Очная форма обучения. Бакалавры.
I курс, 2 семестр.
Направление 220700 – «Автоматизация технологических процессов и производства»
Дисциплина - «Математика»

Содержание.

Балльно - рейтинговая система.

Семестр 2 состоит из трех модулей.

Работа в семестре оценивается **75 баллов (максимум) без экзамена**.

Контрольными мероприятиями в семестре являются **двe контрольные работы.**

Максимальный балл за КР - 25 при написании согласно дате календарного плана. При повторных переписываниях максимальный балл за КР - 19.

Минимальный балл за КР – 15.

Модуль 1. Неопределенный интеграл.

КР №1 «Неопределенный интеграл».

Модуль 2. Дифференциальные уравнения

КР №2 «Дифференциальные уравнения».

Модуль 3. Функции нескольких переменных.

Самостоятельная работа по теме: «Функции нескольких переменных».

График мероприятий по балльно - рейтинговой оценке знаний студентов в весеннем семестре (I курс).

№	Название	Учебная неделя		Рейтинговая оценка	
		Выдача	Прием	min	max
1	2	3	4		5
1	Контрольная работа №1 «Неопределенный интеграл».		6	15	25
2	Контрольная работа №2 «Дифференциальные уравнения ».		14	15	25
3	РГР №1 «Неопределенный интеграл».	1	7	0	5
4	РГР №2 «Дифференциальные уравнения», теоретический минимум.	9	15	0	5
5	Самостоятельная работа по теме: «Функции нескольких переменных», теоретический минимум. Тестирование.	8	9	0	10
6	Посещаемость занятий	Весь семестр		0	5
	Итого за семестр		16		75

Правила применения БРС оценки знаний студентов во втором семестре I курса

!!! Для получения оценки «3» автоматически без сдачи экзамена необходимо набрать не менее 50 баллов.
За высокий балл (70-75) студент может быть освобожден от практической части экзаменационного билета и студенту разрешается сдать экзамен досрочно.

А) Если за КР согласно дате календарного плана студент набрал менее 15 баллов, то КР переписывается:

первый раз – через две недели после даты календарного плана написания, второй раз – в конце семестра.

При любом переписывании теоретические вопросы и задачи оцениваются на 1 балл ниже и студент может набрать за КР не более 19 баллов. При этом студент должен набрать по-прежнему не менее 15 баллов за КР.

В) Если студент набрал не менее 50 баллов и претендует на оценки «4», или «5» , то студент сдает экзамен в установленном порядке. Если на экзамене студент не проявляет знания на «4» или «5», то получает в день экзамена заработанную в семестре «3».

С) Балл за посещение занятий ставится лектором с согласия преподавателя, ведущего практические занятия.

Д) Если студент набрал менее 50 баллов, то сдает экзамен в установленном порядке.

Е) Студент, не сдавший экзамен без уважительной причины во время, не может претендовать на «5».

Ж) Если студент в семестре сдал самостоятельную работу и теоретический минимум по теме: «Функции нескольких переменных», то студент на экзамене освобождается от вопроса по этой теме.

З) Если студент в семестре не сдал самостоятельную работу и теоретический минимум по теме: «Функции нескольких переменных», то на экзамене получает теоретический вопрос по этой теме.

Контрольная работа №1. «Неопределенный интеграл».

Пример контрольной работы.

Вычислить неопределенные интегралы

1. $\int\left(x\cdot\sqrt[5]{x^7}-\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}\right)\cdot dx$;
2. $\int e^{\frac{x}{5}+2}dx$;
3. $\int tg(3x)\cdot dx$;
4. $\int 5x^2\cdot\sin\left(x^3+2\right)\cdot dx$;
5. $\int\frac{3x\cdot dx}{\sqrt{x^4-3}}$;
6. $\int\frac{\cos^3 x\cdot dx}{\sqrt{\sin^3 x}}$;
7. $\int\ln(x+1)dx$;
8. $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$;
9. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx$;
10. $\int\frac{(x-3)}{\sqrt{8x-x^2-1}}dx$;
11. $\int\frac{3x^2-1}{x\cdot(x^2-1)}dx$.

Теоретические вопросы.

1. Первообразная функция. Теорема о разности двух первообразных (формулировка).
2. Неопределенный интеграл. Простейшие свойства неопределенного интеграла (формулировка).
3. Задача о площади криволинейной трапеции, приводящая к понятию определенного интеграла по отрезку.
4. Основные свойства определенного интеграла по отрезку (формулировки).
5. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям в определенном интеграле по отрезку.
6. Теорема об оценке (формулировка, геометрический смысл).
7. Теорема о среднем (формулировка, геометрический смысл).

