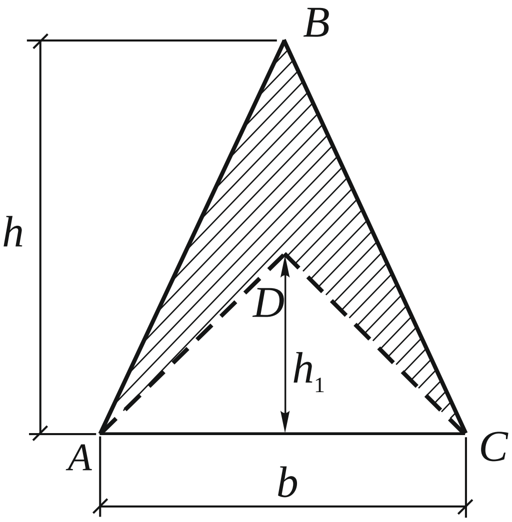
Задача №1



Из равнобедренного треугольника ABC с высотой h и основанием b вырезан равнобедренный треугольник с тем же основанием так, что его вершина D является центром тяжести оставшейся части фигуры.

Определить высоту h_1 вырезанного треугольника. Ответ выразить в долях h.

Решение.

Площадь сечения: $F = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}bh_1 = \frac{1}{2}b\left(h - h_1\right).$

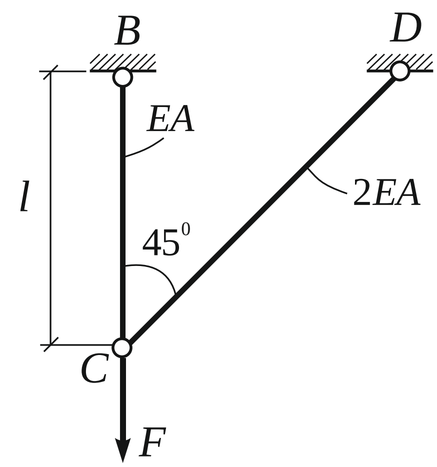
Статический момент площади: $S = \frac{1}{2}bh\frac{1}{3}h - \frac{1}{2}bh_1\frac{1}{3}h_1 = \frac{1}{6}b\left(h^2 - h_1^2\right).$

Координата центра тяжести: $y_C = \frac{S}{F} = \frac{\frac{1}{6}b\left(h^2 - h_1^2\right)}{\frac{1}{2}b\left(h - h_1\right)} = \frac{1}{3}\left(h + h_1\right).$

По условию: $y_C = h_1 = \frac{1}{3}\left(h + h_1\right)$, откуда $\frac{2}{3}h_1 = \frac{1}{3}h$ и окончательно $h_1 = \frac{h}{2}.$

<u>Ответ</u>: $h_1 = h/2$.

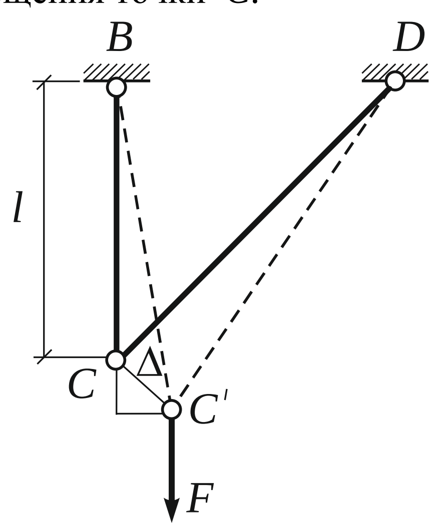
Задача №2



Стержневая система *BCD*, состоящая из двух стержней разной жесткости, загружена вертикальной силой *F*. Размеры и жесткости стержней показаны на чертеже. Здесь *A* – площадь поперечного сечения, *E* – модуль упругости материала.

Определить величину перемещения точки *C*.

Решение.



Очевидно, что усилие в стержне *DC* равно нулю, и, следовательно, точка С под действием приложенной вертикальной силы будет перемещаться перпендикулярно к направлению этого стержня.

