Вариант I

Задача 1.

Вычислить $\left(\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}$.

Решение.

$$\left(\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{4}=9-\sqrt{21}$$

Ответ: $9-\sqrt{21}$.

Задача 2.

В первом круге соревнований по футболу встретились команды A, B, C и D. Если команда выигрывает, она получает 2 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Для выхода во второй круг команда должна набрать не менее 5 очков. Для команды A найти вероятность выхода во второй круг, если для неё в любой игре вероятность выигрыша равна вероятности ничьей, а вероятность проигрыша равна 0.2.

Решение.

Из формулы полной вероятности $\Rightarrow$ *вероятность выиграть* = *вероятность ничьей* = 0.4.

Для выхода во второй круг команда A должна иметь результат либо 3-и победы, либо 2-е победы и 1-а ничья. Следовательно, имеем

$$p=C_3^3\cdot 0.4^3+C_3^2\cdot 0.4^2\cdot 0.4=0.064+0.192=0.256$$

Ответ: 0.256.

Задача 3.

К Николаю пришли друзья. Лёня пришел раньше Миши, Володя – позже Толи, Миша – раньше Толи, Сергей позже Володи. В каком прорядке приходили гости?

Решение.

Лёня раньше Миши $\Rightarrow$ Л $\to$ М.

Миша раньше Толи $\Rightarrow$ Л $\to$ М $\to$ Т.

Володя позже Толи $\Rightarrow$ Л $\to$ М $\to$ Т $\to$ В.

Сергей позже Володи $\Rightarrow$ Л $\to$ М $\to$ Т $\to$ В $\to$ С.

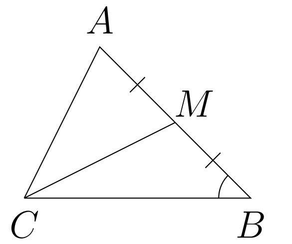
Ответ: 1-ый – Лёня, 2-ой – Миша, 3-ий – Толя, 4-ый – Володя, 5-ый – Сергей.

Задача 4.

В треугольнике ABC длины сторон равны: $AB=10$, $AC=12$, $BC=15$. Найти длину медианы проведённой к стороне AB.

Решение.

Найдём косинус $\angle ABC$ по теореме косинусов:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$$

$$\cos\angle ABC = \frac{100 + 225 - 144}{2 \cdot 10 \cdot 15} = \frac{181}{300}$$

Так как CM – медиана, то $MB = \frac{1}{2}AB = 5$. По теореме косинусов получаем

$$CM^2 = MB^2 + BC^2 - 2 \cdot MB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$$

$$CM^2 = 25 + 225 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{181}{300} = 159.5 \Rightarrow CM = \sqrt{159.5}$$

Ответ: $CM = \sqrt{159.5}$.

Задача 5.

Найти корни уравнения, принадлежащие заданному интервалу:

$$\sin 2x + \cos 3x = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение.

Способ 1.

$$\sin 2x + \cos 3x = 0 \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 0 \Rightarrow \cos x \left(2\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos x \left(4\sin^2 x - 2\sin x - 1\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ 4\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \arcsin\frac{1\pm\sqrt{5}}{4} + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin\frac{1\pm\sqrt{5}}{4} + 2\pi n \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

Из условия $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ следует, что $x = \arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Способ 2.

Пусть $x = \frac{\pi}{2} - y$, тогда

$$\sin(\pi - 2y) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3y\right) = 0 \Rightarrow \sin 2y - \sin 3y = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3y = 2y + 2\pi n \\ 3y = \pi - 2y + 2\pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2\pi n \\ y = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z}$$

Из условия $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ следует, что $x = \frac{3\pi}{10}$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{10} = \arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Задача 6.

Найти три числа арифметической возрастающей прогрессии, если известно, что их сумма равна 30 и, кроме того, если к ним прибавить соответственно 1, 2 и 9, то полученные три числа образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

Исходные члены арифметической имеют вид a, $a+d$ и $a+2d$. Тогда условия задачи принимают вид

$$\begin{cases} a+a+d+a+2d=30 \\ \frac{a+d+2}{a+1}=\frac{a+2d+9}{a+d+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+d=10 \\ a^2+d^2+4+2ad+4a+4d+4=a^2+2ad+9a+a+2d+9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=10-d \\ d^2+2d-6a-5=0 \end{cases} \Rightarrow d^2+8d-65=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=5 \\ d=-13 \end{array}\right.$$

Т.к. по условию прогрессия возрастающая, то $d=5$. Следовательно, $a=5$.

Ответ: 5, 10 и 15.

Задача 7.

Решить уравнение $\log_5^2 x+(x-7)\log_5 x+6-x=0$.

