03} + \\ + 4\overline{Kw}_{11} + 26\overline{Kw}_{12} + 0\overline{w}_{13} + \\ + \overline{Kw}_{21} + 2\overline{Kw}_{22} + 0\overline{w}_{23} \end{array} \right) = -\frac{3}{2}h^2 \left({}^I g_{12} + {}^{II} g_{12} + {}^{III} g_{12} + {}^{IV} g_{12} \right).
\end{aligned} \tag{33}$$

Сравнение прогибов в точке 12 прямоугольной пластины на упругом основании, при неполном контакте и без учета отпора приведено в таблице 6.

Таблица 6. Прогиб точки 11 при различных шагах сетки

h	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$
Максимальные прогибы гибкой пластины на сплошном упругом основании (см)	0,10296	0,1075	0,10887	0,10923
Прогибы точки 12 гибкой пластины (Рисунок 14), половина которой на упругом основании (см)	0,1241	0,1274	0,1287	0,12905
Максимальные прогибы гибкой пластины без упругого основания (см)	0,15102	0,15119	0,15193	0,15215

8. Рассмотрим ту же пластину, но при иных условиях опирания на упругое основание. Предположим, что основание отсутствует под центральной частью пластины, между линиями 01-11-21 и 03-13-23.

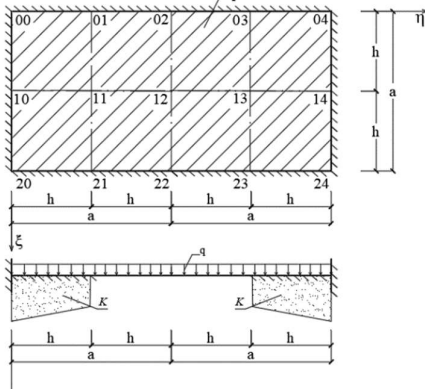


Рисунок 15. Прямоугольная защемлённая пластинка со свободно сближающимися краями.

Таблица 7. Прогиб точки 11 при различных шагах сетки

h	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$
Максимальные прогибы гибкой пластины на сплошном упругом основании (см)	0,103	0,1075	0,1089	0,1092
Прогибы точки 12 гибкой пластины (рис. 15) на неполном упругом основании на половине (см)	0,14394	0,14538	0,14635	0,14662
Максимальные прогибы гибкой пластины без упругого основания (см)	0,15102	0,15119	0,15193	0,15215

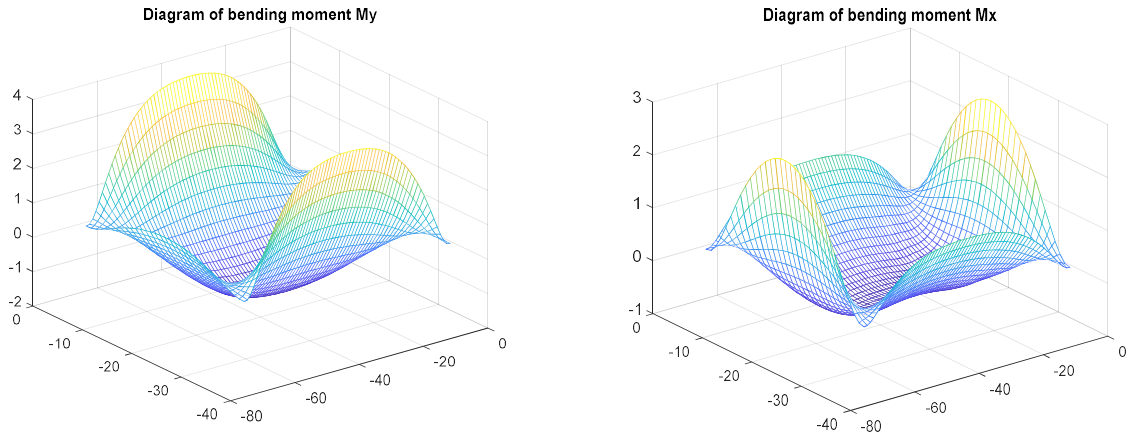


Рисунок 16. Графики моментов в пластинке при шаге $h = 1/32$.

