КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Очная форма обучения. Бакалавры
I курс, 3 семестр
Направление 220700 «Автоматизация технологических процессов и производств»
Дисциплина - «Математика»

Содержание

Балльно - рейтинговая система

Семестр 3 состоит из двух модулей.

Работа в 3 семестре оценивается по балльно-рейтинговой системе (БРС) - **максимум 75 баллов, сдача экзамена – 25 баллов**.

Контрольными мероприятиями в семестре являются **две контрольные работы.**

Максимальный балл за КР - 25 при написании согласно дате календарного плана. При повторных переписываниях максимальный балл за КР - 19.

Минимальный балл за КР – 15.

Модуль 1. Числовые и функциональные ряды.

КР №1 «Числовые и степенные ряды».

РГР №1 «Числовые и степенные ряды».

Модуль 2. Теория вероятностей.

КР №2 « Теория вероятностей».

РГР №2 « Теория вероятностей и элементы математической статистики».

График мероприятий по балльно - рейтинговой оценке знаний студентов в 3 семестре II курса

№	Название	Учебная неделя		Рейтинговая оценка	
		Выдача	Прием	min	max
1	2	3	4		5
1	**Контрольная работа №1 «Числовые и степенные ряды»**		6	15	25

2	**Контрольная работа №2 «Теория вероятностей»**		14	15	25
3	РГР №1 «Числовые и степенные ряды»	1	9	0	5
4	РГР №2 «Теория вероятностей и элементы математической статистики»	10	15	0	5
5	Самостоятельная работа студентов, тестирование	весь	семестр 15-18	0	10
6	**Посещение занятий**	**Весь**	**семестр**	0	5
	Итого за семестр		18		75

Правила применения балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний студентов в 3 семестре II курса.

По балльно-рейтинговой системе работа студента в 3 семестре оценивается - максимум 75 баллов, сдача экзамена -25 баллов.

!!! Для получения оценки «3» автоматически без сдачи экзамена необходимо набрать не менее 50 баллов.

За высокий балл (70-75) студент может быть освобожден от практической части экзаменационного билета и студенту можно разрешить сдачу экзамена досрочно.

А) Если за КР согласно дате календарного плана студент набрал менее 15 баллов, то КР переписывается:

первый раз –через две недели после даты календарного плана написания, второй раз – в конце семестра.

При любом переписывании теоретические вопросы и задачи оцениваются на 1 балл ниже и студент может набрать за КР не более 19 баллов. При этом студент должен набрать по-прежнему не менее 15 баллов за КР.

В) Если студент набрал не менее 50 баллов и претендует на оценки «4», или «5» , то студент сдает экзамен в установленном порядке. Если на экзамене студент не проявляет знания на «4» или «5», то получает в день экзамена заработанную в семестре «3».

С) Баллы за посещение занятий ставятся лектором с согласия преподавателя, ведущего практические занятия.

Д) Если студент набрал менее 50 баллов, то экзамен сдается в установленном порядке.

Контрольная работа №1. «Числовые и степенные ряды»

Пример контрольной работы

1. Определение сходящегося и расходящегося ряда, суммы ряда. Необходимый признак сходимости.

2. Знакочередующийся ряд. Признак Лейбница (формулировка). Понятие об абсолютной и условной сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n}{n+1}}\cdot cos\frac{\pi}{2n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^{2n-1}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{ln^2 n+3}}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^2\cdot 2^n\sqrt[3]{2n+1}}{\sqrt{(n+1)^4+1}}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$.

Теоретические вопросы

1. Определение сходящегося и расходящегося ряда, суммы ряда. Примеры.
2. Необходимый признак сходимости ряда (формулировка).
3. Лемма (необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами, формулировка).
4. Признаки сравнения (формулировка).

5. Признак Даламбера (формулировка).
6. Радикальный признак Коши (формулировка).
7. Интегральный признак Коши (формулировка).

   Исследование сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p > 0$.
8. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда (формулировка)
9. Определение абсолютно сходящегося и условно сходящегося знакопеременного ряда. Примеры.
10. Признак Лейбница (формулировка)
11. Ряд Тейлора, ряд Маклорена.
12. Разложения в ряд Маклорена $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=e^x$, $y=(1+x)^\alpha$, $y=\ln(1+x)$, $y=\operatorname{arctg} x$.

