РЕШЕНИЯ

Вариант 1

Задача 1. *(max 3 балла)*

Отметим, что $t = \frac{x}{4}$, поэтому

$$\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x-4}\right)^3 + 32\left(t + 0.5\sqrt{t-1}\right)^3 + (s-1)(s^2+s+1) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x-4}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x-4}\right)^3 + s^3 - 1 = x^3 + 3x(x-4) + 999 =$$
$$= 1000 + 180 + 999 = 2179$$

Ответ: 2179.

Задача 2. *(max 3 балла)*

Пусть событие A – первая бригада выполнила дневную норму, а событие B – вторая бригада выполнила дневную норму. Тогда

$$P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = 0.4, \quad P(\bar{A}\bar{B}) = 0.3$$

Получаем

$$P(AB) = 1 - P(\bar{A} + \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B}) = 0.5$$

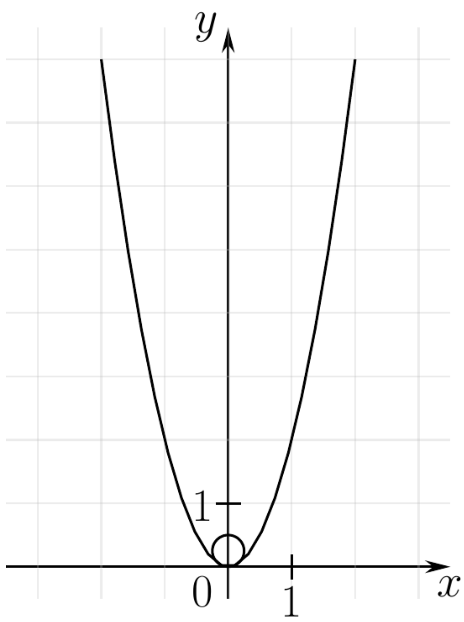
Ответ: 0.5.

Задача 3. *(max 3 балла)*

Пусть x, y и z – кол-во процентов горючего дневного норматива, которое будет израсходовано, если целый день возить щебень, песок и кирпич, соответственно. Тогда условия задачи задают систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 95 \\ \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}y + \frac{2}{7}z = 101\frac{3}{7} \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{8}z = 101\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 190 \\ x + 4y + 2z = 710 \\ 2x + 3y + 3z = 810 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90 \\ y = 100 \\ z = 110 \end{cases}$$

Ответ: 90%



Задача 4. *(max 6 баллов)*

Пусть начало координат совпадает с вершиной параболы. Парабола с ветвями вверх задаётся уравнением $y = kx^2$. Раз ширина траншеи 4м, то максимальной глубине соответствует значение при $x = 2$, т.е. $8 = k2^2 \Rightarrow k = 2$.

Труба касается дна траншеи нижней частью, которая имеет уравнение нижней половины окружности с центром $(0, r)$ и радиусом r

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Чтобы было касание в вершине параболы, окружность не должна иметь других общих точек с параболой, т.е. уравнение

$$2x^2 = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

должно иметь одно решение $x = 0$.

$$2x^2 - r = -\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$4x^4 - 4rx^2 + r^2 = r^2 - x^2$$
$$4x^4 + (1 - 4r)x^2 = 0$$
$$x^2\big(4x^2 + (1 - 4r)\big) = 0$$
$$4x^2 = 1 - 4r$$
$$x^2 = \frac{1}{4} - r$$

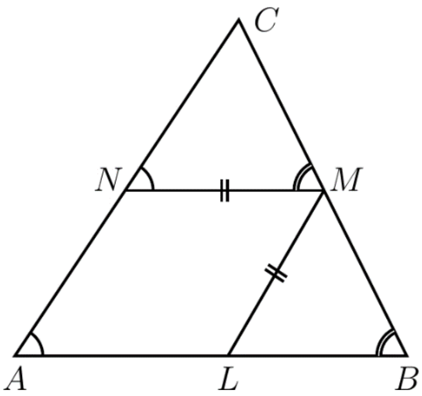
Последнее уравнение должно иметь решением ноль или не иметь решений. Значит $r \le \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 5. *(max 6 баллов)*