Контрольная работа №2. «Дифференциальные уравнения».

Пример контрольной работы.

1. Найти общее решение:
   $y'-\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{2y^2}{x^2}+3}=\frac{y}{x}$;
2. Решить задачу Коши:
   $\frac{\left(x^2+1\right)\cdot y'}{y}=\frac{arctgx}{\ln^2 y-1}$, $y(0)=e$;
3. Найти общее решение ЛНДУ, используя метод неопределенных коэффициентов:
   $y+2y'+y=20\cos 3x-10\sin 3x$;
4. Найти вид общего решения ЛНДУ со специальной правой частью, применяя принцип наложения решений:
   $y''+4y'+5y=e^{-2x}-3\cos x+7e^{-2x}\cdot\sin x$;
5. Найти общее решение методом вариации произвольных постоянных:
   $y''-3y'+2y=\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$.

Теоретические вопросы.

1. Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$. Задача Коши и её геометрический смысл. Общее и частное решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
2. Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y'=f(x,y)$ (формулировка, геометрический смысл).
3. Дифференциальное уравнение 2-го порядка $y''=f(x,y,y')$. Задача Коши для уравнения $y''=f(x,y,y')$ и её геометрический смысл. Общее и частное решения дифференциального уравнения второго порядка.
4. Линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) 2-го порядка. Определение фундаментальной системы решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка (формулировка).
5. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка (формулировка).
6. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Лемма о характеристическом уравнении (формулировка). Фундаментальная система решений и общее решение в случае различных действительных корней характеристического уравнения (формулировка).
7. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений и общее решение в случае кратных действительных корней характеристического уравнения (формулировка).
8. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений и общее решение в случае комплексных корней характеристического уравнения (формулировка).
9. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных (формулировка).
10. Линейная зависимость и независимость системы двух функций на интервале (определение). Определитель Вронского и его свойства. Связь определителя Вронского

с линейной независимостью системы решений линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка (формулировка).

Образцы задач для подготовки к контрольной работе.

I. Решить дифференциальные уравнения.

1. Найти общее решение: $\sqrt{xy+y}dx = ydy$.

Решение: $\sqrt{y}\sqrt{x+1}dx = ydy$;

$$\int\sqrt{x+1}dx = \int\sqrt{y}dy;$$

$$\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} = \frac{y^{3/2}}{3/2} + C.$$

2. Найти общее решение: $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$.

Решение: $y = u \cdot v$;

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = 3x;$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0;$$

$$u'v = 3x;$$

$$v = \frac{1}{x};$$

$$u' = 3x^2; \; u = x^3 + C;$$

$$y = (x^3 + C)\frac{1}{x}.$$

Ответ: $y = (x^3 + C)\dfrac{1}{x}$.

3. Найти общее решение: $y' - \dfrac{3y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2} + 5$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x} = \ln|x| + C$.

4. Решить задачу Коши: $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

Решение: $y_{oo} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$;

$$y'_{oo} = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x;$$

$$C_1 = 0;$$

$2C_2 = 2$; => $C_2 = 1$

Ответ: $y = \sin 2x$.

5. Найти общее решение: $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-x}$.

Решение: $y_{oo} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$;

$$\bar{y} = Ae^{-x};$$

$$\bar{y}' = -Ae^{-x};$$

$$\bar{y}'' = Ae^{-x};$$

$$A+4A+4A=3; => A=\frac{1}{3};$$

$$y=\frac{1}{3}e^{-x}+C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$$

II. Найти общее решение ЛНДУ со специальной правой частью, используя метод неопределенных коэффициентов.

1. $y''-6y'+5y=-8e^x$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^x+C_2e^{5x}+2x\cdot e^x$.

2. $y''+y'-2y=(8x+13)\cdot e^{2x}$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(x+2)\cdot e^{2x}$.

3. $y''-2y'+2y=(5x-4)e^{-x}$.

   Ответ: $y_{он}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x\cdot e^{-x}$.

4. $y'''-4y'=64\sin 2x$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3+4\cos 2x$.

5. $y'''+4y'=24x^2-24x+12$.

   Ответ: $y_{он}=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+2x^3-3x^2$.

III. Найдите общее решение ЛНДУ, используя метод вариации произвольных постоянных.

1. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^x+C_2xe^x+\sqrt{x^2+1}\cdot e^x+xe^x\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$.

