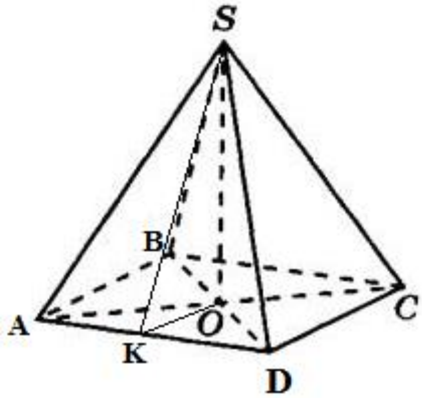
Вариант №1

1. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель выиграл у всех и набрал очков в 5 раз меньше, чем все остальные. Сколько всего было участников?

n – количество участников ⇒ Победитель набрал (n-1) очков. Всего разыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ очков $\Rightarrow 5(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) \Rightarrow n = 12$

**Ответ: 12**

2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.




*AB*=*AD*=*BC*=*DC*=10

$$\angle SAO = \alpha \quad AO = \frac{AC}{2} = \frac{AD\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{AO}{SA} = cos\alpha \Rightarrow SA = \frac{5\sqrt{2}}{cos\alpha}$$

$$SK^2 + AK^2 = SA^2$$

$$SK = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{cos\alpha}\right)^2 - 5^2} = \frac{5\sqrt{2 - cos^2\alpha}}{cos\alpha}$$

$$= \frac{5\sqrt{1 + sin^2\alpha}}{cos\alpha}$$

$$S_{\text{пол.пов.}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 10^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{1 + sin^2\alpha}}{cos\alpha} = 100 + \frac{100\sqrt{1 + sin^2\alpha}}{cos\alpha} =$$

$$= \frac{100}{cos\alpha} \cdot \left(cos\alpha + \sqrt{1 + sin^2\alpha}\right)$$

**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{100}{cos\alpha} \cdot (cos\alpha + \sqrt{1 + sin^2\alpha})}$

3. Решить уравнение:

$$\frac{2}{\pi} arcsin \frac{1}{x-2} - \sqrt{4x - 3 - x^2} - log_7(3x - 2) = 0$$

ОДЗ: $$\begin{cases} 4x - 3 - x^2 \geq 0 \\ 3x - 2 > 0 \\ -1 \leq \frac{1}{x-2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1; 3] \\ x > \frac{2}{3} \\ \begin{cases} \frac{1}{x-2} \leq 1 \\ \frac{1}{x-2} \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1;\ x_2 = 3$$

$x_1 = 1 \qquad \frac{2}{\pi} arcsin \frac{1}{1-2} - 0 - log_7 1 \neq 0$

$x_2 = 3 \qquad \frac{2}{\pi} arcsin \frac{1}{3-2} - 0 - log_7 7 = 0$

**Ответ: x=3**

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} lg(y+x) - lg5 + lg6 = lgx + lgy \\ lgx + \lg(y+6) - lgy - lg6 = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x>0$, $y>0$

$$\begin{cases} \dfrac{6(y+x)}{5} = xy \\ \dfrac{x(y+6)}{6y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(y+x) = 5xy \\ xy + 6x = 6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(y+x) = 5xy \\ 6(y-x) = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y+x}{y-x} = 5 \\ 6(y-x) = xy \end{cases}$$

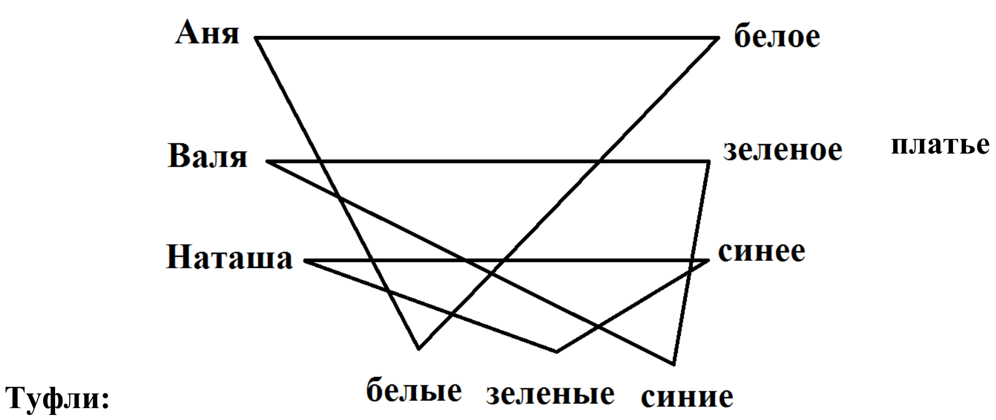
$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x \\ 6\left(\dfrac{3}{2}x - x\right) = \dfrac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 3$$

**Ответ: (2;3)**

5. Три подруги вышли на прогулку в туфлях и платьях белого, зеленого и синего цвета. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадают. Ни туфли, ни платье Вали не белые, Наташа в зеленых туфлях. Определить цветплатья и туфель каждой их подруг.

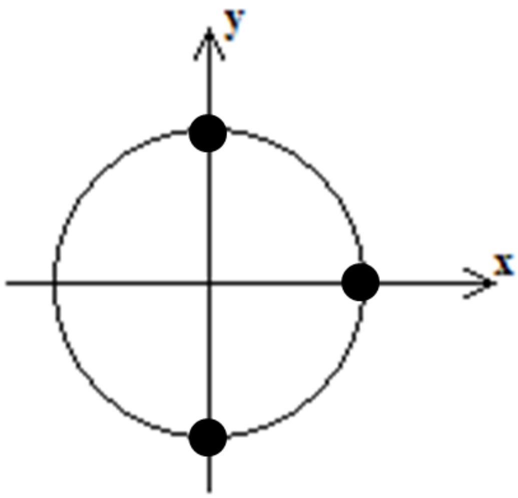



**Ответ: Аня – белое платье, белые туфли; Валя – зеленое платье, синие туфли; Наташа – синее платье, зеленые туфли.**

6. Решить уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}cosx\right) = \cos(\frac{\pi}{2}sinx)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}cosx\right) - \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}sinx) = 0$$




