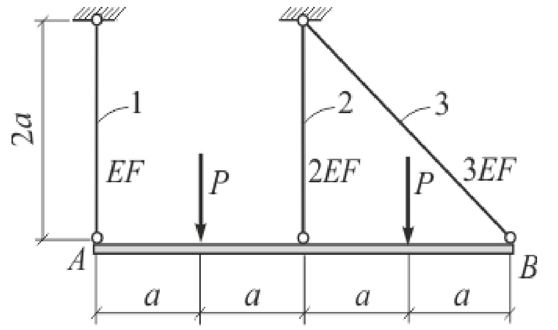
Задача №1.

Абсолютно жесткая балка AB подвешена на трех упругих стержнях 1, 2, 3. Жесткости стержней на растяжение указаны на рисунке.



Определить:
1. усилия в стержнях 1, 2, 3,
2. горизонтальное перемещение балки AB.

Решение.

Статическая сторона задачи:

Составим уравнения равновесия (рис.1.1).

1. $\sum x=0$ получим $N_3=0$.
2. $\sum M_D=0$ $N_1=0$.
3. $\sum y=0$ $N_2=2P$

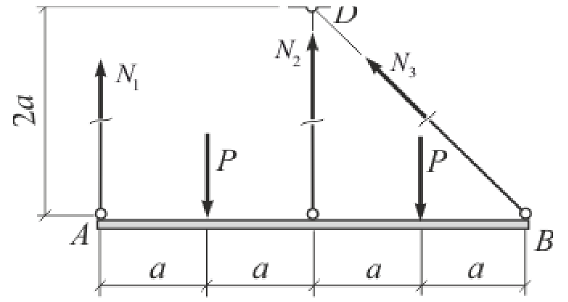


Рис.1.1

Геометрическая сторона задачи:

Составим схему деформирования (рис.1.2).

Суммарное перемещение точки B направлено перпендикулярно стержню DB, так как усилие в нем равно 0. Вертикальная и горизонтальная проекции этого перемещения равны по величине, поскольку угол наклона этого стержня равен 45^0, и могут быть обозначены Δ.

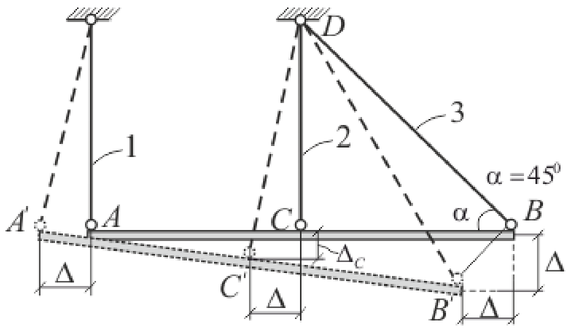


Рис.1.2

По той же причине точка A перемещается перпендикулярно стержню 1, т.е. по горизонтали, это и есть искомое горизонтальное перемещение балки AB.

Из подобия треугольников $\Delta_C=\dfrac{\Delta}{2}$ и, следовательно $\Delta=2\Delta_C$.

Физическая сторона задачи (закон Гука при растяжении):

Удлинение вертикального стержня 2: $\Delta l=\Delta_C=\dfrac{Nl}{2EF}=\dfrac{2P\cdot 2a}{2EF}=\dfrac{2Pa}{EF}$,

и окончательно $\Delta=2\Delta_C=\dfrac{4Pa}{EF}$

Ответ: 1. $N_1=0$, $N_2=2P$, $N_3=0$. 2. $\Delta=\dfrac{4Pa}{EF}$.

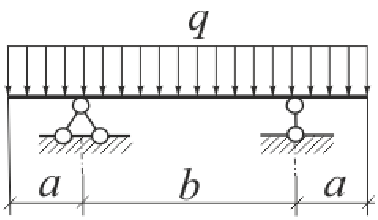
Второй способ определения горизонтального перемещения балки (намного проще)

Применим метод Мора и приложим горизонтальную единичную силу в направлении искомого перемещения. Тогда из уравнения равновесия $\sum x=0$ $\bar N_3=-\sqrt{2}$.

