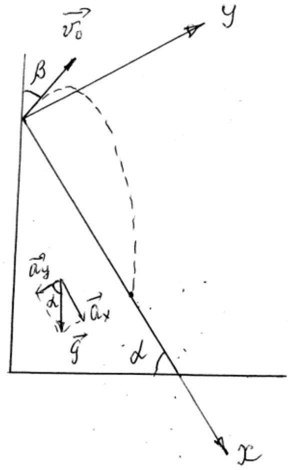
Вариант 1

Задача № 1.

Решение. Выберем оси координат как показано на рисунке. Движение по осям OX и OY будет равноускоренным: $a_x = g\sin\alpha$; $a_Y = -g\cos\alpha$.



Уравнения движения лыжника по осям OX и OY имеют вид:

$$x = -v_0 t\sin(\alpha-\beta) + \frac{(g\sin\alpha)t^2}{2}$$

$$y = v_0 t\cos(\alpha-\beta) - \frac{(g\cos\alpha)t^2}{2}$$

$$v_y = v_0\cos(\alpha-\beta) - (g\cos\alpha)t$$

Время полёта лыжника равно $t = 2t_{под}$, которое можно определить из условия $v_y = 0$, $0 = v_0\cos(\alpha-\beta) - (g\cos\alpha)t$.

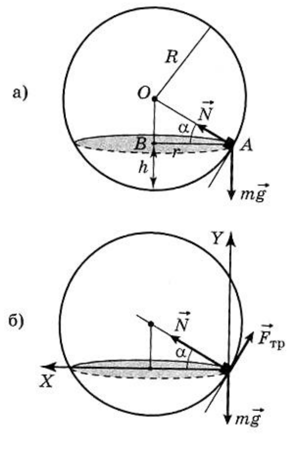
Время полёта равно $t_{пол} = \dfrac{v_0\cos(\alpha-\beta)}{g\cos\alpha}$.

Тогда $L = (-v_0\sin(\alpha-\beta) + \dfrac{(\sin\alpha)\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha})\dfrac{2v_0\cos(\alpha-\beta)}{g\cos\alpha} = \dfrac{2v_0^2\cos(\alpha-\beta)\sin\beta}{g\cos^2\alpha}$

О т в е т: ≈ 220 м.

Задача № 2.

Решение. Прежде чем расставить силы, действующие на грузик, определим, при какой угловой скорости должна вращаться сфера с грузиком, чтобы только две силы – тяжести и нормальной реакции обеспечивали вращение тела в сфере (рис. а).



В этом случае согласно второму закону Ньютона: $m\omega_0^2 r = mg\mathrm{tg}\alpha$.

Так как OB/OA = ½, то α = 30°.

$r = R\cos\alpha$.

Угловая скорость вращения сферы с грузом определится из выражения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{R\cos\alpha}} = 8\ \text{рад/с} > 5\ \text{рад/с}.$$

Следовательно, при заданной в условии скорости тело стремится двигаться вниз, сила трения направлена вверх, как показано на рис. б.

Согласно второму закону Ньютона, запишем

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} \qquad (1)$$

В проекции уравнения (1) на оси OX и OY получим два уравнения:

$$ma_{цс} = N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha$$

$$0 = N\sin\alpha - mg + F_{тр}\cos\alpha$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных сил трения и нормальной реакции. Сделав преобразования, имеем

$$F_{тр} = m\left(g - \omega^2 R\cos\alpha\right)\sin\alpha = 0{,}045\ \text{Н}.$$

Ответ: 0,045 Н.

Задача № 3.

Решение. Обозначим ширину слоя воздуха, образовавшегося в результате вытекания воды, $-\,x$.

Движение пузырьков можно будет наблюдать, когда давление воздуха в нижней половине сосуда станет равно давлению воды в верхней части сосуда:

$$p_2 = \rho g(\text{H} - x) + p_{атм}\,. \qquad (1)$$

Согласно закону Бойля-Мариотта для воздуха в нижней половине сосуда напишем уравнение

$$p_2\left(H - x\right)S = p_{атм}HS \text{, где } S \text{ — площадь сечения сосуда} \qquad (2)$$

Подставив в (2) выражение (1), получим квадратное уравнение.

$$\left(\rho g(\text{H} - x) + p_{атм}\right)\left(H - x\right) = p_{атм}H$$

Решая квадратное уравнение, найдем x.

Ответ: 73 см.

Задача № 4.

Решение. Сместим проводник на некоторое расстояние, и отпустим его. На проводник действуют силы тяжести, упругости и Ампера. Согласно второму закону Ньютона, запишем

$$ma_x = -IBl + mg - k\left(x + x_0\right). \qquad (1)$$

Величина x_0 определяется из условия равновесия проводника:

$$mg = kx_0. \qquad (2)$$

Ток идет по проводнику, так как он движется с ускорением в магнитном поле и заряд

Если сопротивлением проводника можно пренебречь, то напряжение на конденсаторе определяется ЭДС электромагнитной индукции $\frac{q}{C} = Bv_x l$.