$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}cosx - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}sinx}{2} cos\frac{\frac{\pi}{2}cosx + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}sinx}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} sin\frac{\frac{\pi}{2}(cosx + sinx - 1)}{2} = 0 \\ cos\frac{\frac{\pi}{2}(cosx - sinx + 1)}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}(cosx + sinx - 1) = \pi n \\ \frac{\pi}{4}(cosx - sinx + 1) = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} cosx + sinx - 1 = 4n \\ cosx - sinx + 1 = 2 + 4n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} cosx + sinx = 1 + 4n \\ cosx - sinx = 1 + 4n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} cosx + sinx = 1 \\ cosx - sinx = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{n} + \pi n \\ x - \frac{\pi}{4} = -(-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} - (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right.$$

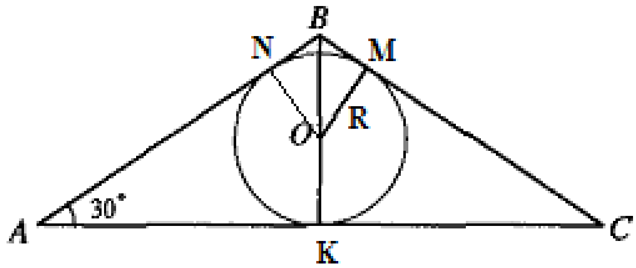
**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = 2\pi n;\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n}$

7. Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника.

R=3

AB=BC

$$\angle BAC = 30°$$




Найти AB, AC

$$\angle ABK = 60° \Rightarrow \triangle\, BON: BO\frac{ON}{sin60°} = \frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow BK = 2\sqrt{3} + 3 \Rightarrow$$

$$AB{=}2BK{=}4\sqrt{3} + 6 \Rightarrow \triangle\, ABK: AK = ABcos30° = \left(4\sqrt{3} + 6\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 + 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$AC = 12 + 6\sqrt{3}$$

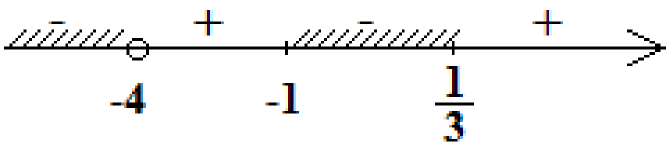
**Ответ: $AB$=$BC$=$4\sqrt{3}+6$; $AC$=$6\sqrt{3}+12$**

8. Решить неравенство:

$$log_{5+x}(3x^2) \le log_{5+x}(1-2x)$$
$$(5+x-1)(3x^2-1) \le (5+x-1)(1-2x-1)$$
$$(x+4)(3x^2-1+2x) \le 0$$
$$(x+4)\cdot 3\cdot(x+1)(x-\frac{1}{3}) \le 0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \ne 0 \\ 1-2x > 0 \\ 5+x > 0 \\ 5+x \ne 1 \end{cases}$$




$$\begin{cases} x \ne 0 \\ x < \frac{1}{2} \\ x > -5 \\ x \ne -4 \end{cases}$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x \in (-5;-4) \cup \left[-1;0\right) \cup \left(0;\frac{1}{3}\right]}$

9. При каких значениях параметра α уравнение имеет два корня? Найти корни.

$$|x-\alpha+1|+|2\alpha-x| = x$$

I. $x-\alpha+1-2\alpha+x = x$ |сокращаем на $x$

$3\alpha = x+1$

$\alpha = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$x_1 = 3\alpha - 1$

$A$:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x}{2} \\ 3\alpha = x+1 \end{cases}$$