Решение.

Из теоремы Виетта имеем

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x=1 \\ \log_5 x=6-x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \log_5 x=6-x \end{array}\right.$$

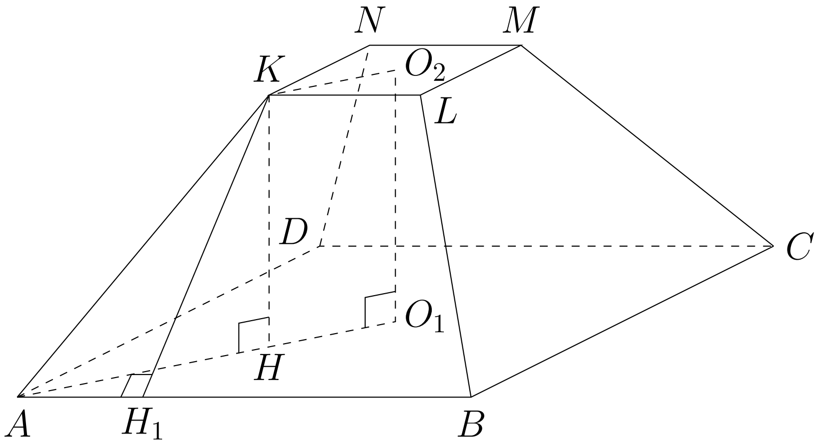
$\log_5 x$ - монотонно возрастающая функция, $6-x$ - монотонно убывающая функция $\Rightarrow$ если они пересекаются, то только в одной точке. Легко подобрать, что $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Задача 8.

В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 1 и 3, а боковая поверхность равна половине полной поверхности пирамиды. Найти объём усечённой пирамиды.

Решение.



Пусть O_1 и O_2 - центры оснований. Проведём высоту KH и отрезки AO_1 и KO_2. Т.к. усечённая пирамида правильная, то $ABCD$ и $KLMN$ - квадраты. Следовательно, $AO_1=\frac{3}{\sqrt{2}}$ и $KO_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$KO_2 = HO_1$, т.к. KO_2O_1H – прямоугольник.

Пусть $KH = x$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔAHK: $AH = AO_1 - HO_1 = AO_1 - KO_2 = \sqrt{2}$ и $AK = \sqrt{AH^2 + KH^2} = \sqrt{2 + x^2}$.

Рассмотрим равнобокую трапецию $ABLK$. Проведём высоту KH_1. Из прямоугольного треугольника ΔAKH_1 следует, что $AH_1 = \frac{AB-KL}{2} = 1$ и $KH_1 = \sqrt{AK^2 - AH_1^2} = \sqrt{1 + x^2}$. Получаем, что площадь трапеции равна $S_{ABLK} = \frac{AB+KL}{2} KH_1 = 2\sqrt{1 + x^2}$. Следовательно, площадь боковой поверхности $S_{sides} = 4S_{ABLK} = 8\sqrt{1 + x^2}$.

Площади оснований $S_{ABCD} = 9$ и $S_{KLMN} = 1$. Из условия задачи следует, что площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований, т.е. $8\sqrt{1 + x^2} = 10 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$.

Объем правильной усечённый пирамиды равен $V = \frac{KH}{3}\left(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{KLMN}} + S_{KLMN}\right) = \frac{13}{4}$.

Ответ: $\frac{13}{4}$.

Задача 9.

Решить неравенство $|1 - |x||^{\sin \pi x - 1} \leq 1$.

Решение.

Рассмотрим степень $f(x) = \sin \pi x - 1$. Видно, что $f(x) \in [-2, 0]$, т.е. степень отрицательна или равна нулю. В случаи отрицательности степени основание должно быть больше или равно 1 чтобы удовлетворять неравенству. Получаем

$$|1 - |x|| \geq 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} 1 - |x| \geq 1 \\ 1 - |x| \leq -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$$

Если $\sin \pi x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то основанием может быть любое число, т.к. $|1 - |x||^0 = 1$.

Ответ: $x \in (-\infty, -2] \cup \left\{-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \cup [2, \infty)$.

Задача 10.

Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет целочисленные решения

$$\frac{\log_2(ax^2) + 2}{\log_2 x + 2} = \frac{-\log_2 x}{\log_2 a}.$$

Решение.