В этом равенстве зависят от времени заряд q на конденсаторе и скорость v_x проводника. Из этого равенства (после дифференцирования обеих его частей) следует, что $\frac{q'}{C} = Bv'_x l$, где $q' = I$, а $v'_x = a_x$. После подстановки соответствующих величин получаем для тока:

$$I = CBa_x l \ . \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение колебаний (1), получим

$$ma_x = -CB^2l^2a_x - kx \text{, или}$$

$$a_x = -\frac{k}{m + CB^2l^2}x. \qquad (4)$$

Сравнивая это выражение общим уравнением гармонических колебаний

$$a_x = -\omega^2 x.,$$

получаем частоту колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m + CB^2l^2}}$.

Период колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{m + CB^2l^2}{k}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m + CB^2l^2}{k}}$

Задача № 5.

Решение.

Благодаря зеркалу луч два раза преломляется на выпуклой поверхности линзы, можно рассмотреть линзу с двумя преломляющимися сферическими поверхностями. Соответственно, фокусное расстояние этой линзы F_1 определяется из формулы: $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F} = \frac{2}{F}$; $F_1 = F/2$. Тогда по формуле линзы получим $\frac{2}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, $\frac{2}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{f}$.

Откуда $f = \frac{2}{3}F = 0{,}2$ м.

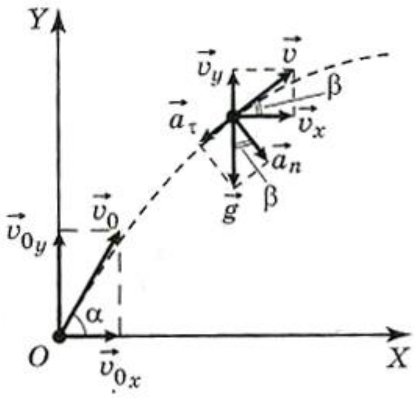
Благодаря зеркалу предмет и его изображение находятся слева от линзы.

Ответ: 0,2 м.

Вариант 2

Задача № 1.

Решение. Тело движется с постоянным ускорением – ускорением свободного падения $\vec{g}$. Выберем оси координат, как показано на



Пусть в некоторой точке A траектории $a_\tau = a_n$ (как показано на рисунке). Раскладываем $\vec{g}$ на две составляющие – $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Если $a_n = a_\tau$, то прямоугольный треугольник со сторонами a_n и a_τ – равнобедренный и угол β = 45°. Уравнения движения по осям OX и OY имеют вид:

$$x = (\upsilon_0 \cos\alpha)\, t,$$

$$y = (\upsilon_0 \sin\alpha)\, t - gt^2/2 \qquad (1)$$

Для определения h нужно знать момент времени t_A, когда тело окажется в точке A. Проекции скорости на оси X и Y в точке A равны друг другу:

$\upsilon_x = \upsilon_A \cos\beta = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_y = \upsilon_A \sin\beta$ (так как углы между вектором $\vec{\upsilon}_A$ и его составляющей $\vec{\upsilon}_{Ax}$ и векторами $\vec{g}$ и $\vec{a}_n$ равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). С другой стороны, $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$.

Приравняв υ_x и υ_y в момент времени t_A, имеем: $\upsilon_0 \cos\alpha = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_A$, откуда $t_A = \upsilon_0(\sin\alpha - \cos\alpha)/g$.

Подставив t_A в (1), получим $h = \dfrac{\upsilon_0^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{2g} = -\dfrac{\upsilon_0^2 \cos 2\alpha}{2g} = 2{,}6$ м.

Ответ: 2,6 м.

Задача № 2.

Решение. В начальный момент ускорение равно касательному ускорению

$$ma = mg\sin\varphi.$$

Следовательно, для определения ускорения надо найти угол отклонения нити от вертикали.

В нижней точке

$$ma_{цс} = T - mg$$

$$T = m\left(\frac{\upsilon^2}{l} + g\right)$$

Скорость найдем из закона сохранения энергии

$$mgl\left(1-\cos\varphi\right)=\frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{v^2}{l}=2g(1-\cos\varphi)$$

$$T=m\left(2g(1-\cos\varphi)+g\right)=mg\left(3-2\cos\varphi\right)\rightarrow$$

$$\cos\varphi=(3-\frac{T}{mg})/2=1/2$$

$$a=g\sin 60°=8{,}7\ м/с^2$$

Ответ: 8,7 м/с^2

Задача № 3.

Решение. В новом положении электроемкость конденсатора уменьшается.