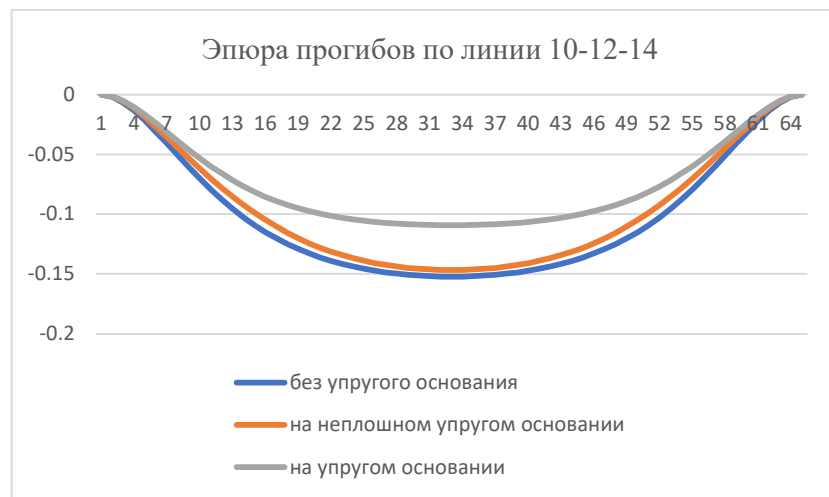
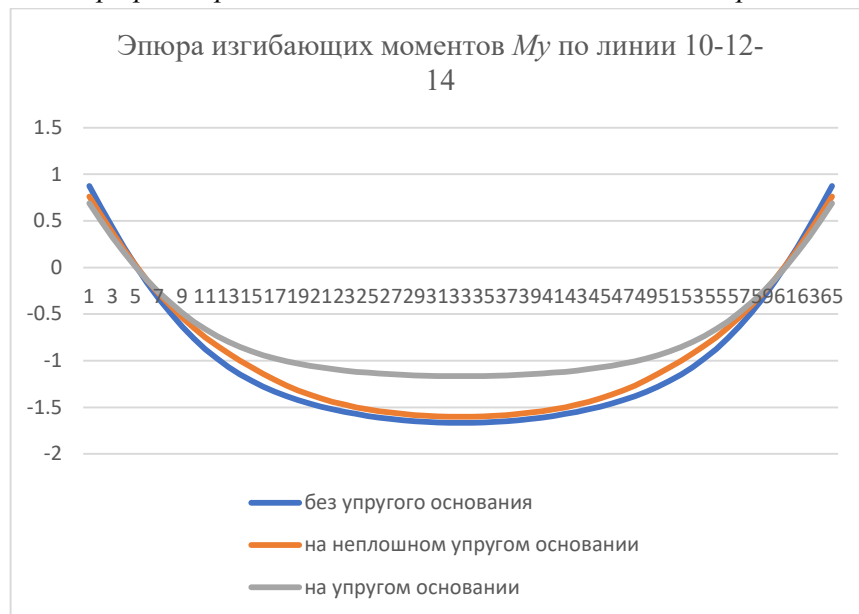


Рисунок 17. Графики прогибов по линии 10-12-14 в пластинке при шаге $h = 1/32$.