Докажем от противного. Пусть всем подрядчикам понадобилось не более 6 проектов, чтобы поработать друг с другом. Пусть подрядчик A_1 участвовал в 6 проектов (если проектов меньше суть рассуждений не меняются): s_1, s_1, s_3, s_4, s_5 и s_6. Тогда хотя бы в одном из проектов было 7 подрядчиков или больше, т.к. 36 подрядчиков : 6 проектов = 6 подрядчиков – среднее число подрядчиков за проект по мимо подрядчика A_1. Пусть это проект s_1 и в нём было 7 подрядчиков (если подрядчиков больше рассуждения не меняются). Его участники уже не могут участвовать в одном проекте по условиям задачи. Следовательно, подрядчику A_2 из проекта s_2 понадобится 6 проектов чтобы поработать с остальными подрядчиками из проекта s_1. Т.е. уже не менее 7 проектов нужно подрядчику A_2 для того, чтобы поработать со всеми подрядчиками. Противоречие.

Задача 6. *(max 6 баллов)*



Пусть $MN = y$. Из построения следует, что $ALMN$ – параллелограмм. Т.к. $MN = LM$, то $ALMN$ – ромб, т.е. $AN = MN = LM = AL$.

Также из построения следует, что $\Delta NMC \sim \Delta ABC$, т.е.

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{AC - AN}{AC} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y}{AB} = \frac{AC - y}{AC} \Rightarrow y = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}.$$

Т.к. AB и AC удовлетворяет квадратному уравнению $\mathrm{x}^2 - 12\mathrm{x} + 24 = 0$, то $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 12$ и $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} = 24$. Получаем, что $\mathrm{y} = \frac{24}{12} = 2$.

Ответ: 2.

Задача 7. *(max 12 баллов)*

ОДЗ: $2 - \mathrm{x} > 0 \Rightarrow \mathrm{x} < 2$.

Т.к. правая и левая части неравенства неотрицательны, то возведение в квадрат обеих частей не изменит знака неравенства

$$|\log_3(2-\mathrm{x})| \ge \left|\log_9 \frac{2-\mathrm{x}}{4}\right|$$

$$\log_3^2(2-\mathrm{x}) \ge \log_9^2 \frac{2-\mathrm{x}}{4}$$

$$\log_9^2(2-\mathrm{x})^2 - \log_9^2 \frac{2-\mathrm{x}}{4} \ge 0$$

$$\left(\log_9(2-\mathrm{x})^2 - \log_9 \frac{2-\mathrm{x}}{4}\right)\left(\log_9(2-\mathrm{x})^2 + \log_9 \frac{2-\mathrm{x}}{4}\right) \ge 0$$

$$\log_9 4(2-\mathrm{x}) \cdot \log_9 \frac{(2-\mathrm{x})^3}{4} \ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_9 4(2-\mathrm{x}) \ge 0 \\ \log_9 \frac{(2-\mathrm{x})^3}{4} \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_9 4(2-\mathrm{x}) \le 0 \\ \log_9 \frac{(2-\mathrm{x})^3}{4} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4(2-\mathrm{x}) \ge 1 \\ \frac{(2-\mathrm{x})^3}{4} \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 4(2-\mathrm{x}) \le 1 \\ \frac{(2-\mathrm{x})^3}{4} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathrm{x} \le 1.75 \\ \mathrm{x} \le 2 - \sqrt[3]{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{x} \ge 1.75 \\ \mathrm{x} \ge 2 - \sqrt[3]{4} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{x} \le 2 - \sqrt[3]{4} \\ \mathrm{x} \ge 1.75 \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем: $\mathrm{x} \in \left(-\infty, 2 - \sqrt[3]{4}\right] \cup [1.75, 2]$.

Ответ: $\mathrm{x} \in \left(-\infty, 2 - \sqrt[3]{4}\right] \cup [1.75, 2]$.