Образцы задач для подготовки к контрольной работе

Исследовать ряды с положительными членами

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n^2+5}{7n^2+3}}$. Ответ: расходится.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(2+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$. Ответ: расходится.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$. Ответ: расходится.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{3n^3+2}$. Ответ: сходится.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{5n^2+7n+1}$. Ответ: расходится.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}arctg\frac{1}{2n}$. Ответ: сходится.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+1}\right)^{n^2}$. Ответ: сходится.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n^2+1}{3n^2+5n}\right)^{n}$. Ответ: расходится.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. Ответ: сходится.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$. Ответ: сходится.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)\cdot 3^n}{(n+2)!}$ Ответ: сходится.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{5n+1}$ Ответ: расходится.

Исследовать ряды на условную и абсолютную сходимость

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{3n+2}$. Ответ: условно сходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^{n+2}}{3n+1}$. Ответ: расходится.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+2)}}$. Ответ: абсолютно сходится.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$. Ответ: условно сходится.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{3n^3+1}}$. Ответ: абсолютно сходится.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sqrt{\frac{3n+1}{5n+4}}$. Ответ: расходится.

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать поведение ряда на концах интервала

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{2^n\cdot\sqrt{3n+5}}$. Ответ: $-3<x\le 1$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)\ln(n+1)}$. Ответ: $-3\le x<3$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n\cdot(2n+1)}{(2n)!}$ Ответ: $-\infty<x<\infty$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n\cdot\sqrt{3n^4+5}}$ Ответ: $-3\le x\le 5$.

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать поведение ряда на концах интервала (самостоятельная работа)

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n^2+1)\cdot 2^n}$	4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n\cdot n}{3^{n+1}(n^2+2)}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\cdot\sqrt[3]{n^2+3}}$	5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-2n+6}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{4^n(n+4)}$	6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n\cdot\sqrt{n+2}}{(3n+4)^2}$

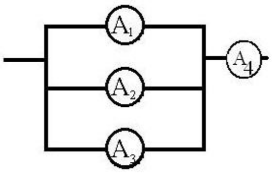
Контрольная работа №2. «Теория вероятностей»

Пример контрольной работы

1. Классическое определение вероятности события и ее свойства.

2. Функция распределения непрерывной случайной величины (определение, свойства). Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

1. Определить вероятность прохождения сигнала по электрической цепи за данный промежуток времени, если вероятность безотказной работы элементов A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно равно 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.



2. На двух станках производится одинаковая продукция. Производительность первого станка в два раза больше производительности второго. Вероятность появления брака на первом станке – 0,1, на втором – 0,15. Изготовленные за смену детали складываются в контейнер. Определить вероятность того, что случайно выбранное из контейнера изделие окажется хорошего качества.

3. Известно, что 10% всего числа радиоламп не удовлетворяет все

требованиям стандарта. Определить вероятность того, что из четырех взятых наудачу ламп окажется не более одной нестандартной.

4. Плотность вероятности некоторой непрерывной случайной величины задана $f(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x\notin[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

Определить коэффициент A, функцию распределения и $P(0 \le X \le \frac{\pi}{4})$.

Теоретические вопросы

1. Определение суммы, произведения и разности событий. Противоположные события.
2. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности.
3. Теорема сложения вероятностей (формулировка).
4. Условная вероятность события. Теорема умножения вероятностей. Независимые события.
5. Полная группа событий. Формула полной вероятности (без вывода). Формула Байеса.
6. Испытания Бернулли (определение). Формула Бернулли и её следствия (без вывода).
7. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины.
8. Непрерывная случайная величина. Функция распределения (определение). Свойства функции распределения (формулировка). Нахождение вероятности попадания случайной величины в данный интервал.
9. Плотность вероятности и её свойства (формулировки).
10. Числовые характеристики дискретной случайной величины (смысл, формулы для вычисления). Свойства математического ожидания (формулировка).
11. Числовые характеристики непрерывной случайной величины (смысл, формулы для вычисления). Свойства дисперсии и среднего квадратического отклонения (формулировки).