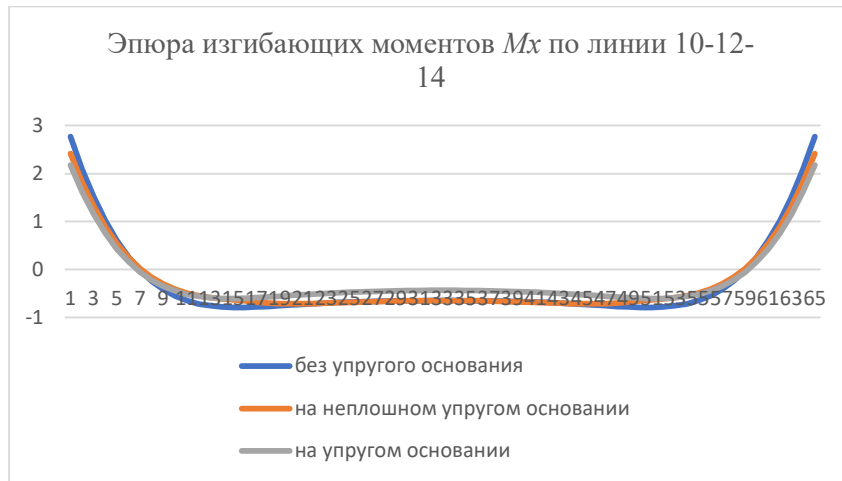


Рисунок 18. График изгибающих моментов при $h=1/32$ по линиям 01-12-14

9. Расчёт гибкой квадратной пластинки, на упругом основании с переменным коэффициентом постели. По прежнему, будем работать с пластинкой, толщина которой $H=0,1\text{см}$, сторона $a=10\text{см}$, нагрузка $q=0,5\text{кг/см}^2$, модуль упругости $E=0,75\cdot 10^6\text{кг/см}^2$, коэффициент Пуассона $\mu=0,316$. Примем, что значения коэффициента отпора основания изменяются вдоль одной из осей и на разных сторонах пластины составляют: $K1=2,0\text{кг/см}^3$, $K2=10,0\text{кг/см}^3$. При этом укажем, что значения могут изменяться по произвольному закону вдоль двух сторон, а также могут быть заданы индивидуальные значения для каждой расчетной точки.

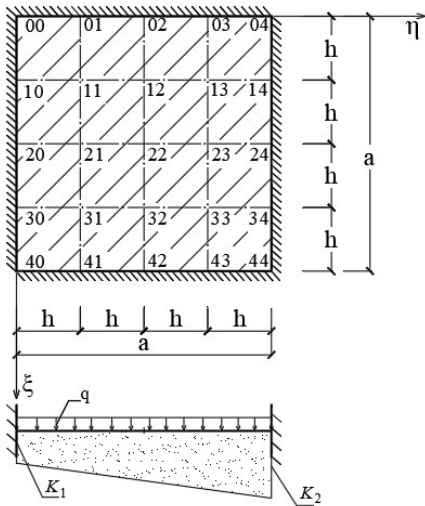


Рисунок 19. Прямоугольная защемлённая пластинка со свободно сближающимися краями.

Таблица 8. Прогиб точек при различных шагах сетки

h	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$	$h=1/64$
Прогибы точки 21 гибкой пластины (см)	0,0310	0,0314	0,0324	0,0329	0,0332
Прогибы точки 22 гибкой пластины(см)	0,0455	0,0477	0,0493	0,0502	0,0506
Прогибы точки 23 гибкой пластины(см)	0,0283	0,0288	0,0297	0,0301	0,0304

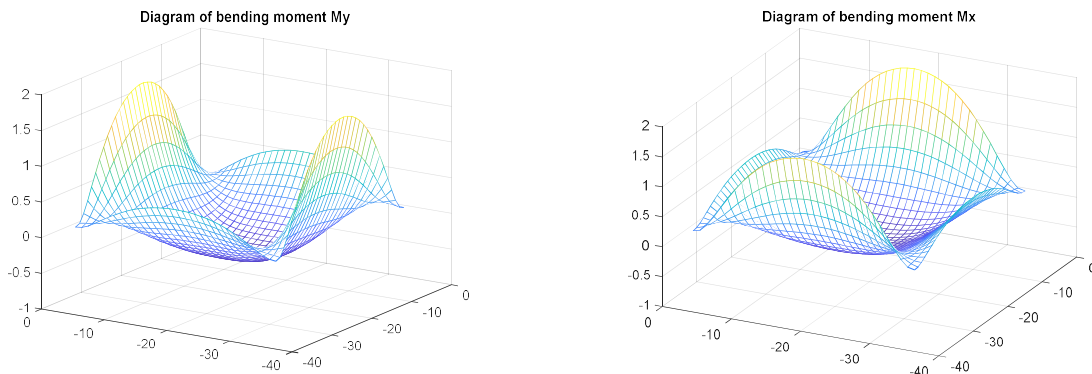


Рисунок 20. Поверхность моментов в пластинке при шаге $h=1/32$.

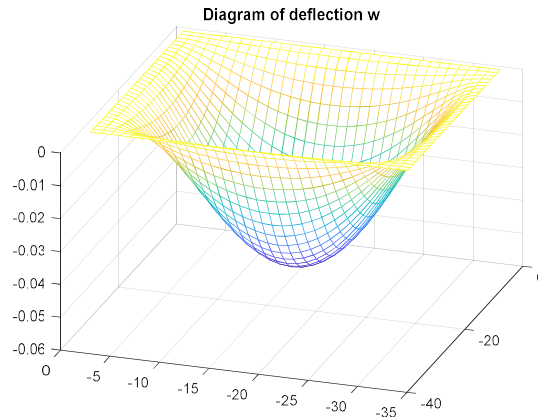


Рисунок 21. Схема деформирования пластины в условном масштабе при шаге $h = 1/32$.