2. $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}e^x\cdot\ln(e^{-2x}+1)+\frac{1}{2}e^{-x}\cdot\ln(e^{2x}+1)$.

3. $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x+2}$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+(2\ln|x+2|-x)\cdot e^{2x}+xe^{2x}\cdot\ln|x+2|$.

4. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^{2x}+C_2e^x+e^{2x}\cdot\mathrm{arctg}\,e^x-\frac{1}{2}e^x\cdot\ln(e^{2x}+1)$.

IV. Найти вид общего решения ЛНДУ со специальной правой частью, используя принцип наложения решений и не вычисляя коэффициентов частного решения.

1. $y''-7y'+12y=2x\cdot e^{3x}-2(\cos 4x+\sin 4x)+2x^2$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+(Ax+B)\cdot e^{3x}\cdot x+A_1\cos 4x+B_1\sin 4x+A_2x^2+B_2x+D_2$.

2. $y'''+4y'=5x-1+3\cos 2x-5e^{-2x}$.

   Ответ: $y_{он}=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+(Ax+B)\cdot x+(A_1\cos 2x+B_1\sin 2x)\cdot x+A_2\cdot e^{-2x}$.

3. $y''+4y'+4y=(1-x)\cdot e^{-2x}+5x\cdot\sin x-2(x+3)$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+(Ax+B)\cdot e^{-2x}\cdot x^2+(A_1x+B_1)\sin x+(A_2x+B_2)\cos x+A_3x+B_3$.

4. $y''+4y'+5y=e^{-2x}-3\cos x+7e^{-2x}\cdot\sin x$.

   Ответ: $y_{он}=C_1e^{-2x}\cdot\cos x+C_2e^{-2x}\cdot\sin x+Ae^{-2x}+A_1\cos x+B_1\sin x+e^{-2x}\cdot(A_2\cos x+B_2\sin x)\cdot x$.

5. $y''' - 3y'' + 2y' = 5 \cdot \left(e^{2x} - e^{x}\right) + 4x$.

Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{x} + Ae^{2x} \cdot x + Be^{x} \cdot x + \left(A_1 x + B_1\right) \cdot x$.

Самостоятельная работа. «Функции нескольких переменных».

Пример самостоятельной работы.

1. Найти область определения функции.

   $z = \sqrt{1 - \ln\left(x + y\right)}$.

2. Вычислить частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

   $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

3. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$.

   $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2x + 3y = 0$, $M_0\left(1;0;1\right)$.

4. Исследовать на экстремум функцию.

   $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

5. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точке $M\left(3;1\right)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N\left(6;5\right)$.

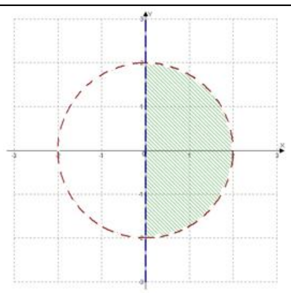
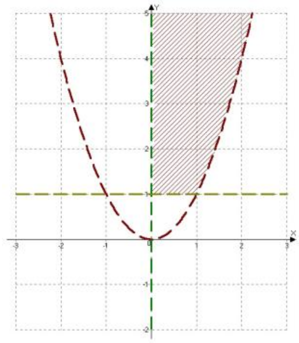
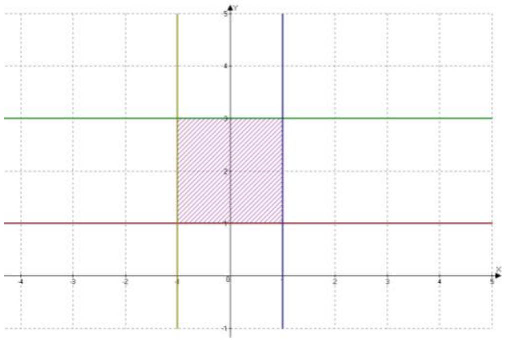
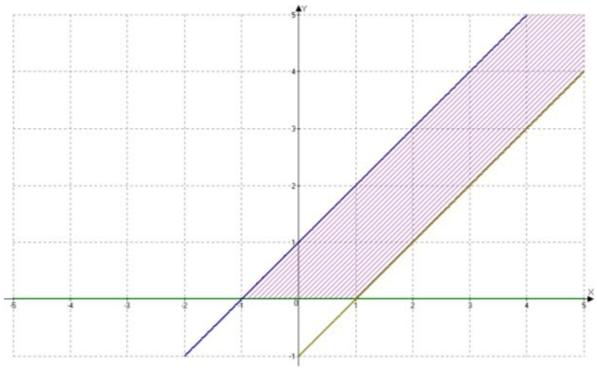
Теоретические вопросы.