Задача 8. *(max 12 баллов)*

$$\frac{5\sin^2 x + 4}{10\cos^2 x + 2} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{9\sin^2 x + 4\cos^2 x}{2\sin^2 x + 12\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{9\operatorname{tg}^2 x + 4}{2\operatorname{tg}^2 x + 12} = \operatorname{tg} x$$

$$9\operatorname{tg}^2 x + 4 = 2\operatorname{tg}^3 x + 12\operatorname{tg} x$$

$$2\operatorname{tg}^3 x - 9\operatorname{tg}^2 x + 12\operatorname{tg} x - 4 = 0$$

Т.к. $\mathrm{x} = \operatorname{arctg} 2$ решение исходного уравнения, то $\operatorname{tg}\mathrm{x} = 2$ является решением уравнения выше. Поэтому можно выделить множитель $(\operatorname{tg}\mathrm{x} - 2)$:

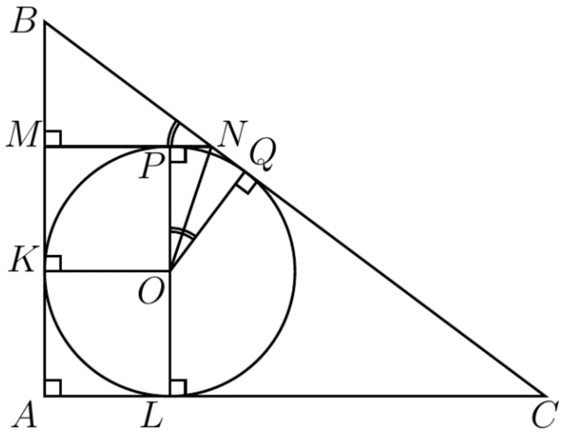
$$2(tg\, x - 2)(tg^2\, x - 2.5\, tg\, x + 1) = 0$$

$$2(tg\,x-2)(tg\,x-2)\left(tg\,x-\frac{1}{2}\right)=0$$

Получаем, что второе решение соответствует $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$.

Значит, второе решение $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.



Задача 9. *(max 15 баллов)*

Пусть точки K, L, Q и P – точки касания вписанной окружности с отрезками AB, AC, BC и MN, соответственно. А точка O центр вписанной окружности.

По построению $\angle OPN=\angle OPM=\angle OKM=\angle OKA=\angle OLA=\angle OLC=\angle OQC=\angle OQN=90°$. Т.к. $MN||AC$, то и $\angle BMN=\angle NMK=90°$.

Также $OK=OP=OQ=OL=r$.

Следовательно, KMPO и KOLA квадраты, т.е. $KM=AK=MP=OP=r$.

Отрезки NP и NQ равны, т.к. касательные от точки N до вписанной окружности. А значит, $\Delta OPN=\Delta OQN$ по трём сторонам и $\angle PON=\angle NOQ=\frac{1}{2}\angle POQ$.

Пусть $\angle BNM=\alpha$, тогда смежный угол $\angle PNQ=180°-\alpha$. Из четырёхугольника OPNQ следует $\angle POQ=360°-\angle OPN-\angle PNQ-\angle NQO=\alpha$.

В ΔOPN, $\angle PON=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow PN=PO\operatorname{tg}\angle PON=r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Получаем, что $MN=MP+PN=r\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$ и $MB=MN\operatorname{tg}\angle MNB=$ $=r\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha=r\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Тогда $S_{\Delta BMN}=\frac{1}{2}MN\cdot MB=r^2\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{3}$. Преобразуя данное равенство и учитывая, что $r=1$, получим

$$3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-2=0\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}\text{ и }\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2.$$

Т.к. длина отрезка MN не может быть отрицательной, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$. Получаем