$\frac{3x}{2} = x+1$

$x = 2$

$\alpha = 1$ $A(2;1)$

II. $x-\alpha+1+2\alpha-x = x$ |сокращаем на $x$

$\alpha = x-1$

$x_2 = \alpha+1$

III. $-x+\alpha-1+2\alpha-x = x$

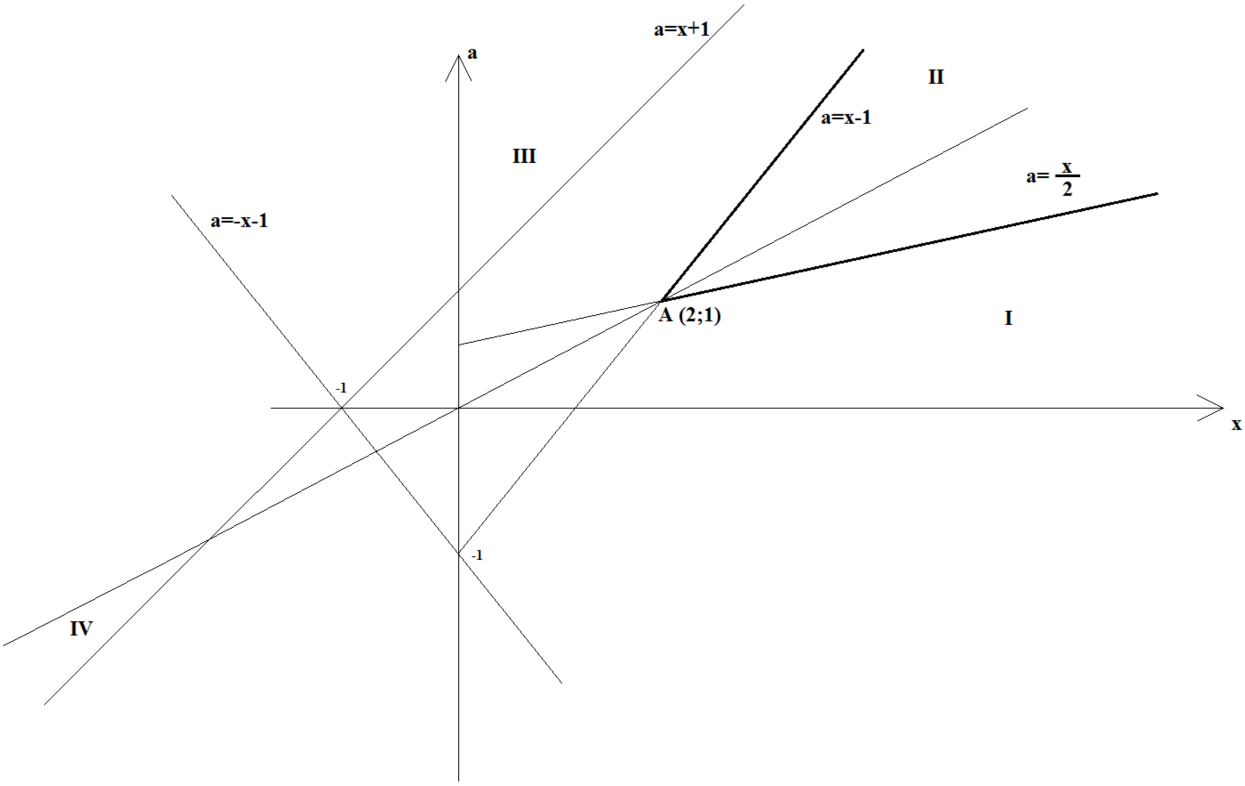
$3\alpha = 3x+1$

$\alpha = x+\frac{1}{3} \Rightarrow$ $\emptyset$

IV. $-x+\alpha-1-2\alpha+x = x$|сокращаем на $x$

$-x = \alpha+1 \Rightarrow$ $\emptyset$

**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = 3\alpha-1;\ x_2 = \alpha+1}$ **при** $\boldsymbol{\alpha \in (1;+\infty)}$




10.Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = (\frac{x_3}{2})^2 \\ x_2 + x_3 = (\frac{x_4}{2})^2 \\ x_3 + x_4 = (\frac{x_5}{2})^2 \\ x_4 + x_5 = (\frac{x_1}{2})^2 \\ x_5 + x_1 = (\frac{x_2}{2})^2 \\ x_i > 0 \end{cases}$$

Пусть $x_e$- наименьшее; $x_m$ – наибольшее из чисел $x_1, x_2 \dots x_5$

Из уравнений системы следует:

$$2x_e \le \left(\frac{x_e}{2}\right)^2 \Rightarrow x_e \ge 8$$

$$2x_m \ge \left(\frac{x_m}{2}\right)^2 \Rightarrow x_m \le 8$$

$$8 \le x_e \le x_m \le 8 \Rightarrow x_e = x_m = 8$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 8}$

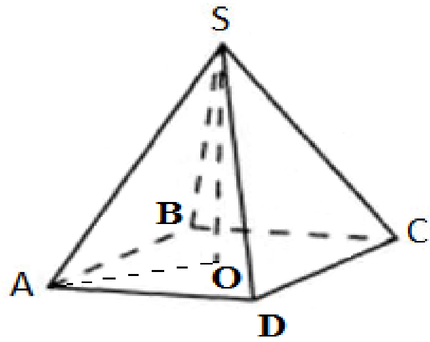
Вариант №2

1. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель все игры провел вничьюи набрал очков в 12 раз меньше, чем всеостальные. Сколько всего было участников?

n– количество участников $\Rightarrow$ Победитель набрал $\frac{(n-1)}{2}$ очков. Всего разыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ очков $\Rightarrow 12\cdot\frac{(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)}{2}\Rightarrow n=13$

**Ответ: 13**

2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 10 иобразует угол с высотой пирамиды α. Найти объём пирамиды.




$\angle ASO=\alpha$

$AS=10$ Пусть $AB$=$a$

$\Delta ASO$: $SO=H=10cos\alpha$

$AO=10sin\alpha$

$$\frac{a\sqrt{2}}{2}=AO=10sin\alpha\Rightarrow a=\frac{20sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{осн.}}=\alpha^2=\frac{400sin^2\alpha}{2}=200sin^2\alpha$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}H=\frac{1}{3}\cdot 200sin^2\alpha\cdot 10cos\alpha=\frac{2000}{3}sin^2\alpha\cdot cos\alpha$$

**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{2000}{3}sin^2\alpha\cdot cos\alpha}$

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{log_{\frac{1}{3}}|x+2|}+\sqrt{x^2+4x+3}+\lg(x+13)=0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x\neq -2\\ log_{1/3}|x+2|\geq 0\\ x^2+4x+3\geq 0\\ x>-13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq -2\\ |x+2|\leq 1\\ x\in(-\infty;-3]\cup[-1;+\infty)\\ x>-13\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\neq -2\\ -1\leq x+2\leq 1\\ x\in(-\infty;-3]\cup[-1;+\infty)\\ x>-13\end{cases}$$

ОДЗ: $x_1=-3;\ x_2=-1$

$$x_1=-3$$

$$\sqrt{log_{1/3}1}+\sqrt{(-3)^2-12+3}+\lg(-3+13)\neq 0$$

$$x_2=-1$$

$$\sqrt{log_{1/3}1}+\sqrt{(-1)^2-4+3}+\lg(-3+13)\neq 0$$

**Ответ:** ∅

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}2log_5x=1-y\\ x^y=0{,}2\end{cases}$$

ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1$

$$\begin{cases}log_5x=\dfrac{1-y}{2}\\ ylog_5x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}log_5x=-\dfrac{1}{y}\\ -\dfrac{1}{y}=\dfrac{1-y}{2}\end{cases}$$

$$y^2-y-2=0\Rightarrow y_1=-1;\ y_2=2\Rightarrow$$

$$x_1=5;\ x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

**Ответ: (5;-1)** $(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}};2})$

5. Три сестры- Лиза, Катя и Наташа- живут в городах Москва, Владивосток и Сочи. Они приобрели известность в разных видах искусств – пении, балете и кино. Лиза живет не в Москве, а Наташа – не во Владивостоке; москвичка не снимается в кино; та, кто живет во Владивостоке, - не певица; Наташа равнодушна к балету.Где живет Катя и какова ее профессия?