А из уравнения $\sum M_A=0$ $-N_2\cdot 2a-N_3\cdot\cos 45^0\cdot 4a=0$ получим $\bar N_2=2$.

И окончательно по формуле Мора $\Delta=\int\limits_0^l\dfrac{N_P\bar N_1}{2EF}ds=\dfrac{2P\cdot 2}{2EF}\cdot 2a=\dfrac{4Pa}{EF}$, что совпадает с полученным ранее результатом.

Задача №2.



Балка, расположена на двух вертикальных опорах и загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q.

Определить соотношение b/a, при котором абсолютные значения наибольших изгибающих моментов в балке будут минимальными.

Решение.

Построим эпюру изгибающих моментов (рис.2.1)

Над опорой изгибающий момент равен $\frac{qa^2}{2}$, в середине пролета $\frac{qb^2}{8}-\frac{qa^2}{2}$. Приравняем эти значения $\frac{qa^2}{2}=\frac{qb^2}{8}-\frac{qa^2}{2}$. Отсюда $qa^2=\frac{qb^2}{8}$, $\frac{b^2}{a^2}=8$

и окончательно $\frac{b}{a}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Ответ: $b/a=2\sqrt{2}$.

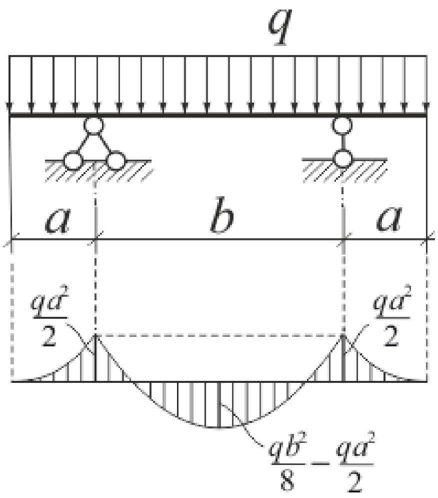
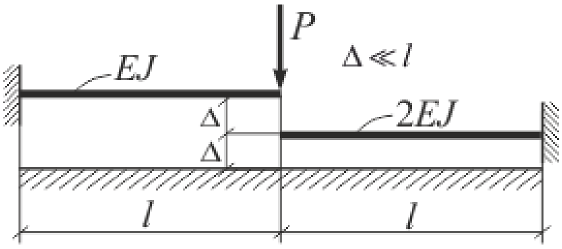


Рис.2.1

Задача №3.



Между двумя упругими консольными балками и жестким основанием имеются малые зазоры $\Delta \ll l$. К концу верхней балки приложена сила P. Жесткости балок на изгиб указаны на рисунке.

Определить, при каком значении P левый конец нижней балки коснется основания.

Решение.

Определим перемещение точки приложения сосредоточенной силы (рис.3.1,а).

Для этого в соответствии с методом Мора построим грузовую (рис.3.1,б) и единичную (рис.3.1,в) эпюры моментов и найдем интеграл от их произведения

$$\Delta=\int\frac{M_P\bar{M}_1}{EJ}dx=\frac{1}{EJ}\frac{1}{2}Pl\cdot l\cdot\frac{2}{3}l=\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Таким образом, для перемещения конца консольной балки на Δ требуется сила, равная $P=\frac{3EJ}{l^3}\Delta$.

