**РЕШЕНИЯ** **ВАРИАНТ 1**

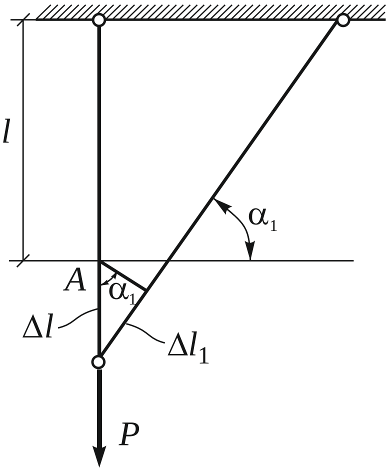
**Задача 1.**

Обозначим усилие в вертикальном стержне N, а в наклонных стержнях Ni.

Статическая сторона задачи:

Составим уравнение равновесия $\sum y = 0$.

$$P = N + 2(N_1 \sin\alpha_1 + N_2 \sin\alpha_2 + N_3 \sin\alpha_3) \qquad (1)$$




Геометрическая сторона задачи (условие совместности деформаций):

Рассмотрим вертикальное перемещение узла А и установим связь между удлинениями вертикального стержня $\Delta l$ и одного из наклонных стержней $\Delta l_1$:

$$\Delta l_1 = \Delta l \sin\alpha_1. \qquad (2)$$

Физическая сторона задачи (закон Гука при растяжении):

Удлинение вертикального стержня: $\Delta l = \dfrac{Nl}{EF}$,

удлинение наклонного стержня: $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l_1}{EF} = \dfrac{N_1}{EF}\dfrac{l}{\sin\alpha_1}$.

Подставим найденные удлинения в соотношение (2), $\dfrac{N_i}{EF}\dfrac{l}{\sin\alpha_i} = \dfrac{Nl}{EF}\sin\alpha_i$.

Откуда $N_1 = N\sin^2\alpha_1$.

Обобщая этот результат на остальные наклонные стержни, соотношение (1) принимает вид:

$$P = N\left[1 + 2(\sin^3\alpha_1 + \sin^3\alpha_2 + \sin^3\alpha_3)\right].$$

Так как $N_{доп} = F\gamma_c R$, $P_{доп} = F\gamma_c R\left[1 + 2(\sin^3\alpha_1 + \sin^3\alpha_2 + \sin^3\alpha_3)\right]$.

Что касается предельной силы, при которой система стремится к неограниченному росту деформаций, то следует положить, что в каждом стержне напряжение достигло значения предела текучести $\sigma_т$.

Тогда из уравнения равновесия (1) получаем:

$$P_{пр} = F\sigma_т + 2(F\sigma_т \sin\alpha_1 + F\sigma_т \sin\alpha_2 + F\sigma_т \sin\alpha_3)$$

и окончательно:

$$P_{\text{пр}} = F\sigma_{\text{т}}\left[1 + 2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3)\right].$$

**Ответ:** 1. $P_{\text{доп}} = F\gamma_{\text{c}}R\left[1 + 2(\sin^3\alpha_1 + \sin^3\alpha_2 + \sin^3\alpha_3)\right].$

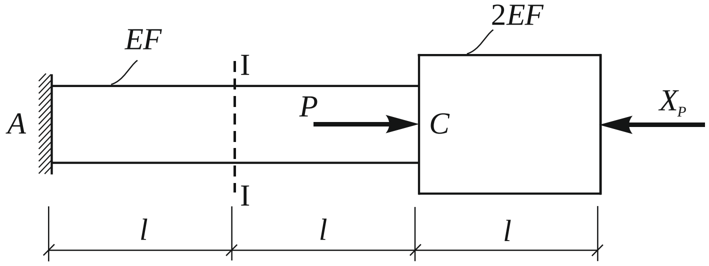
2. $P_{\text{пр}} = F\sigma_{\text{т}}\left[1 + 2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3)\right]$

**Задача 2.**

Определим перемещение сечения I-I от каждого воздействия.

1. Выполним расчет статически неопределимого стержня на действие силы P.

Для этого отбросим правую заделку, заменим её искомой силой XP и приравняем нулю перемещение правого конца стержня.