$$MN=\frac{4}{3}, BM=1\text{ и }BN=\sqrt{MN^2+BM^2}=\frac{5}{3}.$$

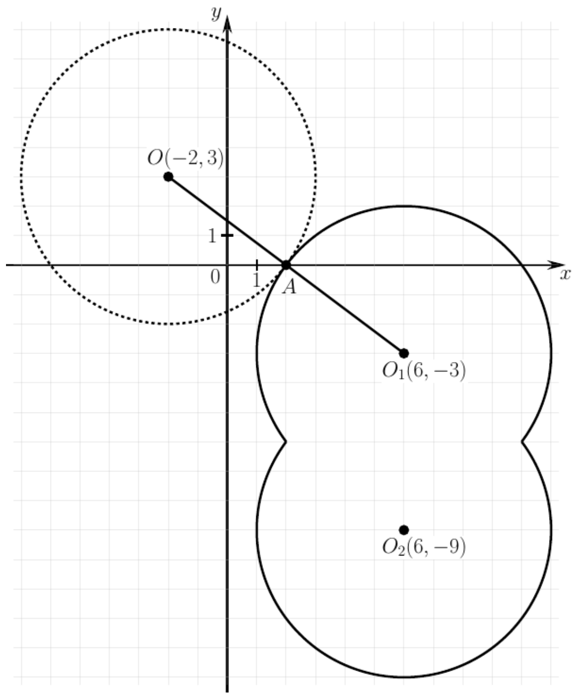
По двум углам ΔABC и ΔMBN подобным. Коэффициент подобия

$$k=\frac{AB}{BM}=\frac{AK+KM+MB}{BM}=3.$$

Значит, $AB=3$, $AC=4$ и $BC=5$.

Ответ: 3, 4 и 5.

Задача 10. *(max 15 баллов)*



Преобразуем систему

$$\begin{cases}(x-6)^2+y^2+12y+20-|6y+36|=0\\ x^2+4x+y^2-6y=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y+6)^2-6|y+6|+9=25\\ x^2+4x+y^2-6y=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-6)^2+(|y+6|-3)^2=5^2\\ (x+2)^2+(y-3)^2=a+13\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x-6)^2+(y+3)^2=5^2, \text{при } y\geq -6\\ (x-6)^2+(y+9)^2=5^2, \text{при } y\leq -6\end{array}\right.\\ (x+2)^2+(y-3)^2=a+13\end{cases}$$

Геометрически первая совокупность представляет собой внешнюю часть двух пересекающихся окружностей: одна с центром $O_1(6,-3)$ и радиусом 5, а другая с центром $O_2(6,-9)$ и радиусом 5.

Второе уравнение – окружность с центром $O(-2,3)$ и переменного радиуса.

По графику видно, что одно решение будет, когда окружность из второго уравнения касается одной из окружностей первой совокупности.

Точка A_1 лежит на отрезке OO_1. Значит, $|OA_1|=|OO_1|-|A_1O_1|=\sqrt{(-2-6)^2+\left(3-(-3)\right)^2}-5=10-5=5$. Следовательно,

$$a+13=|OA_1|^2=25 \Rightarrow a=12.$$

Ответ: 12.

ЗАДАНИЯ

Вариант 2

Задача 1. *(max 4 балла)*

Отметим, что $t = \frac{x}{4}$, поэтому

$$\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x-4}\right)^3 + 32\left(t - 0.5\sqrt{t-1}\right)^3 + (s+1)(s^2 - s + 1) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x-4}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x-4}\right)^3 + s^3 + 1 = x^3 + 3x(x-4) + 513 =$$
$$= 8000 + 960 + 513 = 9473$$

Ответ: 9473.

Задача 2. *(max 4 балла)*

Пусть событие A – первая бригада выполнила дневную норму, а событие B – вторая бригада выполнила дневную норму. Тогда

$$P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = 0.3, \quad P(\overline{A}\overline{B}) = 0.2$$

Получаем

$$P(AB) = 1 - P(\overline{A} + \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}\overline{B}) = 0.6$$

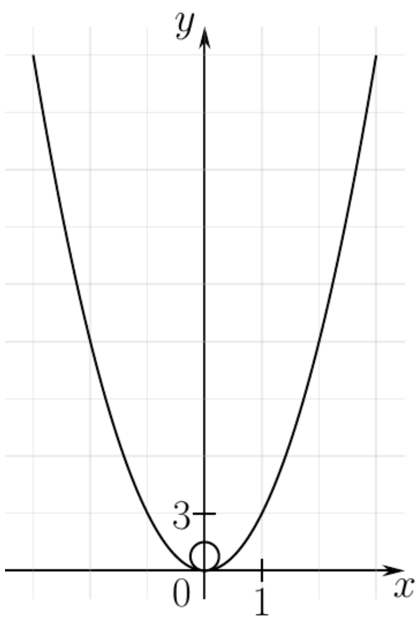
Ответ: 0.6.