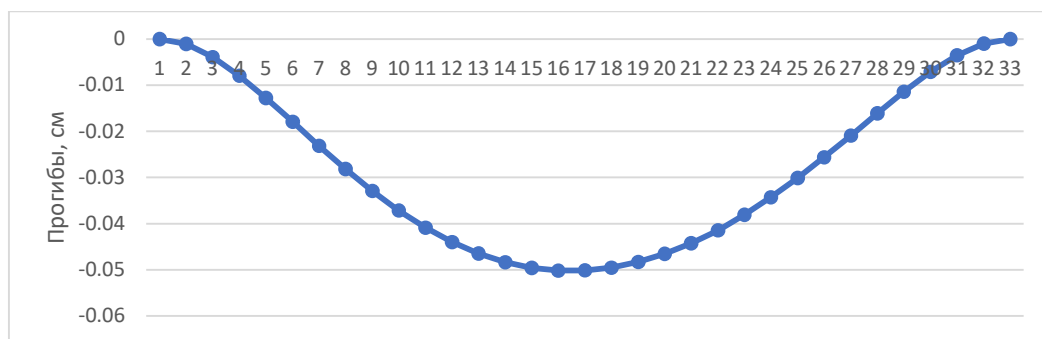


Рисунок 22 –Этюра прогибов (см) по линии 20-22-24 при $h=1/32$.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование выполнено в соответствии с поставленными целями. Таким образом, в диссертации выполнены следующие задачи:

1. Разработаны методика, алгоритм и программа расчета прямоугольных пластинок с учетом геометрической нелинейности на действие различных видов статических нагрузок с различными краевыми условиями на упругом основании и без упругого основания. В основу выполненной работы легли предложенные Габбасовым Радеком Фатыховичем разностные уравнения метода последовательных аппроксимаций (МПА).

2. На основании изложенного метода автором составлена программа для ЭВМ с использованием программы MATLAB. Программа позволяет решать задачи по расчету гибких пластинок на статические нагрузки без упругого основания и на упругом основании с постоянным и переменным коэффициентом постели при различных краевых условиях.

3. Оценка точности и надёжности численной методики выполнена при решении известных тестовых задач. Для вновь решаемых задач выполнялась проверка сходимости решения на вложенных одна в другую сетках.

4. С использованием составленной программы для ЭВМ получены решения новых задач по расчету пластин в геометрически нелинейной постановке на статические нагрузки без упругого основания и на упругом основании с постоянным и переменным коэффициентом постели при различных краевых условиях.

В качестве **рекомендации** можно указать следующее. При расчете прямоугольных пластин на действие кусочно-распределенных поперечных нагрузок без учета взаимодействия с

упругим основанием рекомендуется использовать обобщенные разностные уравнения МКР. При более компактной форме записи, решение, полученное с их использованием, обладает сравнимой точностью с вариантом использования разностных уравнений МПА.

В качестве **перспективы** разработки рассматриваемой темы предполагается расчет гибких пластин на динамические нагрузки, расчет гибких пластин с учетом других моделей упругого основания, расчет пластин с учётом двух видов нелинейности (геометрической и физической) с использованием разностных уравнений МПА.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Radek Gabbasov. Numerical research of bending flexible plates / Radek Gabbasov, Vladimir Filatov and Ngoc Khoa Dao // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering – 2019. – Vol. 661. – Pp. 012006. doi:10.1088/1757-899X/661/1/012006.

2. Ngoc Khoa Dao. Comparison of calculation results of flexible plates on the basis of difference equations of successive approximation method and generalized equations of finite difference method / Ngoc Khoa Dao, Radek Gabbasov, Hoang Thi Linh Quyen and Le Thuy Nguyen // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. Vol. 913. – Pp. 022002. doi:10.1088/1757-899X/913/2/022002.

3. Radek Gabbasov. Analysis of bending plates with mixed boundary conditions using generalized equations of finite difference method / Radek Gabbasov, Vladimir Filatov, Ngoc Khoa Dao and Thi Linh Quyen Hoang // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 913. – Pp. 022018. doi:10.1088/1757-899X/913/2/022018.

4. Филатов В.В. Изгиб гибких пластин при действии кусочно-постоянной нагрузки / В.В. Филатов, Н.К. Дао // Актуальные проблемы строительной отрасли и образования: Первой Национальной конференции. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ – 2020. – С. 198-203.

5. Дао Нгок Кхоа. Численное исследование изгиба гибких пластин на упругом основании / Дао Нгок Кхоа, В.В. Филатов, Т.Л.К. Хоанг // Инновации и инвестиции. – 2022. – №1. – С. 152-156.