Сразу видно, что $a, x > 0$, $a \neq 1$ и $x \neq \frac{1}{4}$. Преобразуем, с учётом ранее сказанного, уравнение

$$\frac{\log_2 a + 2\log_2 x + 2}{\log_2 x + 2} = -\frac{\log_2 x}{\log_2 a}$$

$$\log_2^2 a + 2\log_2 x \log_2 a + 2\log_2 a = -\log_2 x\left(\log_2 x + 2\right)$$

$$\log_2^2 x + \log_2 x\left(2\log_2 a + 2\right) + \log_2^2 a + 2\log_2 a = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} \log_2 x = -\log_2 a \\ \log_2 x = -\left(\log_2 a + 2\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a} \\ x = \frac{1}{4a} \end{array}\right.$$

Отсюда видно, что при $a = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ у уравнения хотя бы одно решение целочисленное.

Ответ: $a = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Вариант II

Задача 1.

Вычислить $\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{3+\sqrt{8}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{3+\sqrt{8}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{1} = \frac{8}{3}$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Задача 2.

В первом круге соревнований по футболу встретились команды A, B, C и D. Если команда выигрывает, она получает 2 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Для выхода во второй круг команда должна набрать не менее 5 очков. Для команды B найти вероятность выхода во второй круг, если для неё в любой игре вероятность выигрыша равна вероятности проигрыша, а вероятность ничьей равна 0.4.

Решение.

Из формулы полной вероятности $\Rightarrow$ *вероятность выиграть* = *вероятность проиграть* = 0.3.

Для выхода во второй круг команда B должна иметь результат либо 3-и победы, либо 2-е победы и 1-а ничья. Следовательно, имеем

$$p = C_3^3 \cdot 0.3^3 + C_3^2 \cdot 0.3^2 \cdot 0.4 = 0.027 + 0.108 = 0.135$$

Ответ: 0.135.

Задача 3.

На концерте стихи прочли перед танцем, фокусы показывали после частушек, танец исполняли перед песней, частушки пропели после песни. В какой последовательности проходили выступления?

Решение.

Танец исполняли перед песней $\Rightarrow$ Т $\to$ П.

Стихи прочли перед танцем $\Rightarrow$ С $\to$ Т $\to$ П.

Частушки пропели после песни $\Rightarrow$ С $\to$ Т $\to$ П $\to$ Ч.

Фокусы показывали после частушек $\Rightarrow$ С $\to$ Т $\to$ П $\to$ Ч $\to$ Ф.

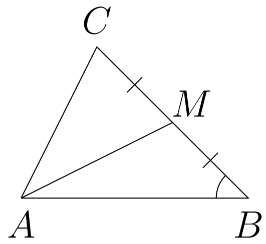
Ответ: 1-ое – стихи, 2-ое – танец, 3-ье – песня, 4-ое – частушки, 5-ое – фокучы.

Задача 4.

В треугольнике ABC длина стороны AB равна 12, а длина стороны AC равна 10, длина медианы AM равна $\frac{\sqrt{263}}{2}$. Найти длину стороны BC.

Решение.

Применим теорему косинусов к треугольникам ΔAMC и ΔAMB с учётом, что $\cos\angle AMC = -\cos\angle AMB$:



$$AC^2 = CM^2 + AM^2 + 2\cdot CM\cdot AM\cdot\cos\angle AMB$$
$$AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2\cdot BM\cdot AM\cdot\cos\angle AMB$$

Так как AM – медиана, то $MB = CM$. С учётом этого, сложим два равенства выше

$$AC^2 + AB^2 = 2CM^2 + 2AM^2 \Rightarrow CM^2 = \frac{100+144}{2} - \frac{263}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow CM = \frac{15}{2} \Rightarrow BC = 15$$

Ответ: $BC = 15$.

Задача 5.

Найти корни уравнения, принадлежащие заданному интервалу:

$$\cos 3x = \sin 2x, \quad x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

Решение.

Пусть $x = \frac{\pi}{2} - y$, тогда

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3y\right) = \sin(\pi - 2y) \Rightarrow -\sin 3y = \sin 2y \Rightarrow \left[\begin{array}{c} -3y = 2y + 2\pi n \\ -3y = \pi - 2y + 2\pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} y = \frac{2\pi}{5}n \\ y = \pi + 2\pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}n \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z}$$

Из условия $x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right)$ следует, что $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}$.

Задача 6.

Если к четырём числам, составляющих геометрическую прогрессию прибавить соответственно 4, 21, 29 и 1, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти исходные числа.

Решение.

Исходные члены геометрической прогрессии имеют вид b, bq, bq^2 и bq^3. Тогда условия задачи принимают вид

$$(bq + 21) - (b + 4) = (bq^2 + 29) - (bq + 21) = (bq^3 + 1) - (bq^2 + 29)$$

Из первого равенства: $bq^2 - 2bq + bq - 9 = 0 \Rightarrow b = \frac{9}{(q-1)^2}$.