А) Лиза: кино Владивосток

Катя: балет Сочи

Наташа: пение Москва

Б) Лиза: балет Владивосток

Катя: кино Сочи

Наташа: пение Москва

**Ответ: Катя живет в Сочи, балет или кино.**

6. Решить уравнение:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}cosx\right)=ctg(-\frac{\pi}{2}sinx)$$

ОДЗ: $\substack{cosx\neq\pm1\\ sinx\neq0}\ \Rightarrow x\neq\pi n$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}cosx\right)-tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}sinx\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}cosx-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}sinx\right)=0$$

$$\frac{\pi}{2}(cosx-sinx-1)=\pi n$$

$$cosx - sinx = 1 + 2n$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx - sinx = 1 \\ cosx - sinx = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$n \in \mathrm{Z}$$

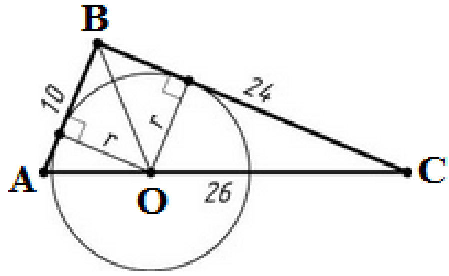
**Ответ:** $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathrm{Z}}$

7. Дан треугольник со сторонами AB = 10, BC = 24, AC = 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит набольшей стороне. Найти радиус окружности.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{30 \cdot (30 - 10)(30 - 24)(30 - 26)} = 120$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} AB \cdot R + \frac{1}{2} BC \cdot R$$

$$120 = \frac{1}{2} R \cdot (AB + BC) = \frac{1}{2} R \cdot 34 \Rightarrow R = \frac{120}{17}$$




**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{120}{17}}$

8. Решить неравенство:

$$log_{x-2}(2x^2) \leq log_{x-2}(13x - 20)\text{ОДЗ:} \begin{cases} x \neq 0, \quad x \neq 3 \\ x > 2 \\ x > \frac{20}{13} \end{cases}$$

$$(x - 2 - 1)(2x^2 - 1) \leq (x - 2 - 1)(13x - 20 - 1)$$

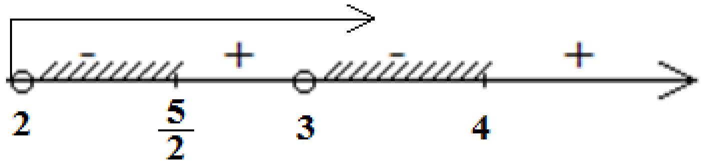
$$(x - 3)(\, 2x^2 - 1 - 13x + 21) \leq 0$$

$$(x - 3)(\, 2x^2 - 13x + 20) \leq 0$$

$$2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4}$$

$$x_1 = 4; \; x_2 = \frac{5}{2}$$




$$(x - 3) \cdot 2(x - \frac{5}{2})(x - 4) \leq 0$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x \in \left(2; \frac{5}{2}\right] \cup (3; 4]}$

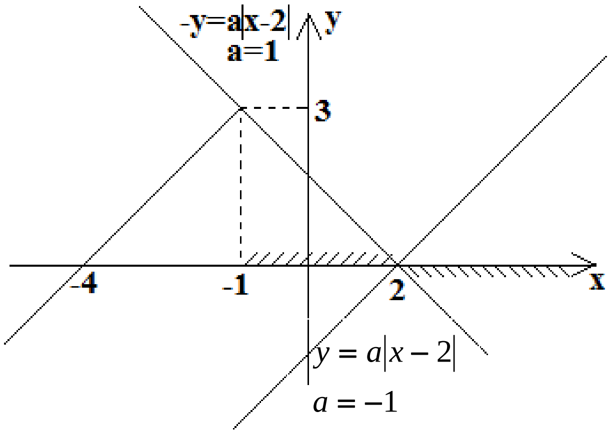
9. При каких значениях параметра а уравнение имеет больше 3-х корней?Найти корни

$$|x+1| + a|x-2| = 3$$

$$a|x-2| = 3 - |x+1|$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x \in [-1; 2]}$ при $\boldsymbol{a = 1}$

$\boldsymbol{x \in [2; +\infty)}$ при $\boldsymbol{a = -1}$




10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = (x_3)^2 \\ x_2 + x_3 = (x_4)^2 \\ x_3 + x_4 = (x_5)^2 \\ x_4 + x_5 = (x_1)^2 \\ x_5 + x_1 = (x_2)^2 \end{cases}$$

$$x_i > 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Пусть $x_e$ - наименьшее, а $x_m$ - наибольшее из чисел $x_1, x_2, x_3 \ \dots x_5$

Из уравнений системы следует

$$2x_e \le (x_e)^2 \Rightarrow x_e \ge 2$$

$$2x_m \ge (x_m)^2 \Rightarrow x_m \le 2$$

$$2 \le x_e \le x_m \le 2 \Rightarrow x_e = x_m = 2$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2}$

Вариант №3

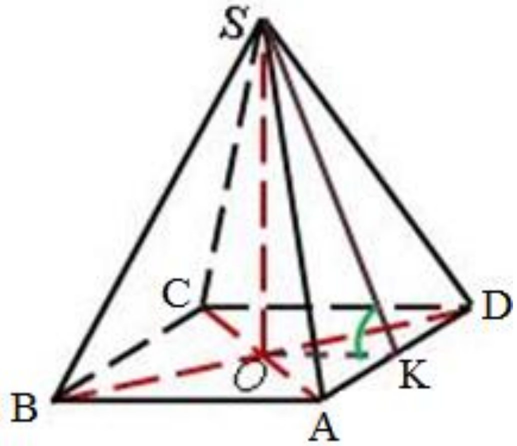
1. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель выиграл у всех и набрал очков в 8 раз меньше, чем все остальные. Сколько всего было участников?

n- количество участников ⇒ Победитель набрал$(n-1)$– очков. Всего разыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ очков ⇒ $8(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1) \Rightarrow n=18$