Задача 3. *(max 4 балла)*

Пусть x, y и z – кол-во процентов горючего дневного норматива, которое будет израсходовано, если целый день возить щебень, песок и кирпич, соответственно. Тогда условия задачи задают систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = 90 \\ \frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{5}z = 108 \\ \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{1}{3}z = 104\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 180 \\ x + 5y + 4z = 1080 \\ 2x + 4y + 3z = 940 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 80 \\ y = 120 \\ z = 100 \end{cases}$$

Ответ: 120%.



Задача 4. *(max 8 баллов)*

Пусть начало координат совпадает с вершиной параболы. Парабола с ветвями вверх задаётся уравнением $y = kx^2$. Раз ширина траншеи 6м, то максимальной глубине соответствует значение при $x = 3$, т.е. $27 = k \cdot 3^2 \Rightarrow k = 3$.

Труба касается дна траншеи нижней частью, которая имеет уравнение нижней половины окружности с центром $(0, r)$ и радиусом r

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Чтобы было касание в вершине параболы, окружность не должна иметь других общих точек с параболой, т.е. уравнение

$$3x^2 = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

должно иметь одно решение $x = 0$.

$$3x^2 - r = -\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$9x^4 - 6rx^2 + r^2 = r^2 - x^2$$
$$9x^4 + (1 - 6r)x^2 = 0$$
$$x^2\left(9x^2 + (1 - 6r)\right) = 0$$
$$9x^2 = 1 - 6r$$
$$1{,}5x^2 = \frac{1}{6} - r$$

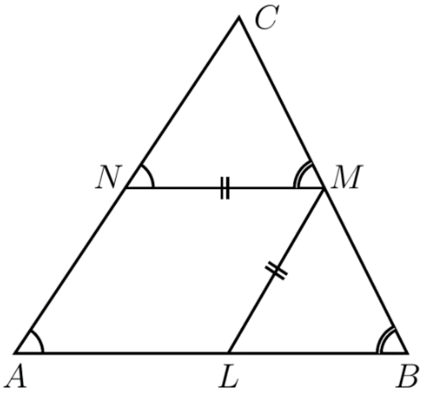
Последнее уравнение должно иметь решением ноль или не иметь решений. Значит $r \leq \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача 5. *(max 8 баллов)*

Докажем от противного. Пусть всем подрядчикам понадобилось не более 5 проектов, чтобы поработать друг с другом. Пусть подрядчик A_1 участвовал в 5 проектов (если проектов меньше суть рассуждений не меняются): s_1, s_1, s_3, s_4, s_5 и s_6. Тогда хотя бы в одном из проектов было 6 подрядчиков или больше, т.к. 25 подрядчиков : 5 проектов = 5 подрядчиков – среднее число подрядчиков за проект по мимо подрядчика A_1. Пусть это проект s_1 и в нём было 6 подрядчиков (если подрядчиков больше рассуждения не меняются). Его участники уже не могут участвовать в одном проекте по условиям задачи. Следовательно, подрядчику A_2 из проекта s_2 понадобится 5 проектов чтобы поработать с остальными подрядчиками из проекта s_1. Т.е. уже не менее 6 проектов нужно подрядчику A_2 для того, чтобы поработать со всеми подрядчиками. Противоречие.

Задача 6. *(max 8 баллов)*



Пусть $MN = y$. Из построения следует, что $ALMN$ – параллелограмм. Т.к. $MN = LM$, то $ALMN$ – ромб, т.е. $AN = MN = LM = AL$.

Также из построения следует, что $\Delta NMC \sim \Delta ABC$, т.е.

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{AC - AN}{AC} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y}{AB} = \frac{AC - y}{AC} \Rightarrow y = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}.$$

Т.к. AB и AC удовлетворяет квадратному уравнению $x^2-18x+72=0$, то $AB+AC=18$ и $AB\cdot AC=72$. Получаем, что $y=\frac{72}{18}=4$.

Ответ: 4.

Задача 7. *(max 14 баллов)*

ОДЗ: $8-2x>0 \Rightarrow x<4$.