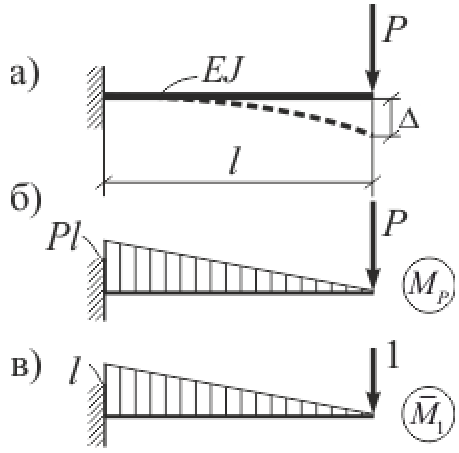


Рис.3.1

В данном случае конец левой балки надо переместить на 2Δ, правой на Δ, но её жесткость в 2 раза больше, поэтому искомая сила должна быть в 4 раза больше, чем для однократного смещения, т.е. $P=4\frac{3EJ}{l^3}\Delta$

Ответ: $P=\frac{12EJ}{l^3}\Delta$.

Задача №4.

Для рамы, состоящей из стержней одинаковой жесткости на изгиб, равной EJ, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

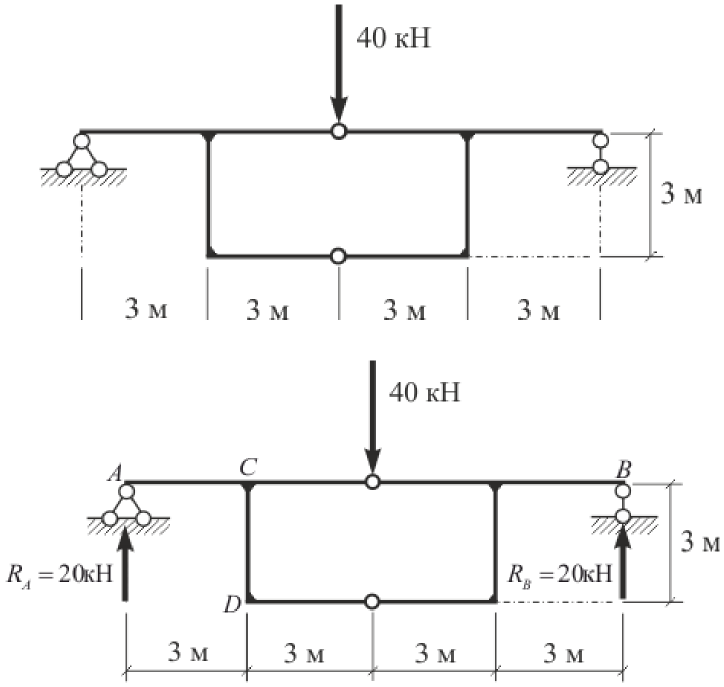


Рис.4.1

Решение.

Совершенно очевидно, что опорные реакции будут половине приложенной нагрузки, т.е. 20 кН.

Следовательно, на горизонтальном элементе от опоры A до опоры B эпюра изгибающих моментов может быть построена с учетом знания этих реакций и деления приложенной силы пополам (рис.4.2).

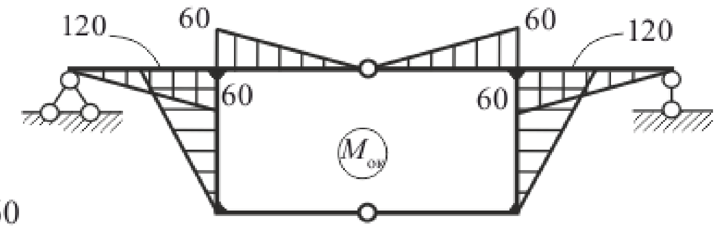


Рис.4.2

Затем рассматривается равновесие узла C (рис.4.3), из которого можно определить значение изгибающего момента в узле C на элементе CD.

Наличие шарнира в нижнем горизонтальном элементе позволяет сделать вывод о том, что изгибающие моменты в этом элементе отсутствуют.

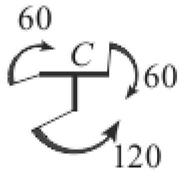


Рис.4.3

По эпюре изгибающих моментов определяются поперечные силы (рис.4.4), а из равновесия узлов D (рис.4.5) и C (рис.4.6) определяются значения продольных сил в горизонтальных элементах рамы.