**Ответ: 18**

2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 10, а плоскость боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α. Найтиобъём пирамиды.

$$SA=10, \angle SKO=\alpha$$




Пусть $AB=a \Rightarrow OK=\frac{a}{2}$

$$\Delta SKO:\quad H=SO=\frac{a}{2}tg\alpha$$

$$AO=OK\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$AO^2+SO^2=SA^2$$

$$\frac{2a^2}{4}+\frac{a^2tg^2\alpha}{4}=100 \Rightarrow S_{\text{осн.}}=a^2=\frac{400}{2+tg^2\alpha}$$

$$a=\frac{20}{\sqrt{2+tg^2\alpha}} \quad \Rightarrow H=\frac{10tg\alpha}{\sqrt{2+tg^2\alpha}}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{400}{2+tg^2\alpha}\cdot\frac{10tg\alpha}{\sqrt{2+tg^2\alpha}}=\frac{4000tg\alpha}{3\cdot(2+tg^2\alpha)^{3/2}}$$

**Ответ:** $\boldsymbol{\frac{4000tg\alpha}{3\cdot(2+tg^2\alpha)^{3/2}}}$

3. Решить уравнение:

$$arccos\frac{1}{x-3}+\sqrt{6x-8-x^2}+log_{16}(7x-3)=0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases}-1\le\frac{1}{x-3}\le 1\\ 6x-8-x^2\ge 0\\ 7x-3>0\\ x\ne +3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\begin{cases}\frac{1}{x-3}\le 1\\ \frac{1}{x-3}\ge -1\end{cases}\\ x^2-6x+8\le 0\\ x>\frac{3}{7}\\ x\ne 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)\\ x\in[2;4]\\ x>\frac{3}{7}\\ x\ne 3\end{cases}$$

ОДЗ: $x_1=2;\ x_2=4$

$$x_1 = 2x_2 = 4$$
$$\arccos(-1) + 0 + log_{16}11 \neq 0 \arccos 1 + 0 + log_{16}25 \neq 0$$

**Ответ:** $\emptyset$

4. Решить систему уравнений:

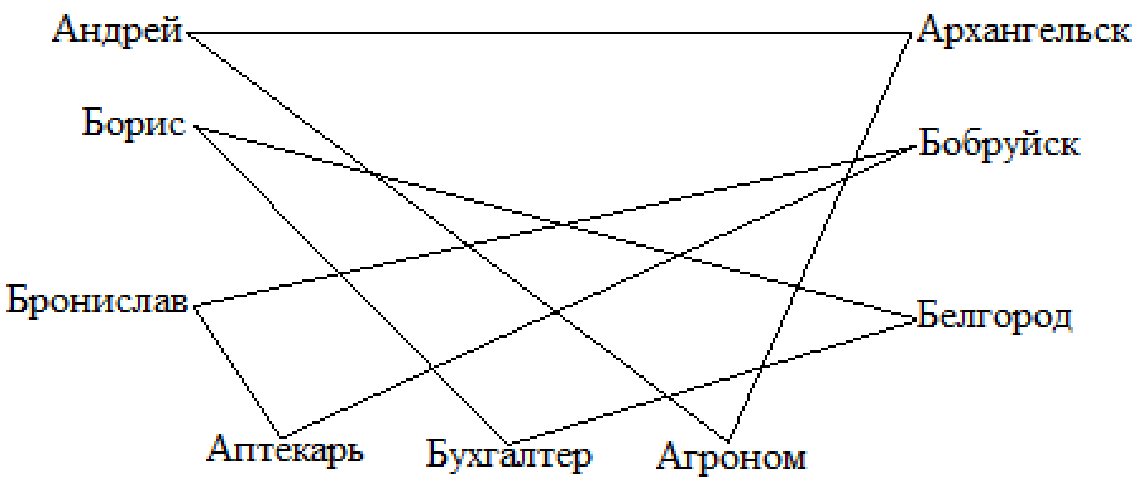
$$\begin{cases} log_3(0{,}5x) - log_{\sqrt{3}}y = 0 \\ log_2(0{,}25x^2 - 2y^2) - 3 = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0;\ y > 0;\ (0{,}25x^2 - 2y^2) > 0$

$$\begin{cases} 0{,}5x = y^2 \\ 0{,}25x^2 - 2y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow$$
$$x = 2y^2$$
$$\frac{1}{4} \cdot 4y^4 - 2y^2 = 8$$
$$y^4 - 2y^2 - 8 = 0$$
$$y^2 = 1 \pm 3 \Rightarrow$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 8$$

**Ответ: (8;2)**

5. Три молодых человека – Андрей, Бронислав и Борис – живут в Архангельске, Бобруйске и Белгороде. Один из них аптекарь, другой – бухгалтер, третий – агроном. Известно, что: - Борис бывает в Бобруйске лишь наездами и то весьма редко; - у двоих из них названия профессий и городов, в которых они живут, начинается с той же буквы, что и имена; - жена аптекаря доводится Борису младшей сестрой.Выяснить, кто где живет и у кого какая профессия.




**Ответ: Андрей – агроном, Архангельск; Борис – бухгалтер, Белгород; Бронислав – аптекарь, Бобруйск.**

6. Решить уравнение:

$$sin\left(\frac{\pi}{2}sinx\right) = \cos(\frac{\pi}{2}cosx)$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2}sinx\right) - sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}cosx\right) = 0$$

$$2sin\frac{\frac{\pi}{2}sinx - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}cosx}{2} \cdot cos\frac{\frac{\pi}{2}sinx + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}cosx}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}(sinx + cosx - 1) = \pi n \\ \frac{\pi}{4}(sinx - cosx + 1) = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} sinx + cosx = 1 + 4n \\ sinx - cosx = -1 + 2 + 4n \end{array}\right.$$

$$sinx + cosx = 1$$

$$sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + (1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$sinx - cosx = 1$$

$$sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = \pi n, n \in \mathbf{Z};\ \ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}}$