Из второго равенства: $bq^3 - 2bq^2 + bq - 36 = 0 \Rightarrow bq(q-1)^2 = 36 \Rightarrow q = 4 \Rightarrow b = 1$.

Ответ: 1, 4, 16 и 64.

Задача 7.

Решить уравнение $9^x + (x-5)3^x = x - 4$.

Решение.

Перепишем уравнение: $(3^x)^2 + (x-5)3^x + 4 - x = 0$.

Из теоремы Виетта имеем

$$\left[\begin{aligned} 3^x &= 1 \\ 3^x &= 4-x \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} x &= 0 \\ 3^x &= 4-x \end{aligned}\right.$$

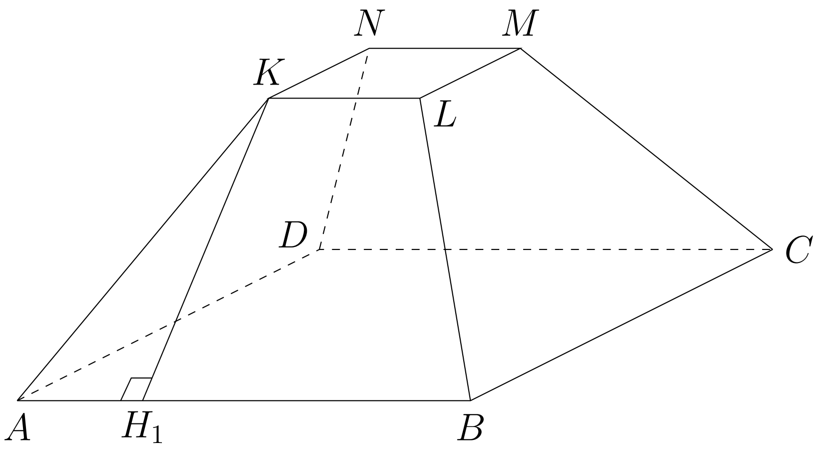
3^x - монотонно возрастающая функция, $4-x$ - монотонно убывающая функция $\Rightarrow$ если они пересекаются, то только в одной точке. Легко подобрать, что $x=1$.

Ответ: $x=0$ и $x=1$.

Задача 8.

Боковое ребро правильной усечённой четырёхугольной пирамиды и сторона меньшего основания равны $\sqrt{3\sqrt{3}-5}$. Угол между боковым ребром и стороной большего основания равен $60°$. Найти площадь полной поверхности усечённой пирамиды.

Решение.



Рассмотрим равнобокую трапецию $ABLK$. Проведём высоту KH_1. Из прямоугольного треугольника ΔAKH_1 и $\angle KAH_1 = 60°$ следует, что $AH_1 = \frac{AK}{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2}$ и $KH_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AK = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3\sqrt{3}-5}$. Значит, $AB = KL + 2AH_1 = 2\sqrt{3\sqrt{3}-5}$. Получаем, что площадь трапеции равна $S_{ABLK} = \frac{AB+KL}{2}KH_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{3}-5)$. Следовательно, площадь боковой поверхности $S_{sides} = 4S_{ABLK} = 27 - 15\sqrt{3}$.

Площади оснований $S_{ABCD} = 12\sqrt{3} - 20$ и $S_{KLMN} = 3\sqrt{3} - 5$. Площадь полной поверхности равна $27 - 15\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 20 + 3\sqrt{3} - 5 = 2$.

Ответ: 2.

Задача 9.

Решить неравенство $|1 - |2x||^{\cos 2\pi x - 1} > 1$.

Решение.

Рассмотрим степень $f(x) = \cos 2\pi x - 1$. Видно, что $f(x) \in [-2, 0]$, т.е. степень отрицательна или равна нулю. В случаи отрицательности степени основание должно быть меньше 1 и больше 0, чтобы удовлетворять неравенству. Получаем

$$0 < |1 - |2x|| < 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 1 - |2x| < 1 \\ x \neq \pm\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < |2x| < 2 \\ x \neq \pm\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < x < 1 \\ x \neq \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Если $\cos 2\pi x - 1 = 0 \Rightarrow x = n,\ n \in \mathbb{Z}$, то решений у неравенства нет, т.к. $|1 - |2x||^0 = 1$.

Ответ: $x \in (-1, 1) / \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

Задача 10.

Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет целочисленные решения

$$\frac{18\log_4 a - 12\log_4 x - 9}{2\log_4 x + 3} = \frac{-\log_4 x}{\log_4 a}.$$

Решение.

