# РЕШЕНИЯ

## Задача 1.

*Решение:*

$$\frac{e^{-\frac{1}{\log_2 e}}}{\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{3\pi}{4}}-\frac{\log_{27}3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{[\pi]}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{e^{-\ln 2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}-\frac{\log_{3^3}3^{1.5}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{0.5}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}-\frac{0.5}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{2}{2}=1$$

*Ответ:* 1.

## Задача 2.

*Решение:*

Первый набор имеет фиксированный порядок, поэтому нужно только определить пять мест из десяти в порядке выполнения работ, т.е. $C_{10}^5$. Работы из второго набора на оставшихся местах в порядке выполнения работ могут стоять в любом порядке, т.е. 5!. Получаем

$$C_{10}^5\cdot 5!=30240$$

*Ответ:* 30240.

## Задача 3.

*Решение:*

Пусть в одной олимпиаде участвовало $x$ человек, тогда в двух – $\frac{x}{2}$ человек, а в трёх – $\frac{x}{3}$ человек. Следовательно, сумма участников всех олимпиад должна равняться сумме участников в одной олимпиаде, удвоенному числу участников в двух олимпиадах и утроенному числу участников в трёх олимпиадах. Получаем

$$100+50+48=x+2\cdot\frac{x}{2}+3\cdot\frac{x}{3}\Rightarrow x=66.$$

Тогда общее количество участников равно $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=121$.

*Ответ:* 121.

**Задача 4.**

*Решение:*

Пусть компоненты имеют плотности $\rho_А$, $\rho_Б$ и $\rho_В$, соответственно. Тогда условия задачи задают систему

$$\begin{cases}\rho_А+\rho_Б+\rho_В=10\\ \rho_Б=\frac{1}{4}\rho_В\\ \frac{10}{\rho_В}=\frac{1}{2}+\frac{10}{\rho_А}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_А=10-\frac{5}{4}\rho_В\\ \rho_Б=\frac{1}{4}\rho_В\\ 20(\rho_А-\rho_В)-\rho_В\rho_А=0\end{cases}$$

Подставляя $\rho_А$ из первого уравнения в последнее, получим

$$20\left(10-\frac{9}{4}\rho_В\right)-\rho_В\left(10-\frac{5}{4}\rho_В\right)=0$$

$$\frac{1}{4}\rho_В^2-11\rho_В+40=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\rho_В=40\\ \rho_В=4\end{array}\right.$$

Первое значение $\rho_В$ не подходит, т.к. $\rho_А=10-\frac{5}{4}\cdot 40=-40$, а плотность отрицательной не бывает. Следовательно, $\rho_А=5$, $\rho_Б=1$ и $\rho_В=4$.

*Ответ:* 5.

**Задача 5.**

*Решение:*

Продолжим сначала только сторону $AB$ до точки $B_1$, как сказано в условии задачи.

Проведём в тетраэдре $ABCD$ и $AB_1CD$ высоты $BH$ и $B_1H_1$. Прямоугольные треугольники $\Delta ABH$ и $\Delta AB_1H_1$ подобны, т.к. имеют общий угол $\angle ABH$. Следовательно, $\frac{B_1H_1}{BH} = \frac{AB_1}{AB} = \frac{14}{5}$.

Объём тетраэдре $ABCD$ равен $\frac{1}{3}BH \cdot S_{\Delta ACD}$, а объём тетраэдре $AB_1CD$ равен $\frac{1}{3}B_1H_1 \cdot S_{\Delta ACD}$, значит

$$\frac{V_{AB_1CD}}{V_{ABCD}} = \frac{B_1H_1}{BH} = \frac{14}{5}.$$

Если продолжить теперь сторону $AC$ в тетраэдре $AB_1CD$ и повторить аналогичные рассуждения, получим

$$\frac{V_{AB_1C_1D}}{V_{AB_1CD}} = \frac{12}{7}.$$

И если продолжить сторону $AD$ в тетраэдре $AB_1C_1D$ и снова повторить аналогичные рассуждения, получим

$$\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{AB_1C_1D}} = \frac{10}{4}.$$

Перемножая дроби имеем $\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = 12.$

*Ответ*: 12.