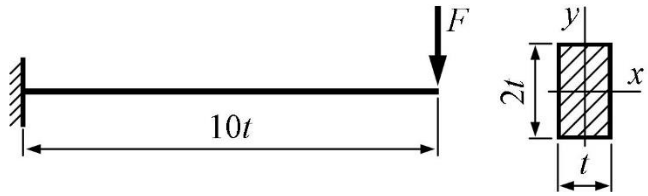
Вертикальная проекция этого перемещения равна удлинению стержня *BC*:

$$\Delta_{BC} = \frac{Fl}{EA}.$$

Тогда можно определить величину перемещения точки С, как гипотенузу прямоугольного треугольника.

Ответ: $\Delta_C = \frac{Fl}{EA}\sqrt{2}$.

Задача №3



Консольная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой F. Значение максимального нормального напряжения в балке равно 40 МПа.

Укажите значение максимального касательного напряжения в балке.

Решение.

Изгибающий момент в опорном сечение балки: $M = F \cdot 10t$.

Момент сопротивления поперечного сечения балки: $W_x = \dfrac{bh^2}{6} = \dfrac{t(2t)^2}{6} = \dfrac{2}{3}t^3$

Максимальное нормальное напряжение: $\sigma_{\max} = \dfrac{M}{W_x} = \dfrac{F \cdot 10t}{\frac{2}{3}t^3} = \dfrac{F \cdot 15}{t^2} = 40\,\text{МПа}$.

В результате получаем: $\dfrac{F \cdot}{t^2} = \dfrac{40}{15}\text{МПа} = \dfrac{8}{3}\text{МПа}$.

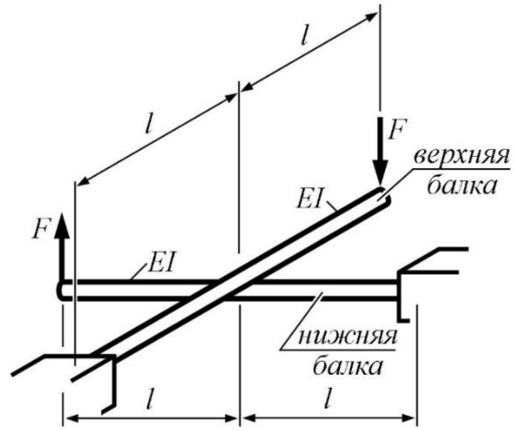
Максимальное касательное напряжение в прямоугольном сечении:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A} = \frac{3}{2}\frac{F}{2t^2}.$$

С учетом результата, полученного ранее: $\tau_{\max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{F}{2t^2} = \dfrac{3}{4}\dfrac{8}{3}\text{МПа} = 2\,\text{МПа}$

Ответ: 2 Мпа.

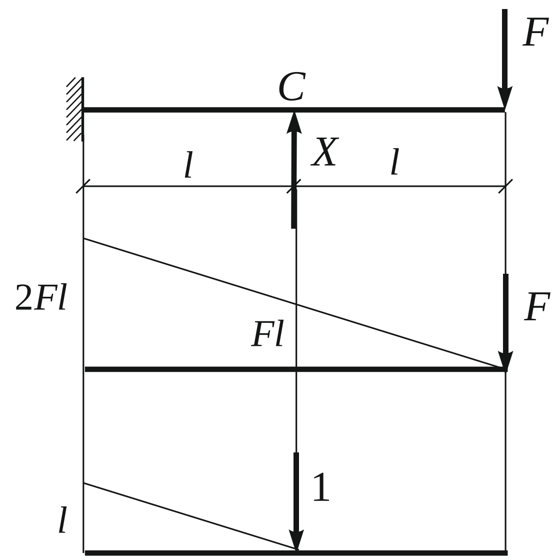
Задача №4



Система состоит из двух перекрестных балок круглого поперечного сечения и нагружена двумя силами F. Контакт между балками точечный.
Жесткость поперечного сечения при изгибе EI известна.

Определить величину контактного усилия между балками. Ответ выразить в долях F.

Решение.



Рассмотрим консольную балку под действием двух сил: приложенной силы F и искомой X.

Очевидно, что точка контакта балок имеет нулевое перемещение.

С использованием грузовой и единичной эпюр найдем перемещение этой точки от каждой силы в отдельности и приравняем суммарное перемещение нулю.