Сразу видно, что $a, x > 0$, $a \neq 1$ и $x \neq \frac{1}{8}$. Преобразуем, с учётом ранее сказанного, уравнение

$$18\log_4^2 a - 12\log_4 x \log_4 a - 9\log_4 a = -2\log_4^2 x - 3\log_4 x$$

$$2\log_4^2 x + \log_4 x\left(-12\log_4 a + 3\right) + 18\log_4^2 a - 9\log_4 a = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x = 3\log_4 a \\ \log_4 x = 3\log_4 a - \frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^3 \\ x = \frac{a^3}{8} \end{array}\right.$$

Отсюда видно, что при $a = \sqrt[3]{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ у уравнения хотя бы одно решение целочисленное.

Ответ: $a = \sqrt[3]{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Вариант III

Задача 1.

Вычислить $\left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}$.

Решение.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}=9-\sqrt{15}$$

Ответ: $9-\sqrt{15}$.

Задача 2.

В первом круге соревнований по футболу встретились команды A, B, C и D. Если команда выигрывает, она получает 2 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Для выхода во второй круг команда должна набрать не менее 5 очков. Для команды C найти вероятность выхода во второй круг, если для неё в любой игре вероятность проигрыша равна 0.1, а вероятность выигрыша в два раза больше вероятности ничьей.

Решение.

Из формулы полной вероятности $\Rightarrow$ *вероятность выиграть* $= 0.6$ и *вероятность ничьей* $= 0.3$.

Для выхода во второй круг команда C должна иметь результат либо 3-и победы, либо 2-е победы и 1-а ничья. Следовательно, имеем

$$p=C_3^3\cdot 0.6^3+C_3^2\cdot 0.6^2\cdot 0.3=0.216+0.324=0.54$$

Ответ: 0.54.

Задача 3.

Друзья сдавали экзамен по математике. Митя сдал экзамен позже Сергея, Толя – раньше Кости, Митя – раньше Толи, Юра – позже Кости. В каком порядке друзья сдавали экзамен?

Решение.

Митя – раньше Толи $\Rightarrow$ М $\to$ Т.

Толя – раньше Кости $\Rightarrow$ М $\to$ Т $\to$ К.

Юра – позже Кости$\Rightarrow$ М $\to$ Т $\to$ К $\to$ Ю.

Митя сдал экзамен позже Сергея $\Rightarrow$ С $\to$ М $\to$ Т $\to$ К $\to$ Ю.

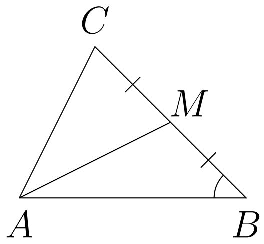
Ответ: 1-ый – Сергей, 2-ой – Митя, 3-ий – Толя, 4-ый – Костя, 5-ый – Юра.

Задача 4.

В треугольнике ABC длины сторон равны: $AB=10$, $AC=12$, $BC=15$. Найти длину медианы проведённой к стороне BC.

Решение.

Найдём косинус $\angle ABC$ по теореме косинусов:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$$

$$\cos\angle ABC = \frac{100+225-144}{2 \cdot 10 \cdot 15} = \frac{181}{300}$$

Так как AM – медиана, то $MB = \frac{1}{2}BC = 7.5$. По теореме косинусов получаем

$$AM^2 = MB^2 + AB^2 - 2 \cdot MB \cdot AB \cdot \cos\angle ABC$$

$$AM^2 = 56.25 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 7.5 \cdot \frac{181}{300} = 65.75 \Rightarrow AM = \sqrt{65.75}$$

Ответ: $AM = \sqrt{65.75}$.

Задача 5.

Найти корни уравнения, принадлежащие заданному интервалу:

$$\cos 4x = \sin 2x, \quad x \in (0, 60^\circ).$$

Решение.

Пусть $x = \frac{\pi}{4} - y$, тогда

$$\cos(\pi - 4y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) \Rightarrow \cos(\pi - 4y) = \cos 2y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \pi - 4y = 2y + 2\pi n \\ \pi - 4y = -2y + 2\pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z}$$

Из условия $x \in (0, 60^\circ)$ следует, что $x = \frac{\pi}{12}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{12}$.

Задача 6.

Найти три числа арифметической убывающей прогрессии, если известно, что их сумма равна 60 и, кроме того, если первое число оставить без изменения, второе уменьшить на 10, а третье уменьшить на 11, то новые числа образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

Исходные члены арифметической прогрессии имеют вид a, $a-d$, и $a-2d$. Тогда условия задачи принимают вид

$$\left[\begin{array}{l} a + a - d + a - 2d = 60 \\ \frac{a-d-10}{a} = \frac{a-2d-11}{a-d-10} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} a - d = 20 \\ a^2 + d^2 + 100 - 2ad + 20d - 20a = a^2 - 2ad - 11a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} a = 20 + d \\ d^2 + 20d - 9a + 100 = 0 \end{array}\right.$$

Получим, $d^2 + 11d - 80 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} d = 5 \\ d = -16 \end{array}\right.$. Т.к. прогрессия убывающая, то $d = 5 \Rightarrow a = 25$.