Перемещение от силы P равно удлинению участка AC $\Delta l_P = \dfrac{2Pl}{EF}$,

перемещение от искомой силы XP равно укорочению всего стержня:

$$\Delta l_{X_P} = -2\frac{X_P l}{EF} - \frac{X_P l}{2EF} = -\frac{5}{2}\frac{X_P l}{EF}.$$

Приравнивая нулю сумму полученных перемещений

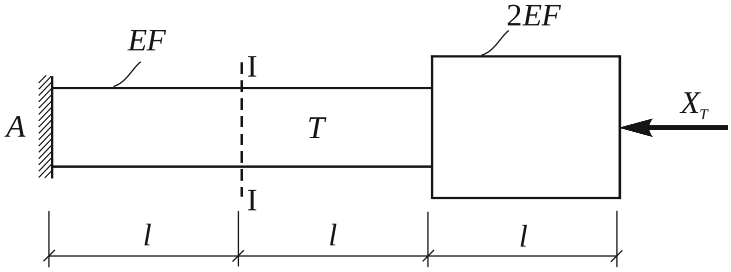
$\Delta l_P + \Delta l_{X_P} = \dfrac{2Pl}{EF} - \dfrac{5}{2}\dfrac{X_P l}{EF} = 0$, находим реакцию в заделке от силы P: $X_P = \dfrac{4P}{5}$.

Перемещение сечения I-I от силового воздействия равно:

$$u_{I-I} = \frac{Pl}{EF} - \frac{X_P l}{EF} = \frac{Pl}{EF} - \frac{4P}{5}\frac{l}{EF} = \frac{P}{5}\frac{l}{EF}.$$

2. Выполним расчет стержня на действие температуры T.

Для этого вновь отбросим правую заделку, заменим её искомой силой XT и приравняем нулю перемещение правого конца стержня.



Перемещение от температуры Т равно удлинению всего стержня $\Delta l_T = 3\alpha l T$.

Перемещение от искомой силы ХТ нам уже известно: $\Delta l_{X_T} = \Delta l_{X_P} = -\frac{5}{2}\frac{X_T l}{EF}$.

Приравнивая нулю сумму полученных перемещений $\Delta l_T + \Delta l_{X_T} = 3\alpha l T - \frac{5}{2}\frac{X_T l}{EF} = 0$

находим реакцию в правой заделке от температуры Т: $X_T = \frac{6}{5}\alpha EFT$.

Перемещение сечения I-I от температурного воздействия равно:

$$u_{I-I} = \alpha l T - X_T\frac{l}{EF} = \alpha l T - \frac{6}{5}\alpha EFT\frac{l}{EF} = \alpha l T - \frac{6}{5}\alpha l T = -\frac{1}{5}\alpha l T.$$

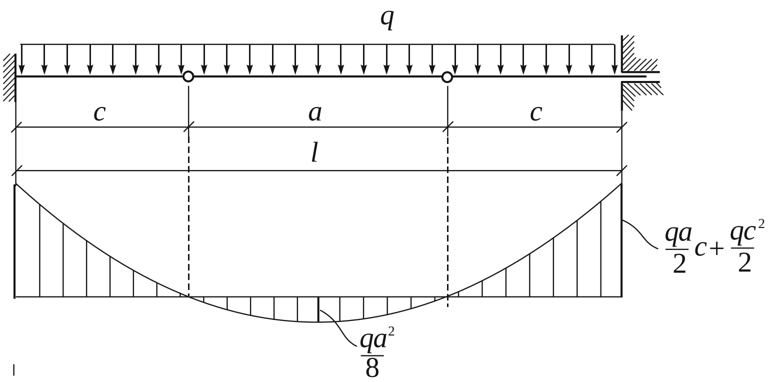
Приравняем нулю суммарное перемещение сечения I-I:

$u_{I-I} = \frac{P}{5}\frac{l}{EF} - \frac{1}{5}\alpha l T = 0$. Отсюда $P = \alpha TEF$.

**Ответ:** $P = \alpha TEF$.

**Задача 3.**

Эпюра изгибающих моментов в балке при любом расположении шарниров имеет вид:




При этом изгибающий момент в центральном сечении балки равен: $M = \frac{qa^2}{8}$, а в опорном сечении (заделке): $M = -\frac{qa}{2}c - \frac{qc^2}{2}$.

Учитывая характер представленной эпюры (а это график квадратичной зависимости), можно видеть, что даже при достаточно значительном расстоянии между шарнирами, значение изгибающего момента в заделке по абсолютной величине больше, чем в центре балки. Но при дальнейшем увеличении расстояния а значение момента в центре становится по абсолютной величине больше, чем в заделке.

Следовательно, для получения минимального значения наибольшего по абсолютной величине изгибающего момента необходимо приравнять соответствующие значения в центре балки и в заделке: $\frac{qa^2}{8} = \frac{qa}{2}c + \frac{qc^2}{2}$.

Учитывая, что $c = \frac{l-a}{2}$, получим $\frac{qa^2}{8} = \frac{qa}{2}\frac{l-a}{2} + \frac{q}{2}\frac{(l-a)^2}{4}$.