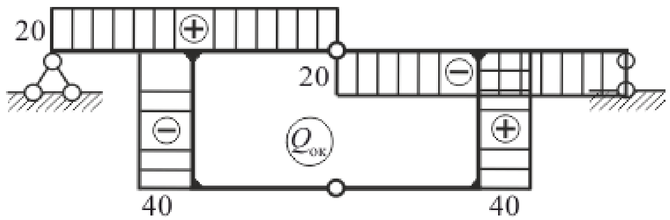


Рис.4.4

Эпюра продольных сил показана на рис.4.7.

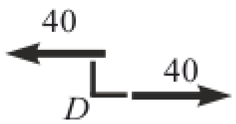


Рис.4.5

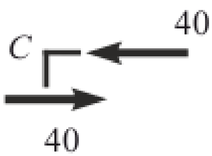


Рис.4.6

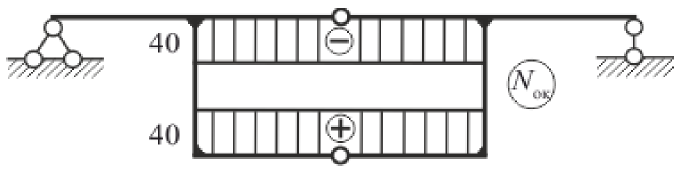


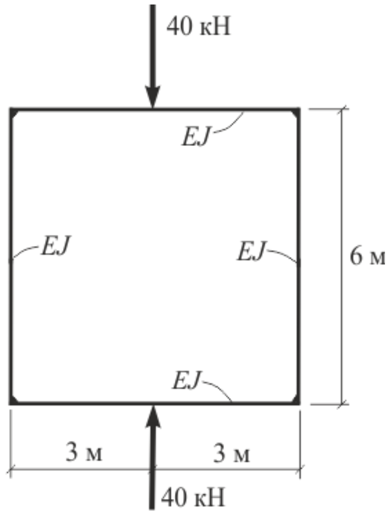
Рис.4.7

Задача №5.

Замкнутая квадратная рама состоит из стержней одинаковой жесткости на изгиб, равной EJ, и загружена двумя вертикальными силами. Требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
2. Определить взаимное смещение точек приложения сил.

Примечание: деформациями стержней от продольных сил пренебречь.



Решение.

Для раскрытия статической неопределимости рамы применим метод сил. Основную систему получим, врезая два шарнира (рис.5.1). Здесь же показана единичная эпюра, полученная от приложенных единичных моментов.

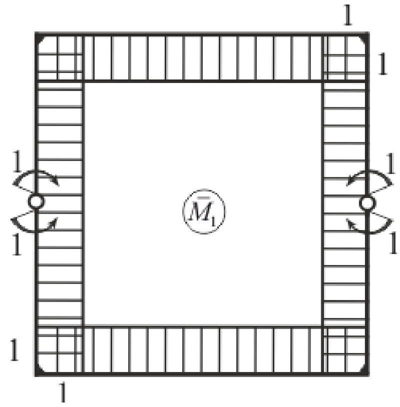


Рис.5.1

Грузовая эпюра показана на рис.5.2.

Составим каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Коэффициент δ_{11} определим, умножая единичную эпюру «саму на себя»: $\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds = \frac{4 \cdot 6 \cdot 1}{EJ} = \frac{24}{EJ}$.