Ответ: 25, 20 и 15.

Задача 7.

Решить уравнение $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

Решение.

Перепишим уравнение: $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$.

Из теоремы Виетта имеем

$$\left[\begin{array}{c}\log_2 x = 3 - x \\ \log_2 x = -2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\log_2 x = 3 - x \\ x = \frac{1}{4}\end{array}\right.$$

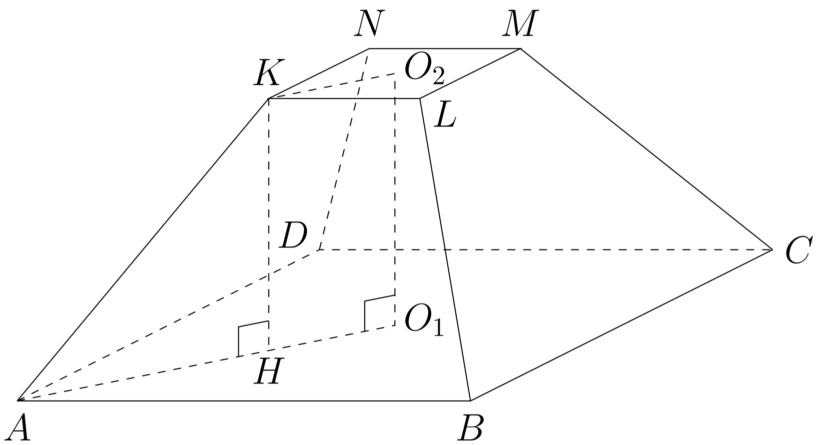
$\log_2 x$ - монотонно возрастающая функция, $3 - x$ - монотонно убывающая функция $\Rightarrow$ если они пересекаются, то только в одной точке. Легко подобрать, что $x = 2$.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$ и $x = 2$.

Задача 8.

Высота правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равна 3, а сторона большего основания равна $9\sqrt{2}$. Боковое ребро составляет с основанием угол $45°$. Найти объём усечённой пирамиды.

Решение.



Пусть O_1 и O_2 - центры оснований. Проведём высоту KH и отрезки AO_1 и KO_2. Т.к. усечённая пирамида правильная, то $ABCD$ и $KLMN$ - квадраты. Следовательно, $AO_1 = 9$.

В прямоугольном треугольнике ΔAKH, $\angle KAH = \angle AKH = 45°$. Следовательно, $AH = KH = 3$.

Т.к. KO_2O_1H – прямоугольник, то $KO_2 = HO_1 = AO_1 - AH = 6$. Получаем из квадрата $KLMN$ $KL = \sqrt{2} \cdot KO_2 = 6\sqrt{2}$.

Площади оснований $S_{ABCD} = 162$ и $S_{KLMN} = 72$. Объём правильной усечённый пирамиды равен $V = \frac{KH}{3}\left(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{KLMN}} + S_{KLMN}\right) = 162 + 108 + 72 = 342$.

Ответ: 342.

Задача 9.

Решить неравенство $|1-|x||^{\sin \pi x - 1} > 1$.

Решение.

Рассмотрим степень $f(x) = \sin \pi x - 1$. Видно, что $f(x) \in [-2, 0]$, т.е. степень отрицательна или равна нулю. В случаи отрицательности степени основание должно быть меньше 1 и больше 0, чтобы удовлетворять неравенству. Получаем

$$0 < |1-|x|| < 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 1-|x| < 1 \\ 1-|x| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x| < 2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ 0 < x < 2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

Если $\sin \pi x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2n,\ n \in \mathbb{Z}$, то решений у неравенства нет, т.к. $|1-|x||^0 = 1$.

Ответ: $x \in (-2, 2) / \left\{-\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Задача 10.

Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет целочисленные решения

$$\frac{\log_5 a - \log_5 x - 1}{\log_5 x + 2} = -\frac{\log_5 x}{4 \log_5 a}.$$

Решение.

Сразу видно, что $a, x > 0$, $a \neq 1$ и $x \neq \frac{1}{25}$. Преобразуем, с учётом ранее сказанного, уравнение

$$4 \log_5^2 a - 4 \log_5 x \log_5 a - 4 \log_5 a = -\log_5^2 x - 2 \log_5 x$$

$$\log_5^2 x + \log_5 x \left(-4 \log_5 a + 2\right) + 4 \log_5^2 a - 4 \log_5 a = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2 \log_5 a \\ \log_5 x = 2 \log_5 a - 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^2 \\ x = \frac{a^2}{25} \end{array}\right.$$

Отсюда видно, что при $a = \sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ у уравнения хотя бы одно решение целочисленное.