7. В треугольник со сторонами AB = 10, BC = 17, AC = 21 вписан прямоугольник с периметром 24 так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

$$\Delta ABC \sim \Delta BKN$$

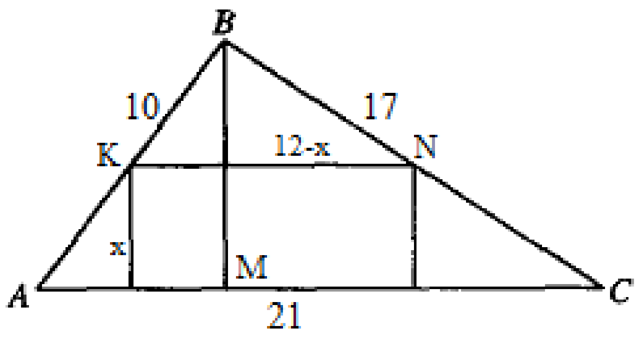
$$BM = h = \frac{2S}{AC} = \frac{2\sqrt{\frac{48}{2}\cdot(\frac{48}{2} - 10)\cdot(\frac{48}{2} - 17)\cdot(\frac{48}{2} - 21)}}{21} = 8$$

$$\frac{12 - x}{21} = \frac{8 - x}{8} \Rightarrow$$

$$96 - 8x = 168 - 21x$$

$$13x = 72$$

$$x = \frac{72}{13}$$



$$12 - x = 12 - \frac{72}{13} = \frac{84}{13}$$

**Ответ:** $\mathbf{5\frac{7}{13}; 6\frac{6}{13}}$

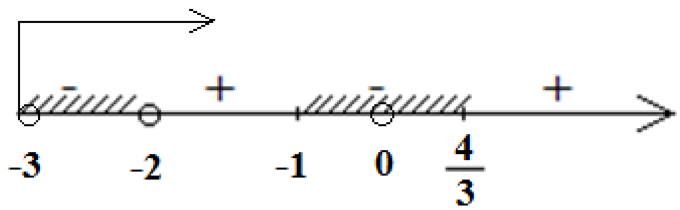
8. Решить неравенство:

$$log_{3+x}(3x^2) \leq log_{3+x}(x+4)$$

ОДЗ: $x \neq 0$

$$x > -4$$
$$x > -3$$
$$x \neq -2$$
$$(3 + x - 1)(3x^2 - 1) \leq (3 + x - 1)(x + 4 - 1)$$
$$(x+2)(3x^2 - 1) \leq (x+2)(x+3)$$
$$(x+2)(3x^2 - x - 4) \leq 0$$

$(x+2) \cdot 3(x+1)(x - \frac{4}{3}) \leq 0$




**Ответ:** $\boldsymbol{x \in (-3; -2) \cup [-1; 0) \cup (0; \frac{4}{3}]}$

9. При каких значениях параметра а уравнение имеет хотя бы два корня? Найти корни.

$2|x + 5| + |a - 3| = x + 6$

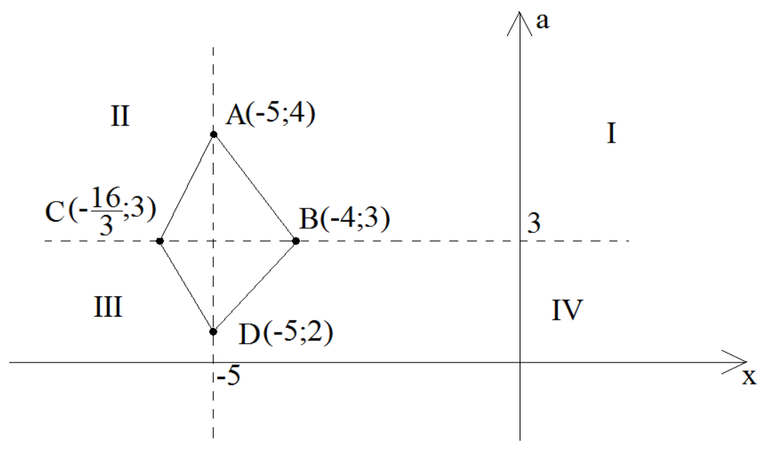
I. $2(x + 5) + a - 3 = x + 6$

$$a = -x - 1$$
$$x_1 - a - 1$$

II. $-2(x + 5) + a - 3 = x + 6$

$$a = 3x + 19$$
$$x_2 = \frac{a - 19}{3}$$

III.$-2(x + 5) - (a - 3) = x + 6$




$$a = -3x - 13$$
$$x_3 = -\frac{a + 13}{3}$$

$IV.$ $2(x + 5) - (a - 3) = x + 6$

$$a = x + 7$$
$$x_4 = a - 7$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = -a - 1,\ x_2 = \frac{a-19}{3}}$ **при** $\boldsymbol{a \in [3;4),\ x_3 = -\frac{a+13}{3}\ ,\ x_4 = a - 7}$ **при** $\boldsymbol{a \in (2;3).}$

10.Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = (\frac{x_3}{2})^2 \\ x_2 + x_3 = (\frac{x_4}{2})^2 \\ x_3 + x_4 = (\frac{x_5}{2})^2 \\ x_4 + x_5 = (\frac{x_1}{2})^2 \\ x_5 + x_1 = (\frac{x_2}{2})^2 \end{cases}$$

$$x_i > 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Пусть $x_e$– наименьшее, а $x_m$– наибольшее из чисел$x_1, x_2, x_3\ \dots x_5$

$$x_e \le x_m$$

Из уравнений системы следует

$$2x_e \le \left(\frac{x_e}{2}\right)^2 \ \Rightarrow x_e \ge 8$$

$$2x_m \ge \left(\frac{x_m}{2}\right)^2 \ \Rightarrow x_m \le 8$$

$$0 \le x_e \le x_m \le 8 \ \Rightarrow x_e = x_m = 8$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 8}$

Вариант №4

1. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель все игры провел вничью и набрал очков в 15 раз меньше, чем всеостальные. Сколько всего было участников?