**Задача 6.**

*Решение:*

Сделаем следующие преобразования

$$f\left(\frac{1}{40}(x^2+12x-45)\right) + (x-1)\cdot f\left(\frac{1}{12}(x^2-14x+45)\right) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{40}(x-3)(x+15)\right) + (x-1)\cdot f\left(\frac{1}{12}(x-9)(x-5)\right) = 1$$

Если $x=3$, то $f(0)+2f(1)=1$. Если $x=5$, то $f(1)+4f(0)=1$.

Решая систему из этих двух уравнений, получим $f(0)=\frac{1}{7}$ и $f(1)=\frac{3}{7}$

*Ответ*: 3.

**Задача 7.**

*Решение:*

ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{tg} 2x \neq -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq -\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

1-ый способ. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, имеем

$$\operatorname{tg} x=\frac{1-\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg} 2x}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg} 2x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

2-ой способ.

$$\operatorname{tg} x=\frac{1-\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg} 2x}=\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x+\sin 2x}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

Далее получаем,

$$x=\frac{\pi}{4}-2x+\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}$$

С учётом ОДЗ, получаем

$$x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Третьим по возрастанию положительным значением $x$ будет $\frac{13\pi}{12}$. Следовательно, $\frac{60x}{\pi} = 65$.

*Ответ*: 65.

**Задача 8.**

*Решение:*

ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x + 3 \neq 1 \\ 7 - x > 0 \\ 7 - x \neq 1 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \neq -2 \\ x < 7 \\ x \neq 6 \\ x \in \mathbb{R} \backslash [-1,2] \end{cases} \Rightarrow x \in (-3,-2) \cup (-2,-1) \cup (2,6) \cup (6,7)$$

Имеем

$$1 \geq \log_{x+3}(x^2 - x - 2) \log_{7-x}(x+3)$$

$$1 \geq \frac{\log_{x+3}(x^2 - x - 2)}{\log_{x+3}(7 - x)}$$

$$1 \geq \log_{7-x}(x^2 - x - 2)$$

$$\log_{7-x}(7 - x) - \log_{7-x}(x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$\log_{7-x}\left(\frac{7 - x}{x^2 - x - 2}\right) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{7 - x}{x^2 - x - 2} \geq 1, \text{ если } x < 6 \\ \frac{7 - x}{x^2 - x - 2} \leq 1, \text{ если } x \in (6,7) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{9 - x^2}{(x-2)(x+1)} \geq 0, \text{ если } x < 6 \\ \frac{9 - x^2}{(x-2)(x+1)} \leq 0, \text{ если } x \in (6,7) \end{array}\right.$$

Выражение $9-x^2$ – парабола ветви вниз, поэтому оно неотрицательно, когда $x\in[-3,3]$ и отрицательно в остальных случаях. Выражение $(x-2)(x+1)$ – парабола ветви вверх, поэтому оно неположительно на интервале $x\in[-1,\ 2]$ и положительно в остальных случаях. Значит, выражение $\frac{9-x^2}{(x-2)(x+1)}$ неотрицательно при $x\in[-3,-1)\cup(2,\ 3]$ и неположительно при $x\in(-\infty,-3]\cup(-1,2)\cup[3,+\infty)$.

Используя рассуждения выше и ОДЗ приходим к результату

$$x\in(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(2,3]\cup(6,7)$$

*Ответ*: 4.

**Задача 9.**

*Решение:*

Без ограничения общности предположим, что две вершины лежат на стороне $AB$ (смотрите рисунок справа). Проведём высоту $NH$ ромба.

Т.к. $MN||AB$, то $\Delta\mathrm{NMC}\sim\Delta\mathrm{ABC}$. Следовательно,

$$\frac{S_{NMC}}{S_{ABC}}=\left(\frac{MN}{AB}\right)^2\Rightarrow S_{NMC}=\left(\frac{MN}{AB}\right)^2\cdot S_{ABC}$$

Площадь трапеции $ANMB$ равна $S_{ANMB}=\frac{MN+AB}{2}\cdot NH$.

Площадь ромба $KLMN$ равна $S_{KLMN}=MN\cdot NH\Rightarrow NH=\frac{S_{KLMN}}{MN}$.