Ответ: $a = \sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Вариант IV

Задача 1.

Вычислить $\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{10}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Задача 2.

В первом круге соревнований по футболу встретились команды A, B, C и D. Если команда выигрывает, она получает 2 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Для выхода во второй круг команда должна набрать не менее 5 очков. Для команды D найти вероятность выхода во второй круг, если для неё в любой игре вероятность выигрыша равна 0.6, а вероятность проигрыша равна вероятности ничьей.

Решение.

Из формулы полной вероятности $\Rightarrow$ *вероятность проигрыша* = *вероятность ничьей* = 0.2.

Для выхода во второй круг команда D должна иметь результат либо 3-и победы, либо 2-е победы и 1-а ничья. Следовательно, имеем

$$p = C_3^3 \cdot 0.6^3 + C_3^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.2 = 0.216 + 0.216 = 0.432$$

Ответ: 0.432.

Задача 3.

На олимпиаде по математике участвовали друзья и набрали разное количество баллов. Сергей больше Виктора, Анатолий меньше Тимофея, Виктор больше Михаила, Михаил больше Тимофея. Укажите в ответе порядок друзей в зависимости от набранных баллов (от большего числа баллов к меньшему).

Решение.

Анатолий меньше Тимофея $\Rightarrow$ А $\to$ Т.

Михаил больше Тимофея $\Rightarrow$ А $\to$ Т $\to$ М.

Виктор больше Михаила $\Rightarrow$ А $\to$ Т $\to$ М $\to$ В.

Сергей больше Виктора $\Rightarrow$ А $\to$ Т $\to$ М $\to$ В $\to$ С.

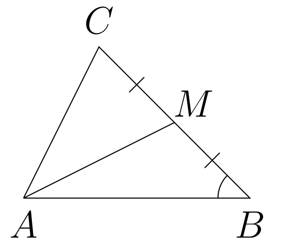
Ответ: 1-ый – Сергей, 2-ой – Виктор, 3-ий – Михаил, 4-ый – Тимофей, 5-ый – Анатолий.

Задача 4.

В треугольнике ABC длина стороны AB равна 15, а длина стороны AC равна 10, длина медианы AM равна $\frac{\sqrt{506}}{2}$. Найти длину стороны BC.

Решение.

Применим теорему косинусов к треугольникам ΔAMC и ΔAMB с учётом, что $\cos\angle AMC = -\cos\angle AMB$:



$$AC^2 = CM^2 + AM^2 + 2\cdot CM\cdot AM\cdot\cos\angle AMB$$
$$AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2\cdot BM\cdot AM\cdot\cos\angle AMB$$

Так как AM – медиана, то $MB = CM$. С учётом этого, сложим два равенства выше

$$AC^2 + AB^2 = 2CM^2 + 2AM^2 \Rightarrow CM^2 = \frac{100+225}{2} - \frac{506}{4} = 36 \Rightarrow CM = 6 \Rightarrow BC = 12$$

Ответ: $BC = 12$.

Задача 5.

Найти корни уравнения, принадлежащие заданному интервалу:

$$\sin 6x = \cos 4x, \quad x \in (40^\circ, 90^\circ)\,.$$

Решение.

Пусть $x = \frac{\pi}{4} - y$, тогда

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6y\right) = \cos(\pi - 4y) \Rightarrow \cos 6y = \cos 4y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6y = 4y + 2\pi n \\ 6y = -4y + 2\pi n \end{array}\right. n\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pi n \\ y = \frac{\pi}{5}n \end{array}\right. n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}n \end{array}\right. n\in\mathbb{Z}$$

Из условия $x \in (40^\circ, 90^\circ)$ следует, что $x = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}$.

Задача 6.

Найти четыре положительных числа, из которых первые три составляют возрастающую арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую прогрессию, если сумма первых трёх чисел равна 12, а сумма последних трёх равна 19.

Решение.

Первые три имеют вид a, $a+d$, и $a+2d$. Тогда из условия задачи $a+a+d+a+2d = 12 \Rightarrow a+d = 4$. Т.е. второе число равно 4.

Последние три числа имеют вид 4, $4q$ и $4q^2$. Тогда из условия задачи $4+4q+4q^2 = 19 \Rightarrow 4q^2+4q-15 = 0$. Получаем, что $q = -2.5$ или $q = 1.5$. Т.к. прогрессия возрастает, то $q = 1.5$.