n - количество участников $\Rightarrow$ Победитель набрал $\frac{(n-1)}{2}$ очков. Всего разыграно $\frac{n(n-1)}{2}$очков

$$\frac{15(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)}{2} \Rightarrow n = 16$$

**Ответ: 16**

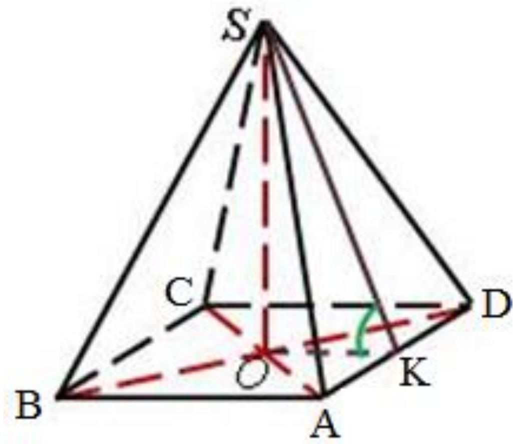
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10, а плоскость боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

*AB*=*AD*=*BC*=*DC*=10 $\angle SKO = \alpha$

$$SK = \frac{OK}{cos\alpha} = \frac{10}{2cos\alpha} = \frac{5}{cos\alpha}$$

$$S_{\text{пол.пов}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.пов}}$$

$$S_{\text{пол.пов}} = 10^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{5}{cos\alpha} = \frac{100(1 + cos\alpha)}{cos\alpha}$$




**Ответ:** $\frac{\mathbf{100(1+}cos\alpha)}{cos\alpha}$

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{log_{1/3}|x-1|} + arccos\frac{1}{x-1} + \cos\left(\frac{\pi}{4-x}\right) = 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1 \\ log_{\frac{1}{3}}|x-1| \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \\ \begin{cases} \frac{1}{x-1} \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} \geq -1 \end{cases} \\ |x-1| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \\ x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty) \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$x_1 = 0$

$$\sqrt{log_{1/3}|0-1|} + arccos\frac{1}{0-1} + \cos\left(\frac{\pi}{4-0}\right) \neq 0$$

$x_2 = 2$

$$\sqrt{log_{1/3}|2-1|} + arccos\frac{1}{2-1} + \cos\left(\frac{\pi}{4-2}\right) = 0$$

**Ответ: 2**

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} log_2 2^x + log_2 8^{-y} = log_2 2\sqrt{2} \\ log_9 \dfrac{1}{x} + 0{,}5 = log_3(3\sqrt{y}) \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^{-3y} = 2^{3/2} \\ \dfrac{1}{2} log_3 \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} log_3 3 = log_3 3\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{x} = 9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x} = 3y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x} = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ y = \dfrac{1}{3x} \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

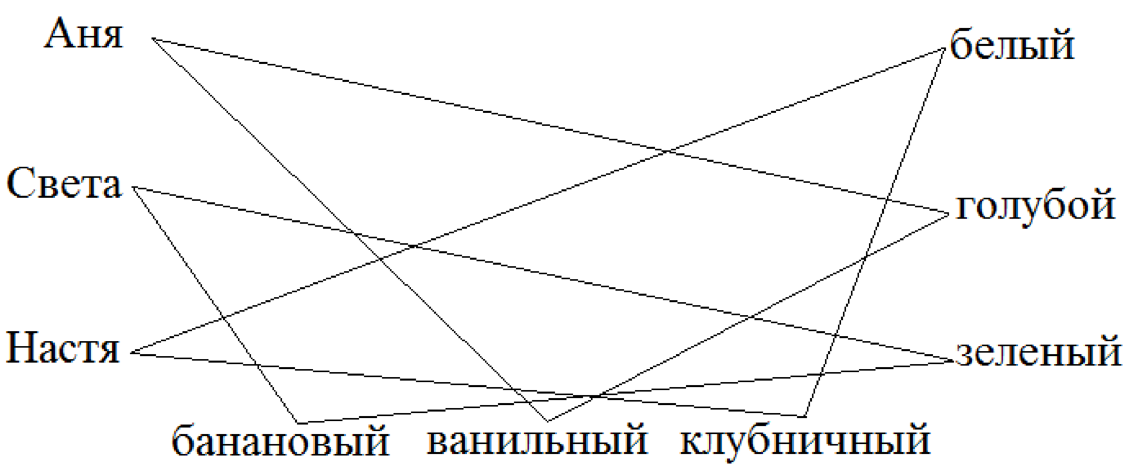
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{6}$$

**Ответ: $(2; \frac{1}{6})$**

5. Три подруги – Аня, Света и Настя – купили различные молочные коктейли в белом, голубом и зеленом стаканчиках. Ане достался не белый стаканчик, Свете – не голубой. В белом стаканчике не банановый коктейль. В голубом стаканчике ванильный коктейль. Света не любит клубничный коктейль.Какой коктейль купила Настя и в каком стаканчике?




**Ответ:**

**Настя купила клубничный коктейль в белом стаканчике.**

6. Решить уравнение:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}sinx\right) = ctg(\frac{\pi}{2}cosx)$$

ОДЗ: $\begin{cases} sinx \neq \pm 1 \\ cosx \neq 0 \end{cases}$ $\qquad x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}sinx\right) = tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}cosx)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}sinx - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}cosx\right) = 0$$
$$\frac{\pi}{2}sinx - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}cosx = \pi n$$
$$\frac{\pi}{2}(sinx + cosx - 1) = \pi n$$
$$sinx + cosx = 1 + 2n$$

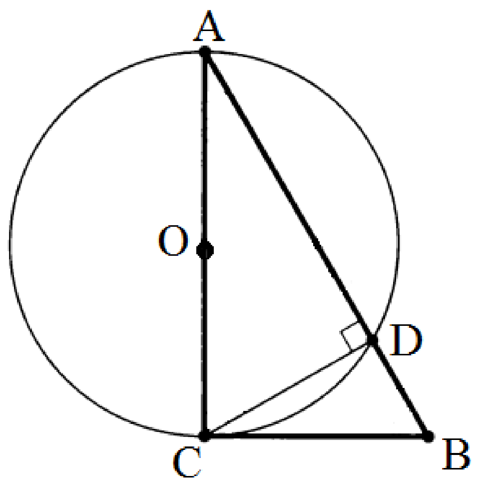
$$\left[\begin{array}{l} sinx + cosx = 1 \\ sinx + cosx = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x + \frac{\pi}{4} = -(-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} - (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. \Rightarrow x = \pi n$$

**Ответ: $\boldsymbol{x = \pi n}$**

7. На большем катете прямоугольного треугольника как на диаметре построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 , а длина хорды, соединяющей вершину прямогоугла с точкой пресечения гипотенузы и окружности, равна 6.