Для определения Δ_{1P} умножим грузовую эпюру на единичную

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_P \bar{M}_1}{EJ} ds = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{60 \cdot 6 \cdot 1}{EJ} = \frac{360}{EJ}.$$

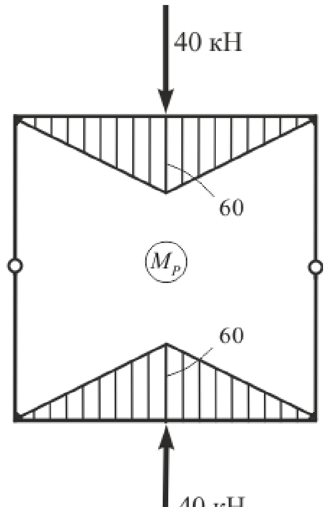


Рис.5.2

Подставляя полученные результаты в каноническое уравнение $\frac{24}{EJ} X_1 + \frac{360}{EJ} = 0$, получаем $X_1 = -\frac{360}{24} = -15$.

С учетом найденного значения изгибающего момента по всему контуру рамы окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис.5.3. Эпюра поперечных сил показана на рис.5.4, а продольных сил – на рис.5.5.

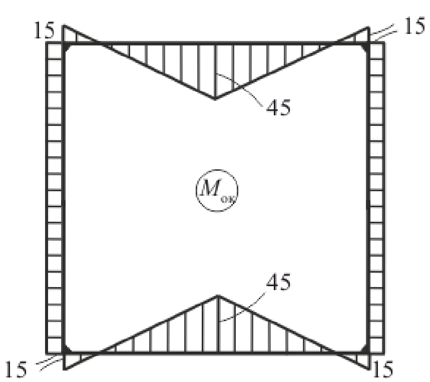


Рис.5.3

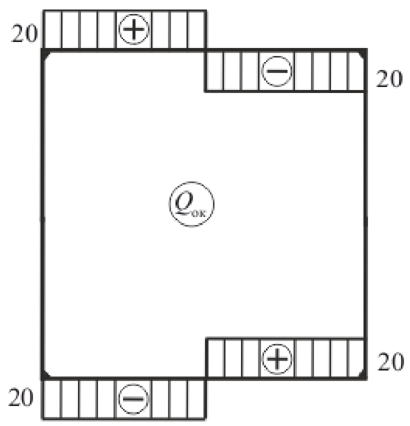


Рис.5.4

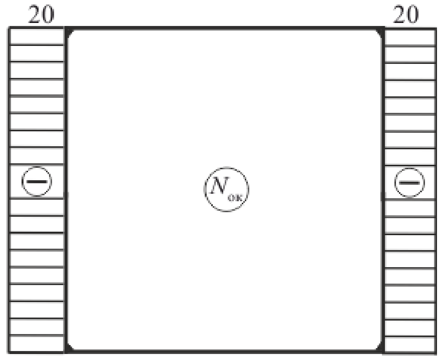


Рис.5.5

Для определения взаимного смещения точек приложения сил построим соответствующую единичную эпюру от действия двух вертикальных сил (рис.5.6), и, в соответствии с методом Мора, найдем интеграл от произведения окончательной эпюры на эту эпюру.

$$\Delta = \int \frac{M_{\text{ок}}\bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{4}{EJ} \cdot \frac{3}{6}\left(2 \cdot 45 \cdot 1{,}5 - 15 \cdot 1{,}5\right) = \frac{225}{EJ}.$$

Здесь для получения результата интегрирования использована формула перемножения трапеций на одном из четырех характерных участков.

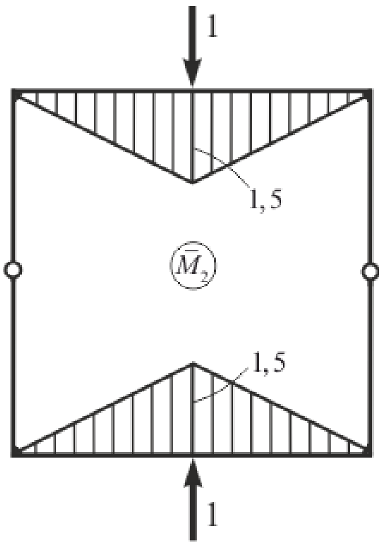


Рис.5.6