До множив обе части этого равенства на 8 и сократив на q, получим следующее уравнение: $a^2 = 2a(l-a) + (l-a)^2$.

Раскроем скобки: $a^2 = 2al - 2a^2 + l^2 - 2al + a^2$ и приведем подобные, в результате чего получим $2a^2 = l^2$.

**Ответ:** $a = l/\sqrt{2}$.

**Задача 4.**

При поперечном изгибе балки наибольшие нормальные напряжения в крайних волокнах определяются по формуле $\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$,

где $W -$ момент сопротивления сечения.

Для прямоугольного сечения моменты сопротивления соответственно равны: $W_z = \frac{bh^2}{6}$ и $W_y = \frac{hb^2}{6}$.

Для того, чтобы удлинение ребра СС1 было равно нулю, надо, чтобы нормальное напряжение в нем равнялось нулю:

Напряжение в любой точке ребра СС1 от силы Р1:

$$\sigma_{CC_1} = -\frac{M_z}{W_z} = -6\frac{P_1 x}{bh^2} \text{ (сжатие).}$$

Напряжение в любой точке ребра СС1 от силы Р2:

$$\sigma_{CC_1} = \frac{M_y}{W_y} = 6\frac{P_2 x}{hb^2} \text{ (растяжение).}$$

Приравняем нулю полученные значения напряжений: $\sigma_{CC_1} = 6\frac{P_2 x}{hb^2} - 6\frac{P_1 x}{bh^2} = 0$.

В результате получаем: $\frac{P_2}{b} = \frac{P_1}{h}$ и окончательно $\frac{P_1}{P_2} = \frac{h}{b} = k$.

**Ответ:** $P_1/P_2 = k$.

**Задача 5.**

Определим инварианты тензора напряжений:

$I_1 = a + a + a = 3a$. $I_2 = a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a - a \cdot a - a \cdot a - a \cdot a = 0$. $I_3 = 0$.

$I_2 = 0$, $I_3 = 0$ и, следовательно, это одноосное напряженное состояние.

Для определения значений главных напряжений составим кубическое уравнение $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$, которое с учетом найденных значений инвариантов принимает вид: $\sigma^3 - 3a\sigma^2 = 0$.

Решением этого уравнения являются значения главных напряжений:

$$\sigma_1 = 3a, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Положение главных площадок.

Совершенно очевидно, что при одноосном растяжении главная площадка с напряжением, равным 3a, расположена перпендикулярно оси стержня, а две другие ей параллельны, и их бесчисленное множество.

Что касается положения главной площадки с напряжением 3a по отношению к системе координат, изображенной на рисунке, то, учитывая симметрию заданного напряженного состояния относительно координатных осей, можно прийти к выводу, что её положение определяется следующими значениями направляющих косинусов: $l = m = n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

При необходимости более строгого обоснования представленных результатов воспользуемся соотношениями для напряжений на наклонной площадке

$$\left.\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \end{aligned}\right\},$$

которое в данном случае для двух первых строк принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i l &= al + am + an; \\ \sigma_i m &= al + am + an; \end{aligned}\right\}, \text{ т.е. } \quad \left.\begin{aligned} 0 &= (a - \sigma_i)l + am + an; \\ 0 &= al + (a - \sigma_i)m + an; \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

1.Площадка с главным напряжением, равным $\sigma_1 = 3a$

Система уравнений (1) принимает вид $\left.\begin{aligned} 0 &= (a - 3a)l + am + an; \\ 0 &= al + (a - 3a)m + an; \end{aligned}\right\}$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$0 = -3l + 3m, \qquad \text{т.е. } l = m.$$

Но, если рассматривать первое и третье уравнение, то получим $l = n$.

Следовательно, $l = m = n$ и с учетом соотношения $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

вновь получаем $l = m = n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2.Площадки с главными напряжениями- $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

В этом случае система уравнений (1) принимает вид $\left.\begin{aligned} 0 = al + am + an; \\ 0 = al + am + an; \end{aligned}\right\}$, т.е. имеем 2 одинаковых уравнения вида $l + m + n = 0$, что говорит о невозможности получить однозначное решение по определению положения главных площадок для этого случая – отсюда, как следствие: их бесконечное множество (поворот относительно продольной оси растянутого стержня).

**Ответ:** $\sigma_1 = 3a$, $\quad l_1 = m_1 = n_1 = 1/\sqrt{3}$,
$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\quad l_2, m_2, n_2$ и $l_3, m_3, n_3$ – неопределенные.