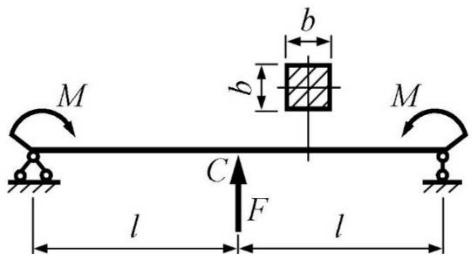
$$\Delta_{CF} = \int \frac{M_F M_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ}\frac{l}{6}\left(2\cdot 2Fl\cdot l + Fl\cdot l\right) = \frac{1}{EJ}\frac{5}{6}Fl^3.$$

$$\Delta_{CX} = -X\int \frac{M_1^2}{EJ} dx = -\frac{X}{EJ}\frac{l}{6}\left(2\cdot l\cdot l\right) = -\frac{X}{EJ}\frac{l^3}{3}. \quad \Delta_{CF} + \Delta_{CX} = 0 \quad \frac{1}{EJ}\frac{5}{6}Fl^3 = \frac{X}{EJ}\frac{l^3}{3}$$

$$X = \frac{5\cdot 3}{6}F.$$

Ответ: 2,5 F.

Задача №5



Шарнирно опертая балка квадратного поперечного сечения нагружена двумя сосредоточенными моментами $M = 0,2$ кНм и силой F.

Кривизна балки в сечении C равна нулю.

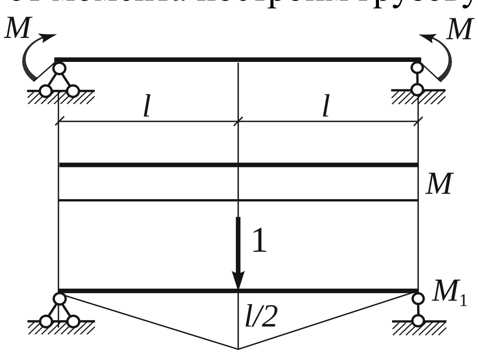
Известны величины: модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, ширина сечения балки b = 0,02 м, длина половины пролета l = 0,2 м.

Определить значение прогиба балки в сечении C.

Решение.

Равенство нулю кривизны означает, что в этом сечении нулю равен изгибающий момент: $M_C = M - \dfrac{F \cdot 2l}{4} = 0$. Следовательно, $F = \dfrac{2M}{l}$.

Для определения прогиба от момента построим грузовую и единичную эпюры.



В результате получим $$\upsilon_{CM} = \int \frac{M\ M_1}{EJ}dx = \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot 2l \cdot M = \frac{Ml^2}{2EJ}.$$

Прогиб от сосредоточенной силы можно определить, умножая единичную эпюру саму на себя с множителем F

$$\upsilon_{CF} = -F\int\frac{M_1^2}{EJ}dx = -\frac{F}{EJ}2\cdot\frac{l}{6}\cdot 2\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} = -\frac{Fl^3}{6EJ}.$$

С учетом соотношения между силой и моментом $\upsilon_{CF} = -\dfrac{Fl^3}{6EJ} = -\dfrac{Ml^2}{3EJ}$.

Суммарный прогиб в сечении C балки равен:

$$\upsilon_C = \upsilon_{CM} + \upsilon_{CF} = \frac{Ml^2}{2EJ} - \frac{Ml^2}{3EJ} = \frac{Ml^2}{6EJ}.$$

Момент инерции поперечного сечения балки: $J_z = \frac{b^4}{12}$, т.е. $\upsilon_C = \frac{2Ml^2}{Eb^4}$.

Заметим, что

$E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{кН / см}^2$, $M = 0{,}2$ кНм = 20 кНсм, l = 20 см, b = 2 см.

Подставим числовые значения в полученный результат

$$\upsilon_C = \frac{2Ml^2}{Eb^4} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 20^2}{2 \cdot 10^4 \cdot 2^4} = \frac{20^3}{16 \cdot 10^4} = \frac{8 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^4} = \frac{8}{160} = 0{,}05 \text{см}.$$

Ответ: 0,05 см.