Т.к. правая и левая части неравенства неотрицательны, то возведение в квадрат обеих частей не изменит знака неравенства

$$|\log_2(8-2x)| \geq \left|\log_8\frac{(8-2x)^2}{5}\right|$$

$$\log_2^2(8-2x) \geq \log_8^2\frac{(8-2x)^2}{5}$$

$$\log_8^2(8-2x)^3 - \log_8^2\frac{(8-2x)^2}{5} \geq 0$$

$$\left(\log_8(8-2x)^3 - \log_8\frac{(8-2x)^2}{5}\right)\left(\log_8(8-2x)^3 + \log_8\frac{(8-2x)^2}{5}\right) \geq 0$$

$$\log_8 5(8-2x)\cdot\log_8\frac{(8-2x)^5}{5} \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_8 5(8-2x)\geq 0\\ \log_8\frac{(8-2x)^5}{5}\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_8 5(8-2x)\leq 0\\ \log_8\frac{(8-2x)^5}{5}\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}10(4-x)\geq 1\\ \frac{(8-2x)^5}{5}\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}10(8-2x)\leq 1\\ \frac{(8-2x)^5}{5}\leq 1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 3.9\\ x\leq 4-0.5\sqrt[5]{5}\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 3.9\\ x\geq 4-0.5\sqrt[5]{5}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq 4-0.5\sqrt[5]{5}\\ x\geq 3.9\end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем: $x\in\left(-\infty, 4-0.5\sqrt[5]{5}\right]\cup[3.9, 4)]$.

Ответ: $x\in\left(-\infty, 4-0.5\sqrt[5]{5}\right]\cup[3.9, 4)]$.

Задача №8. *(max 14 баллов)*

$$\frac{\sin^2 x+4}{7\cos^2 x+1} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{5\sin^2 x+4\cos^2 x}{\sin^2 x+8\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

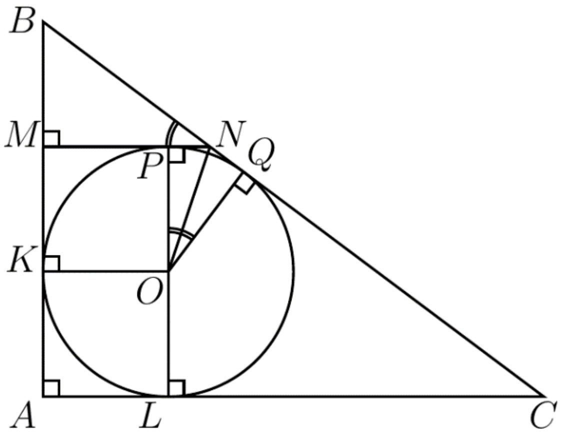
$$\frac{5\operatorname{tg}^2 x+4}{\operatorname{tg}^2 x+8} = \operatorname{tg} x$$

$$5\operatorname{tg}^2 x+4 = \operatorname{tg}^3 x+8\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}^3 x-5\operatorname{tg}^2 x+8\operatorname{tg} x-4=0$$

Т.к. $x=\operatorname{arctg} 2$ решение исходного уравнения, то $\operatorname{tg} x=2$ является решением уравнения выше. Поэтому можно выделить множитель $(\operatorname{tg} x-2)$:

$$2(\operatorname{tg} x-2)(\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2)=0$$



$$2(\operatorname{tg} x-2)(\operatorname{tg} x-2)(\operatorname{tg} x-1)=0$$

Получаем, что второе решение соответствует $\operatorname{tg} x=1$. Значит, второе решение $x=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}$.

Задача 9. *(max 18 баллов)*

Пусть точки K, L, Q и P – точки касания вписанной окружности с отрезками AB, AC, BC и MN, соответственно. А точка O центр вписанной окружности.

По построению $\angle OPN=\angle OPM=\angle OKM=\angle OKA=\angle OLA=\angle OLC=\angle OQC=\angle OQN=90°$. Т.к. $MN||AC$, то и $\angle BMN=\angle NMK=90°$.

Также $OK=OP=OQ=OL=r$.

Следовательно, $KMPO$ и $KOLA$ квадраты, т.е. $KM=AK=MP=OP=r$.