В итоге имеем, последие три числа 4, 6 и 9. Следовательно, первое число 2.

Ответ: 2, 4, 6 и 9.

Задача 7.

Решить уравнение $4^x + (x-4)2^x = x - 3$.

Решение.

Перепишем уравнение: $(2^x)^2 + (x-4)2^x - x + 3 = 0$.

Из теоремы Виетта имеем

$$\left[\begin{array}{c} 2^x = 3 - x \\ 2^x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} 2^x = 3 - x \\ x = 0 \end{array}\right.$$

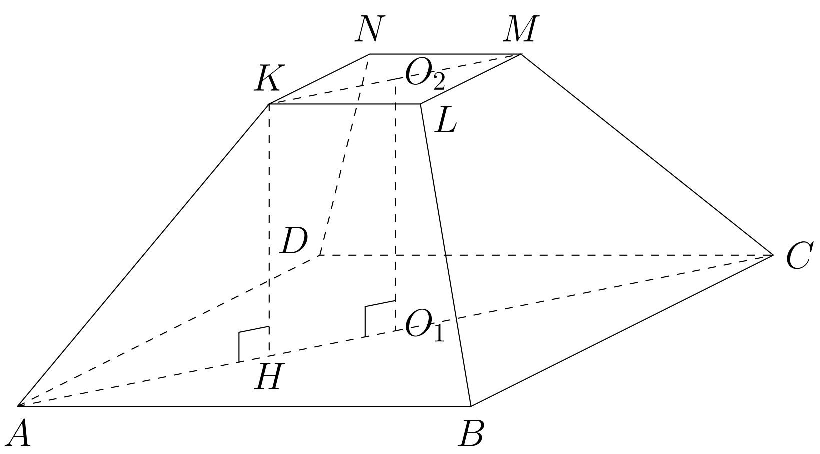
2^x - монотонно возрастающая функция, $3 - x$ - монотонно убывающая функция $\Rightarrow$ если они пересекаются, то только в одной точке. Легко подобрать, что $x = 1$.

Ответ: $x = 0$ и $x = 1$.

Задача 8.

В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 2, сторона большего основания равна 3, а высота пирамиды равна $\sqrt{2}$. Найти площадь диагонального сечения усечённой пирамиды.

Решение.



Пусть O_1 и O_2 - центры оснований. Проведём высоту KH и отрезки AO_1 и KO_2. Т.к. усечённая пирамида правильная, то $ABCD$ и $KLMN$ - квадраты. Следовательно, $AO_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}$.

В прямоугольном треугольнике ΔAKH, $AH = \sqrt{AK^2 - KH^2} = \sqrt{2}$.

Т.к. KO_2O_1H – прямоугольник, то $KO_2 = HO_1 = AO_1 - AH = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow KM = \sqrt{2}$.

Интересующее нас сечение - это равнобокая трапеция $ACMK$. Её площадь равна $\frac{KM+AC}{2} \cdot KH = 4$.

Ответ: 4.

Задача 9.

Решить неравенство $|1 - |2x||^{\cos 2\pi x - 1} \leq 1$.

Решение.

Рассмотрим степень $f(x) = \cos 2\pi x - 1$. Видно, что $f(x) \in [-2, 0]$, т.е. степень отрицательна или равна нулю. В случаи отрицательности степени основание должно быть больше или равно 1, чтобы удовлетворять неравенству. Получаем

$$|1 - |2x|| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - |2x| \geq 1 \\ 1 - |2x| \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Если $\cos 2\pi x - 1 = 0 \Rightarrow x = n,\ n \in \mathbb{Z}$, то неравенство удовлетворено, т.к. $|1 - |2x||^0 = 1$.

Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$.

Задача 10.

Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет целочисленные решения

$$4 \log_3 a - 2 \log_3 x + 3 = \frac{3 \log_3 x - \log_3^2 x}{4 \log_3 a}.$$

Решение.

Сразу видно, что $a, x > 0$, $a \neq 1$. Преобразуем, с учётом ранее сказанного, уравнение

$$16 \log_3^2 a - 8 \log_3 x \log_3 a + 12 \log_3 a = 3 \log_3 x - \log_3^2 x.$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x(-8 \log_3 a - 3) + 16 \log_3^2 a + 12 \log_3 a = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 4 \log_3 a \\ \log_3 x = 4 \log_3 a + 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^4 \\ x = 27a^4 \end{array}\right.$$

Отсюда видно, что при $a = \sqrt[4]{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \left\{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right\}$ у уравнения хотя бы одно решение целочисленное.

Ответ: $a = \sqrt[4]{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \left\{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right\}$.