Емкость конденсатора

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

$$\frac{1}{C_2}=\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon S}+\frac{\Delta d}{\varepsilon_0 S}=\frac{d+\varepsilon\Delta d}{\varepsilon_0\varepsilon S}$$

Работа источника

$$A_{ист}=\left(q_2-q_1\right)U$$

$$A_{ист}+A=\Delta W=\frac{1}{2}(C_2-C_1)U^2$$

$$A=\frac{1}{2}(C_1-C_2)U^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon SU^2\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+\Delta d}\right)=\frac{\varepsilon_0\varepsilon SU^2\Delta d}{2d\left(d+\varepsilon\Delta d\right)}$$

Из этого выражения получим

$$\Delta d=\frac{d}{\varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon SU^2}{2dA-1}\right)}=4{,}7\cdot 10^{-3}\text{ м}=4{,}7\text{ мм.}$$

Ответ: 4,7 мм.

Задача № 4.

Решение. Если за время Δt толщина слоя серебра стала равной Δl, то скорость роста толщины покрытия есть $\Delta l/\Delta t$. Объем напыленного слоя $\Delta V = S\Delta l$, где S – площадь поверхности стенки. Этот объем можно выразить через массу и плотность:

$\Delta V = m/\rho = m_0N/\rho$, где m – масса серебряного покрытия, напыленного за время Δt, m_0 – масса молекулы, N – число молекул, ρ – плотность серебра.

Определим толщину слоя:

$$\Delta l=\frac{\Delta V}{S}=\frac{m_0N}{\rho S}\ . \qquad (1)$$

Изменение импульса молекулы, подлетевшей к стенке и осевшей на ней равно импульсу силы $f\Delta t = m_0\Delta v = m_0(0 - v) = - m_0v$.

На стенку действует такой же по модулю импульс силы $f_{ст}\Delta t = m_0v$. Если на стенку за время Δt осядет N молекул, то импульс силы, подействовавший на стенку в результате ударов о нее N молекул, будет $F\Delta t = Nvm_0$.

Давление на стенку есть

$$p = F / S = \frac{N\upsilon m_0}{S\Delta t}. \qquad (2)$$

Средняя кинетическая энергия молекулы равна $\bar{E} = \frac{m_0\upsilon^2}{2}$, $v = \sqrt{\frac{2\bar{E}}{m_0}}$.

Тогда для давления найдем $p = N\frac{\sqrt{2\bar{E}m_0}}{S\Delta t}$.

Отсюда $N = \frac{pS\Delta t}{\sqrt{2m_0\bar{E}}}$. Подставим это выражение в (1), получим $\Delta l = \frac{m_0 p\Delta tS}{\rho S\sqrt{2m_0\bar{E}}} = \frac{m_0 p\Delta t}{\rho\sqrt{2m_0\bar{E}}}$. Учитывая, что масса молекулы равна $m_0 = \mathrm{M}/N_A$ для скорости роста покрытия получим окончательное выражение $\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{A}{N_A\cdot 2\bar{E}}} = 9\cdot 10^{-10}$ м / с.

Ответ: $\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{A}{N_A\cdot 2\bar{E}}} = 9\cdot 10^{-10}$ м / с

Задача № 5.

Решение. Брусок с застрявшей в нем пулей начинает двигаться, сжимая пружину. На брусок действует сила упругости, под действием которой он совершает гармонические колебания (см. рис.). Взаимодействие пули и бруска абсолютно неупругое. Закон сохранения импульса для системы пуля и брусок имеет вид

$$m\vec{\upsilon}_0 = (m+M)\vec{\upsilon}. \qquad (1)$$

В проекции на ось X уравнение (1) запишется так: $m\upsilon_0 = (m + M)\ \upsilon$. Из этого выражения определяем начальную скорость бруска (в момент попадания в него пули): $\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{m+M}$.

Кинетическая энергия системы после попадания пули равна:

$$W_{кин} = \frac{(m+M)\upsilon^2}{2} = \frac{m^2\upsilon_0^2}{2(m+M)}.$$

Кинетическая энергия бруска с застрявшей в нем пулей в этот момент максимальна, (в момент попадания пули смещение бруска от положения равновесия равно нулю) и равна полной энергии :

$$\frac{m^2\upsilon_0^2}{2(m+M)} = \frac{(m+M)A^2\omega^2}{2}. \qquad (2)$$

Амплитуда колебаний определяется выражением $A = \frac{\upsilon_0}{\omega}\frac{m}{m+M}$.

Частота колебаний равна $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$ и, следовательно, $A = \upsilon_0 \dfrac{m}{\sqrt{k(m+M)}}$.

Уравнение колебаний бруска имеет вид

$$x = A\sin(\omega t) = \upsilon_0 \frac{m}{\sqrt{k(m+M)}} \sin\sqrt{\frac{k}{m+M}}t .$$

Начальная фаза $\varphi_0 = 0$, так как при $t = 0$ смещение $x = 0$. Скорость бруска определится выражением: $\upsilon_x = x'$ или $\upsilon_x = A\omega\cos\omega t = \upsilon_0 \dfrac{m}{(m+M)} \cos\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}\, t$.

Ответ: $x = A\sin(\omega t) = \upsilon_0 \dfrac{m}{\sqrt{k(m+M)}} \sin\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}t$.