Отрезки NP и NQ равны, т.к. касательные от точки N до вписанной окружности. А значит, $\Delta OPN=\Delta OQN$ по трём сторонам и $\angle PON=\angle NOQ=\frac{1}{2}\angle POQ$.

Пусть $\angle BNM=\alpha$, тогда смежный угол $\angle PNQ=180°-\alpha$. Из четырёхугольника $OPNQ$ следует $\angle POQ=360°-\angle OPN-\angle PNQ-\angle NQO=\alpha$.

В ΔOPN, $\angle PON=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow PN=PO\operatorname{tg}\angle PON=r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Получаем, что $MN=MP+PN=r\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$ и $MB=MN\operatorname{tg}\angle MNB=$ $=r\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha=r\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Тогда $S_{\Delta BMN}=\frac{1}{2}MN\cdot MB=r^2\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{10}$. Преобразуя данное равенство и учитывая, что $r=1$, получим

$$10\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+13\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-3=0\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}\text{ и }\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{2}.$$

Т.к. длина отрезка MN не может быть отрицательной, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}$. Получаем

$$MN=\frac{6}{5}, BM=\frac{1}{2}\text{ и }BN=\sqrt{MN^2+BM^2}=\frac{13}{10}.$$

По двум углам ΔABC и ΔMBN подобным. Коэффициент подобия

$$k=\frac{AB}{BM}=\frac{AK+KM+MB}{BM}=5.$$

Значит, $AB=\frac{5}{2}$, $AC=6$ и $BC=\frac{13}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$, 6 и $\frac{13}{2}$.

Задача 10. *(max 18 баллов)*

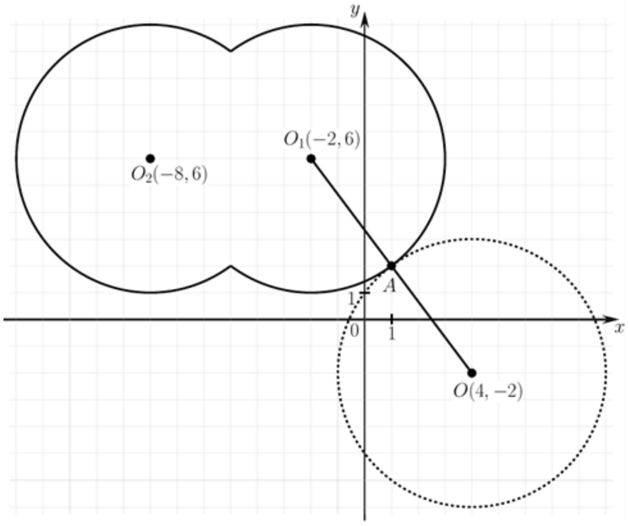
Преобразуем систему

$$\begin{cases}(y-6)^2+x^2+10x+9-|6x+30|=0\\ x^2-8x+y^2+4y=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}(y-6)^2+(x+5)^2-6|x+5|+9=25\\ x^2-8x+y^2+4y=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}(y-6)^2+(|x+5|-3)^2=5^2\\ (x-4)^2+(y+2)^2=a+20\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(y-6)^2+(x+2)^2=5^2, \text{при } x\geq -5\\ (y-6)^2+(x+8)^2=5^2, \text{при } x\leq -5\end{array}\right.\\ (x-4)^2+(y+2)^2=a+20\end{cases}$$



Геометрически первая совокупность представляет собой внешнюю часть двух пересекающихся окружностей: одна с центром $O_1(-2,6)$ и радиусом 5, а другая с центром $O_2(-8,6)$ и радиусом 5.

Второе уравнение – окружность с центром $O(4,-2)$ и переменного радиуса.

По графику видно, что одно решение будет, когда окружность из второго уравнения касается одной из окружностей первой совокупности.

Точка A_1 лежит на отрезке OO_1. Значит, $|OA_1|=|OO_1|-|A_1O_1|=\sqrt{\left(4-(-2)\right)^2+(-2-6)^2}-5=10-5=5$. Следовательно,

$$a+20=|OA_1|^2=25 \Rightarrow a=5.$$

Ответ: 5.

.