Получаем

$$S_{ABC}=S_{NMC}+S_{ANMB}=\left(\frac{MN}{AB}\right)^2\cdot S_{ABC}+\frac{MN+AB}{2}\cdot NH=$$

$$=\left(\frac{MN}{AB}\right)^2\cdot S_{ABC}+\frac{MN+AB}{2}\cdot\frac{S_{KLMN}}{MN}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{KLMN}\cdot\frac{MN+AB}{2MN}=S_{ABC}\cdot\left(1-\left(\frac{MN}{AB}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{KLMN} = S_{ABC} \cdot \frac{2\dfrac{MN}{AB}}{1+\dfrac{MN}{AB}}\left(1-\left(\frac{MN}{AB}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{KLMN} = S_{ABC} \cdot 2\frac{MN}{AB}\left(1-\frac{MN}{AB}\right)$$

Площадь ромба получается наибольшей тогда, когда $2\frac{MN}{AB}\left(1-\frac{MN}{AB}\right)$ принимает наибольшее значение. Т.е. надо найти максимум функции $y = 2x(1-x)$. Это парабола ветви вниз, значит её максимум в вершине $x = \frac{1}{2}$ и равен $\frac{1}{2}$. Поэтому наибольшая площадь ромба будет $S_{KLMN} = \frac{S_{ABC}}{2}$.

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84 \Rightarrow S_{KLMN} = 42$.

*Ответ*: 42.

**Задача 10.**

*Решение:*

Преобразуем первое уравнение

$$((x-6)^2-25)^2 + ((x-6)^2-25)(2y^2+24y+90) + \big((y+3)(y+9)\big)^2 = 0$$

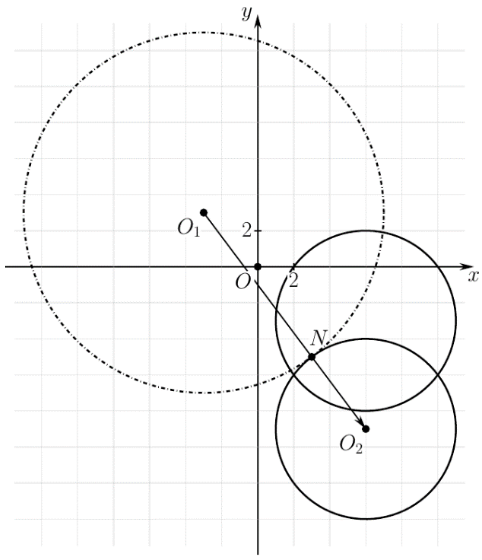
$$((x-6)^2-25)^2 + ((x-6)^2-25)((y+3)^2+(y+9)^2) + (y+3)^2(y+9)^2 = 0$$

$$((x-6)^2+(y+3)^2-25)((x-6)^2+(y+9)^2-25) = 0$$

Преобразуем второе уравнение

$x^2+6x+y^2-6y = a$

$$(x+3)^2+(y-3)^2 = a+18$$




Первое уравнение задаёт две окружности – с центром в $(6,-3)$ и радиусом 5, с центром в $(6,-9)$ и радиусом 5. Второе уравнение задаёт окружность с центром в $(-3,3)$ и радиусом $\sqrt{a+18}$.

Поэтому наша задача сводится к тому, при каком значении параметра окружность первый раз имеет три общие точки с двумя окружностями из первого уравнения. Из рисунка видно, что это достигается, когда окружность касается окружности с центром в $(6,-9)$ и радиусом 5. Точка касания лежит на отрезке, соединяющей центр $O_1(-3,3)$ окружности из второго уравнения и центр $O_2(6,-9)$ окружности $(x-6)^2+(y+9)^2=5^2$.

Пусть $N$ точка касания. Вектор $\overline{O_1O_2}=(9,-12)$ сонаправлен вектору $\overline{NO_2}$, значит $\overline{NO_2}=(9x,-12x)$, где $x\in\mathbb{R}$. Т.к. точка $N$ лежит на окружности, то

$$|\overline{NO_2}|=5\Rightarrow 81x^2+144x^2=25\Rightarrow x^2=\frac{1}{9}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}$$

Т.к. $\overline{NO_2}$ и $\overline{O_1O_2}$ сонаправлены, то берём значение с плюсом. Значит, $\overline{NO_2}=(3,-4)$, а, следовательно, $N(3,-5)$. Подставляем точку касания во второе уравнение исходной системы

$$(3+3)^2+(-5-3)^2=a+18\Rightarrow a=82$$

*Ответ*: 82.