$CB = 7{,}5 \qquad CD = 6$




$\Delta CDB$ : $\quad DB = \sqrt{(7{,}5)^2 - 6^2} = \frac{9}{2}$

$$\Delta CDB \sim \Delta ABC$$
$$\frac{DB}{CD} = \frac{CB}{AC}$$
$$\frac{\frac{9}{2}}{6} = \frac{7{,}5}{2R} \Rightarrow R = \frac{7{,}5 \cdot 6}{2 \cdot \frac{9}{2}} = \frac{45}{9} = 5$$

**Ответ: 5**

8. Решить неравенство:

$$log_{4-x}(8x^2) \geq log_{4-x}(2x + 1)$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 4 - x \neq 1 \\ 4 - x > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x < 4 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$x \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$$

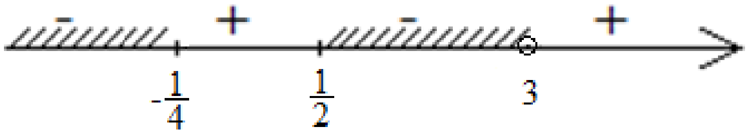
$$(4 - x - 1)(8x^2 - 1) \geq (4 - x - 1)(2x + 1 - 1)$$

$$(3 - x)(8x^2 - 1 - 2x) \geq 0$$

$$(x - 3)(8x^2 - 1 - 2x) \leq 0$$

$8x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 1 \cdot 8}}{16} = \frac{2 \pm 6}{16}$$




$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}$$

$$(x - 3) \cdot 8 \cdot (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{4}) \leq 0$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right)}$

9. При каких значениях параметра а уравнение имеет два корня? Найтикорни.

$$|x + 1| + a|x - 2| = 3$$

$$a|x - 2| = 3 - |x + 1|$$

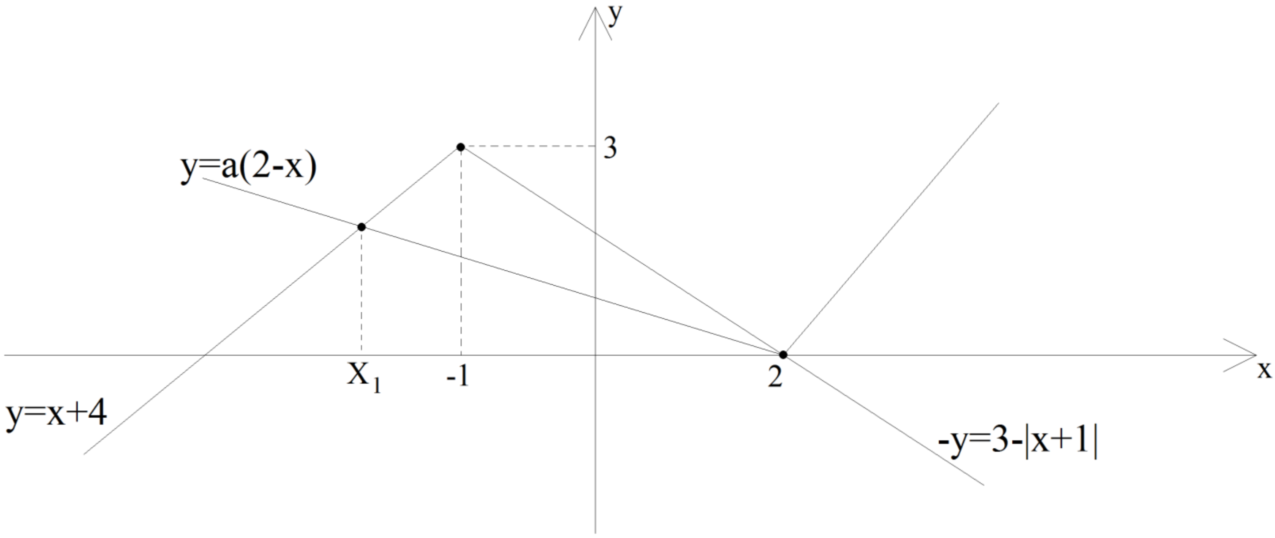
$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = a(2 - x) \end{cases}$$

$$x + 4 = a(2 - x)$$

$$x + ax = 2a - 4$$

$$(a + 1)x = 2a - 4$$

$$x = \frac{2a - 4}{a + 1}$$




**Ответ:** $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1})$ $\quad \boldsymbol{x_1 = \frac{2a-4}{a+1}}$; $\quad \boldsymbol{x_2 = 2}$

10.Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = (x_3)^2 \\ x_2 + x_3 = (x_4)^2 \\ x_3 + x_4 = (x_5)^2 \\ x_4 + x_5 = (x_1)^2 \\ x_5 + x_1 = (x_2)^2 \end{cases}$$

Пусть $x_e$- наименьшее; $x_m$ – наибольшее из чисел $x_1, x_2, x_3 \dots x_5$

Из уравнений системы следует:

$$2x_e \leq (x_e)^2 \Rightarrow \; x_e \geq 2$$

$$2x_m \geq (x_m)^2 \Rightarrow \; x_m \leq 2$$

$$2 \leq x_e \leq x_m \leq 2 \Rightarrow x_e = x_m = 2$$

**Ответ:** $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2}$