Образцы задач для подготовки к контрольной работе

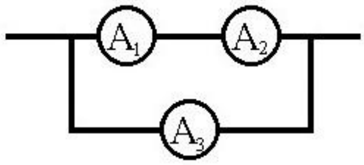
1. Группа туристов, состоящая из 15 юношей и 5 девушек, выбирает по жребию дежурных в количестве 4 человек. Определить вероятность того, что в числе выбранных окажутся трое юношей и одна девушка.

Ответ: 0,47

2. Две бригады строителей получают 10 инструментов, среди которых 2 - отличного качества. Инструменты случайным образом делятся поровну. Какова вероятность того, что в каждой бригаде будет инструмент отличного качества.

Ответ: 0,555

3. Определить вероятность прохождения сигнала по электрической цепи за данный промежуток времени Т. Если вероятность безотказной работы элементов A_1, A_2, A_3 соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8.



Ответ: 0,884

4. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при пожаре датчик сработает, для первого и второго соответственно равны 0,9 и 0,95. Определить вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы один датчик.

Ответ: 0,995

5. На конвейер поступают однотипные изделия, изготовленные двумя рабочими. При этом первый поставляет 60%, а второй – 40% общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим, окажется не стандартным, равна 0,005, вторым – 0,01. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено первым рабочим.

Ответ: 0,4286

6. Вероятность того, что изделие некоторого производства удовлетворяют стандарту, равна 0,96. Предполагается упрощенная система контроля, которая пропускает с вероятностью 0,98 изделия, удовлетворяющие стандарту. И с вероятностью 0,05 изделия, не удовлетворяющие стандарту. Какова вероятность того, что изделие, прошедшее такой контроль, удовлетворяет стандарту ?

Ответ: 0,9979

7. В мастерской имеется 12 моторов. Вероятность того, что мотор работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что не менее 10 моторов работают с полной нагрузкой.

Ответ: 0,5584

8. Станок автомат производит 70% всех изделий первым сортом, а остальное – вторым. Требуется установить, что является более вероятным – получить два первосортных изделия из пяти наудачу отобранных или пять первосортных из десяти.

Ответ: $P_5(2) = 0{,}1323,\ P_{10}(5) = 0{,}1029$

9. Стеновая панель подвергается на испытаниях последовательному воздействию трех нагрузок. Вероятность разрушения панели при этих нагрузках соответственно равны – 0,1; 0,3 и 0,4. при разрушении деталь последующей нагрузке не подвергается. Дискретная случайная величина – число воздействовавших на деталь нагрузок. Найти: закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения $F(x)$. Построить график $F(x)$.

X	1	2	3
P	0,1	0,27	0,63

Ответ: $M(X) = 2{,}53,\ D(X) = 0{,}46$

10. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобрано 2 человека. Дискретная случайная величина – число мужчин среди отобранных. Найти: закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения $F(x)$. Построить график $F(x)$.

X	0	1	2
P	0,066	0,467	0,467

Ответ: $M(X) = 1{,}401,\ D(X) = 0{,}372$

11. Плотность вероятности некоторой непрерывной случайной величины задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} A\sin 2x, & x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]; \\ 0, & x \notin [0,\ \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Определить коэффициент A, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию, а также вероятность того, случайная величина примет значение в интервале $[\frac{\pi}{4},\ \pi]$. Построить график $F(x)$ и f(x).

Ответ: $A = 1,\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1-\cos 2x}{2}, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

$$M(X) = \frac{\pi}{4},$$

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

$$P(\frac{\pi}{4} \le X \le \pi) = 0{,}5.$$

12. Функция распределения непрерывной случайной величины задана следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,\quad a);\\ \dfrac{1}{2}(x-1), & x\in[a,\ b];\\ 1, & x\in[b,\quad +\infty].\end{cases}$$

Найти параметры a и b. Найти выражение для плотности вероятности, математическое ожидание и дисперсию, а также вероятность того, случайная величина примет значение в интервале $[-1,2]$. Построить график $\mathrm{F(x)}$ и f(x).

Ответ: $a=1,\ b=3$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[1{,}3]\\ 0{,}5 & x\in[1{,}3]\end{cases},$$

$$M(X)=2,\ D(X)=0{,}333$$

$$P(-1\le X\le 2)=0{,}5.$$