Очная форма обучения. Бакалавры.
I курс, 2 семестр.
Направление 220700 –«Автоматизация технологических процессов и производства».
Дисциплина - «Математика»

Материалы для подготовки к экзамену.

Содержание.

Описание экзаменационного билета.

Экзаменационный билет:

- **1 теоретический вопрос.**
  Дифференциальные уравнения
- **2 теоретический вопрос.**
  Определенный интеграл по отрезку или функции нескольких переменных
- **Задачи.**

Теоретические вопросы.

Математический анализ

1. Первообразная функции. Теорема о разности двух первообразных (с доказательством). Неопределенный интеграл: определение, простейшие свойства неопределенного интеграла с доказательством одного из них.
2. Задача о площади криволинейной трапеции, приводящая к понятию определенного интеграла по отрезку. Определение определенного интеграла по отрезку.
3. Вычисление определенного интеграла по отрезку. Формула Ньютона-Лейбница (вывод*).
4. Определение определенного интеграла по отрезку. Основные свойства определенного интеграла по отрезку (с доказательством одного из них).
5. Теорема об оценке определенного интеграла по отрезку (формулировка, доказательство*), геометрический смысл.
6. Теорема о среднем (формулировка, доказательство*), геометрический смысл.
7. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом (формулировка).
8. Задача о массе фигуры, приводящая к понятию определенного интеграла по фигуре. Определение определенного интеграла по фигуре. Виды интегралов, их механический смысл.
9. Определение дифференциального уравнения, его порядка, решения. Задача Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ и ее геометрический смысл. Общее и частное решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
10. Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ (формулировка). Геометрический смысл теоремы

Коши.

11. Дифференциальные уравнения 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$. Задача Коши для уравнения $y'' = f(x, y, y')$ и её геометрический смысл. Общее и частное решения дифференциального уравнения 2-го порядка.

12. Задача Коши для дифференциального уравнения n – го порядка. Общее и частное решения дифференциального уравнения n – го порядка.

13. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) 2-го порядка, простейшие свойства решений (доказательство одного из них).

14. Линейная зависимость и независимость системы двух функций. Условие линейной зависимости и независимости двух функций. Определитель Вронского, его свойства для линейной зависимости системы двух функций (доказательство).

15. Определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) n-го порядка, ЛОДУ 2-го порядка. Определитель Вронского, его свойство для фундаментальной системы решений.

16. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2- го порядка (доказательство).

17. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка (доказательство).

18. Линейное однородное дифференциальное уравнение n – го порядка с постоянными коэффициентами. Лемма о характеристическом уравнении (доказательство), пример.

19. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений и общее решение в случае различных действительных корней характеристического уравнения (формулировка, доказательство).

20. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений и общее решение в случае кратных действительных корней характеристического уравнения (формулировка, доказательство, пример).

21. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений и общее решение в случае комплексных корней характеристического уравнения (формулировка, пример).

22. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных.

23. ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными: метод решения.

24. Однородное ДУ 1-го порядка: метод решения.

25. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка: метод решения.

26. Метод понижения порядка для решения уравнений вида $f(x, y', y'') = 0$ $f(y, y', y'') = 0$.

Решение задач.

ЗНАТЬ таблицу производных, интегралов, подведения функций под знак дифференциала, формулу Ньютона-Лейбница.

УМЕТЬ интегрировать функции методом: подведения под знак дифференциала, замены переменной, по частям, интегрировать тригонометрические выражения, простейшие дроби, иррациональные функции.

УМЕТЬ вычислить определенный интеграл по отрезку, площадь криволинейной трапеции, объём тела вращения.

УМЕТЬ решать дифференциальные уравнения (ДУ) 1-го порядка: с разделяющимися переменными, однородные , линейные .

УМЕТЬ решать линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами 2, 3-го порядков, линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью, ЛНДУ 2-го порядка методом* вариации произвольных постоянных

……….. НЕЗНАНИЕ ПОДЧЕРКНУТЫХ ВОПРОСОВ ПРЕКРАЩАЕТ ЭКЗАМЕН

*** - ДАННЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, ЗАДАЧИ НА «4» И «5».**

На «3» - формулировки теорем, определения, умение применять их к решению задач, геометрические иллюстрации понятий.

