ЗАДАНИЯ

Задача 1. *(max 4 балла)*

При ремонте школы под слоем старой штукатурки нашли пример, у которого не сохранился ответ:

$$\frac{e^{-\frac{1}{\log_2 e}}}{\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{3\pi}{4}}-\frac{\log_{27} 3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{[\pi]}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

где $\lfloor x\rfloor$ означает наибольшее целое число, не превышающее числа x. Помогите строителям узнать ответ.

Задача 2. *(max 4 балла)*

Строительный проект состоит из двух наборов работ: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Работы из первого набора могут выполнятся только в порядке нумерации, а из второго в любом порядке. Сколько всего существует различных порядков выполнения работ для подрядчика, если одномоментно может выполнятся одна работа?

Задача 3. *(max 4 балла)*

В олимпиаде «Учись строить будущее» в 2022 году по математике участвовало 100 человек, по физике – 50 человек, по информатике – 48 человек. Когда участников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем «в одной», а «в трёх» – втрое меньше, чем «в одной». Сколько всего было участников в этой олимпиаде?

Задача 4. *(max 8 баллов)*

Для получения 10 кг композитного материала нужно смешать по 1 л компонент типа А, Б, В. При этом масса В в готовом композитном материале в 4 раза превышает массу компоненты Б. Известно, что 10 кг компоненты В занимает объём на 0,5 л больший, чем такая же масса компоненты А. В ответе укажите значение наибольшей плотности среди компонент (кг/л).

Задача 5. *(max 8 баллов)*

В тетраэдре $ABCD$ известны длины сторон $AB = 5$, $AC = 7$ и $AD = 4$. Сторону AB продолжили за точку B на 9 до точки B_1, AC продолжили за точку C на 5 до точки C_1

и AD продолжили за точку D на 6 до точки D_1. Во сколько раз увеличится объём тетраэдра $AB_1C_1D_1$ больше объёма тетраэдра $ABCD$.

Задача 6. *(max 8 баллов)*

Функция $f(x)$ при каждом значении $x \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет равенству

$$f\left(\frac{1}{40}x^2 + \frac{3}{10}x - \frac{9}{8}\right) + (x-1)\cdot f\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{15}{84}\right) = 1.$$

Найдите частное $\dfrac{f(1)}{f(0)}$.

Задача 7. *(max 14 баллов)*

Найдите третье по возрастанию положительное значение величины x удовлетворяющее уравнению

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}.$$

Значение величины x измеряется в долях π. В ответ запишите значение величины $\dfrac{60x}{\pi}$.

Задача 8. *(max 14 баллов)*

Решите неравенство

$$2 \geq \log_{x+3}(x^2 - x - 2)\log_{7-x}(x+3)^2.$$

В ответ запишите сумму длин полученных интервалов.

Задача 9. *(max 18 баллов)*

В треугольнике ABC стороны имеют длины 13, 14, 15. Найдите наибольшее значение площади вписанного ромба, если все вершины ромба лежат на сторонах треугольника.

Задача 10. *(max 18 баллов)*

Найдите наименьшее значение параметра a, при котором система уравнений имеет три решения:

$$\begin{cases} (x^2 - 12x + 11)^2 + (2x^2 - 24x + 22)(y^2 + 12y + 45) + (y^2 + 12y + 27)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 6(y - x) + a \end{cases}$$