Функции нескольких переменных*

1. Частные приращения функции $z = f(x, y)$. Частные производные: определения и их геометрический смысл.
2. Полное приращение функции $z = f(x, y)$. Непрерывность функции $z = f(x, y)$ в точке (два определения).
3. Определение дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке. Определение полного дифференциала dz и его форма.
4. Свойство дифференцируемой функции: связь между дифференцируемостью функции $Z = F(x, y)$ и непрерывностью функции $z = f(x, y)$ в точке (формулировка, доказательство).
5. Свойство дифференцируемой функции: связь между дифференцируемостью функции $z = f(x, y)$ и существованием частных производных в точке (формулировка).
6. Достаточное условие дифференцируемости функции $Z = F(x, y)$ (формулировка).
7. Частные дифференциалы функции $z = f(x, y)$: определение, форма.
8. Частные производные высших порядков. Равенство смешанных частных производных второго порядка.
9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности (определение). Теорема о существовании касательной плоскости (формулировка, доказательство*).
10. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявно и явно.
11. Определение точки максимума и точки минимума функции $Z = F(x, y)$. Необходимый признак существования экстремума функции $Z = F(x, y)$ (формулировка, доказательство*).
12. Достаточный признак существования экстремума функции $Z = F(x, y)$ (формулировка).
13. Производная функции $u = u(x, y, z)$ по направлению $\vec{l}$ (определение, формула для вычисления, вывод* формулы вычисления).
14. Градиент функции $u = u(x, y, z)$ в точке (определение, свойства). Связь между производной по направлению и градиентом функции (обоснование).

****- Вопросы по теме «Функция нескольких переменных», *если студент не сдал тему в семестре.***

*** - ДАННЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, ЗАДАНИЯ НА «4» И «5».**

На «3» - формулировки теорем, определения, умение применять их к решению задач, геометрические иллюстрации понятий.

Образец экзаменационных задач.

1. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-2y'+2y=(5x-4)\cdot e^{-x}$.
2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+11}}$, $y=0$, $x=5$.

ИЛИ

1. Найти общее решение $y'+\dfrac{2y}{x}=3e^{x^3}$.
2. Найти объем фигуры, полученной вращением криволинейной трапеции, ограниченной данными линиями вокруг оси Ox.
   $y=x\sqrt{\ln x}$, $y=0$, $x=e$.

Образцы задач для подготовки к экзамену

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями.

1. $y=e^x\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 5$, $x=0$.
   Ответ: $\dfrac{16}{3}$.
2. $y=\ln(x+1)$, $y=0$, $x=e-1$.
   Ответ: 1.
3. $y=x\sqrt{x+4}$, $y=0$.
   Ответ: $\dfrac{128}{15}$.
4. $y=\dfrac{12\sin x}{(2+\cos x)^2}$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$.
   Ответ: 2.
5. $y=\dfrac{(\ln x+1)^2}{x}$, $y=0$, $x=\dfrac{1}{e}$, $x=e^2$.
   Ответ: 9.
6. $y=(\pi-x)\cos\dfrac{x}{2}$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.
   Ответ: 4.
7. $y=\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}$, $y=0$, $x=8$.
   Ответ: $\dfrac{14}{3}$.
8. $y=(2x-3)\cdot e^{2x}$, $y=0$, $x=0$.
   Ответ: $\dfrac{1}{2}e^3-2$.

Найти объем фигуры, образованной вращением криволинейной трапеции, ограниченной данными линиями, вокруг оси Ox.

1. $y=\dfrac{2e^{x}}{\left(e^{2x}+1\right)}$, $x=0, x=1, y=0$.

   Ответ: $2\pi\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e^{2}+1}\right)$.

2. $y=3x\cdot\sqrt[3]{x^{3}+1}$, $y=0$.

   Ответ: $\dfrac{9\pi}{5}$.

3. $y=x\cdot\sqrt{\ln x}$, $y=0$, $x=1, x=e$.

   Ответ: $\pi\left(\dfrac{e^{3}}{3}-\dfrac{e^{3}}{9}\right)+\dfrac{\pi}{9}$.

4. $y=2\sqrt{\pi-x}\cdot\sin x$, $y=0$, $x=0, x=\pi$.

   Ответ: π^{3}.

Найти общее решение дифференциального уравнения или решение задачи Коши.

1. $y'-\dfrac{y}{x\cdot\ln x}=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

   Ответ: $y=\left(2\sqrt{x}+C\right)\ln x$.

2. $y'-\mathrm{ctg}x\cdot y=4\sin^{3}x$.

   Ответ: $y=\left(2x-\sin 2x+C\right)\sin x$.

3. $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{x(\ln y-\ln x)}$, $y(1)=e$.

   Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln^{2}\dfrac{y}{x}=\ln x+\dfrac{1}{2}$.

4. $y'-\dfrac{3y}{x}=\dfrac{y^{2}}{x^{2}}+5$.

   Ответ: $\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{y+x}{2x}=\ln|x|+C$.

5. $\dfrac{y'\cdot e^{\cos x}}{\cos^{2}y}=\dfrac{\sin x}{\cos^{2}y+1}$.

   Ответ: $y+\mathrm{tg}\,y=e^{-\cos x}+C$.

6. $y'\cdot\left(e^{2x}+1\right)=y^{2}\cdot e^{x}+4e^{x}$, $y(0)=2$.

   Ответ: $\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{y}{2}=\mathrm{arctg}e^{x}-\dfrac{\pi}{8}$.

7. $y'-\sin x\cdot y=\sin x\cdot e^{\cos x}$.

   Ответ: $y=\left(-\dfrac{1}{2}e^{2\cos x}+C\right)\cdot e^{-\cos x}$.

8. $y'-2\,\mathrm{tg}\,x\cdot y=3\sin x$, $y(0)=2$.

   Ответ: $y=\left(3-\cos^{3}x\right)\dfrac{1}{\cos^{2}x}$.

Найти общее решение ЛНДУ со специальной правой частью, используя метод неопределенных коэффициентов.

1. $y'' - 6y' + 5y = -8e^{x}$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{5x} + 2x \cdot e^{x}$.

2. $y'' + y' - 2y = (4x + 13) \cdot e^{2x}$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} + (x + 2) \cdot e^{2x}$.

3. $y'' - 2y' + 2y = (5x - 4)e^{-x}$.

   Ответ: $y_{он} = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x \cdot e^{-x}$.

4. $y''' - 4y' = 64 \sin 2x$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 + 4\cos 2x$.

5. $y''' + 4y' = 24x^2 - 24x + 12$.

   Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + 2x^3 - 3x^2$.

Найдите общее решение ЛНДУ, используя метод вариации произвольных постоянных.

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + \sqrt{x^2 + 1} \cdot e^{x} + xe^{x} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|$.

2. $y'' - y = \dfrac{2e^{x}}{e^{2x} + 1}$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{2}e^{x} \cdot \ln(e^{-2x} + 1) - \dfrac{1}{2}e^{-x} \cdot \ln(e^{2x} + 1)$.

3. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x + 2}$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + (2\ln|x + 2| - x) \cdot e^{2x} + xe^{2x} \cdot \ln|x + 2|$.

4. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x} + 1}$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + e^{2x} \cdot \mathrm{arctg}\, e^{x} - \dfrac{1}{2}e^{x} \cdot \ln(e^{2x} + 1)$.

Найти вид общего решения ЛНДУ со специальной правой частью, используя принцип наложения решений и не вычисляя коэффициентов частного решения.

1. $y'' - 7y' + 12y = 2x \cdot e^{3x} - 2(\cos 4x + \sin 4x) + 2x^2$.

   Ответ: $y_{он} = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + (Ax + B) \cdot e^{3x} \cdot x + A_1 \cos 4x + B_1 \sin 4x + A_2x^2 + B_2x + D_2$.

2. $y''' + 4y' = 5x - 1 + 3\cos 2x - 5e^{-2x}$.

   Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + (Ax + B) \cdot x + (A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x) \cdot x + A_2 \cdot e^{-2x}$.

3. $y'' + 4y' + 4y = (1 - x) \cdot e^{-2x} + 5x \cdot \sin x - 2(x + 3)$.

   Ответ:

   $y_{он} = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + (Ax + B) \cdot e^{-2x} \cdot x^2 + (A_1x + B_1)\sin x + (A_2x + B_2)\cos x + A_3x + B_3$

4. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} - 3\cos x + 7e^{-2x} \cdot \sin x$.

   Ответ: $y_{он} = C_1 e^{-2x} \cdot \cos x + C_2 e^{-2x} \cdot \sin x + Ae^{-2x} + A_1 \cos x + B_1 \sin x + e^{-2x} \cdot (A_2 \cos x + B_2 \sin x) \cdot x$

5. $y''' - 3y'' + 2y' = 5 \cdot \left(e^{2x} - e^{x}\right) + 4x$.

   Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{x} + Ae^{2x} \cdot x + Be^{x} \cdot x + (A_1 x + B_1) \cdot x$.