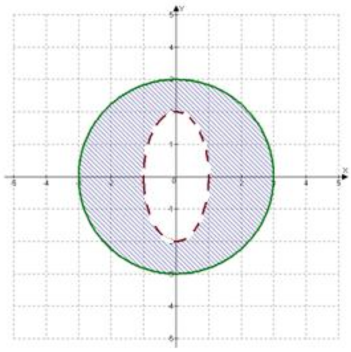
1. Частные приращения функции $z = f(x, y)$. Частные производные, геометрический смысл.
2. Непрерывность функции $z = f(x, y)$ в точке (два определения). Полное приращение функции.
3. Определение дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке. Определение полного дифференциала dz.
4. Связь между дифференцируемостью функции $z = f(x, y)$ и непрерывностью функции в точке (формулировка).
5. Связь между дифференцируемостью функции $z = f(x, y)$ и существованием частных производных в точке (формулировка).
6. Достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (формулировка).
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности (определение). Теорема о существовании касательной плоскости (формулировка).
8. Полный дифференциал функции (форма, геометрический смысл).
9. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной явно и неявно.
10. Определение точки максимума и точки минимума функции $z = f(x, y)$. Необходимый признак существования экстремума функции $z = f(x, y)$ (формулировка).
11. Достаточный признак существования экстремума функции $z = f(x, y)$ (формулировка).

12. Производная функции $u = u(x, y, z)$ по направлению (определение, формула для вычисления без вывода).
13. Градиент функции $u = u(x, y, z)$ в точке (определение). Связь между производной по направлению и градиентом функции (формулировка), свойства градиента.

Образцы задач для подготовки к самостоятельной работе.

I. Найти область определения функции.

№	Условие.	Ответ.
1	$z = \dfrac{\ln x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$	
2	$z = \ln x \cdot \ln(y-1) \cdot \ln(y - x^2)$	
3	$z = \arcsin(y-2) \cdot \arcsin x$	
4	$z = \sqrt{y} \cdot \arcsin(y - x)$	

5	$z=\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{4x^2+y^2-4}}$	

II. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

1. $z=\arccos xy^2$;
2. $z=\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4y}}$;
3. $z=\frac{\cos x^2}{y^3}$;
4. $z=(\cos y)^{\sin x}$;
5. $z=e^{-x^2}+\mathrm{ctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)$.

III. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

1. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2x+3y=0$, $M_0(1;0;1)$.

   Ответ: $x+3z-4=0$;

   $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{3}$.
2. $\ln(x+z)=x+2y+xz-2$, $M_0(2;1;-1)$.

   Ответ: $x-2y-z-1=0$;

   $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$.
3. $xz^2-y^2-x^2-2xy=0$, $M_0(1;0;1)$.

   Ответ: $-x-2y+2z-1=0$;

   $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}$.
4. $\mathrm{tg}(y+z)=x\cdot e^z$, $M_0\left(1;\frac{\pi}{4};0\right)$.

Ответ: $x-2y-z+\frac{\pi}{2}-1=0$;

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-2}=\frac{z}{-1}.$$

5. $x^2-yz^2+y^2+2xy=0$, $M_0(0;1;1)$.

Ответ: $2x+y-2z+1=0$;

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

IV. Исследовать на экстремум функцию.

1. $z=x^2+3y^2-x+18y-4$.

   Ответ: $M_0\left(\frac{1}{2};-3\right)-$ точка min.

2. $z=1-x+2y-6x^2-y^2$.

   Ответ: $M_0\left(-\frac{1}{12};1\right)-$ точка max.

3. $z=x^2+xy+y^2+x+y+1$.

   Ответ: $M_0\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)-$ точка min.

4. $z=x^2+2xy-3y^2+1$.

   Ответ: $M_0(0;0)-$ не является точкой экстремума.

5. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

   Ответ: $M_0(0;0)-$ точка max.

V. Найти производную функции по заданному направлению.

1. Найти производную функции $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ в точке $M_0(2;1)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат.

   Ответ: $-\sqrt{5}$.

2. Найти производную функции $z=x^2-y^2$ в точке $M_0(1;1)$ в направлении, образующем угол 30° с осью Ox.

   Ответ: $\sqrt{3}-1$.

3. Найти производную функции $u=x^2+y^2+z^2-x+y+z+1$ в точке $M_0(1;-2;3)$ в направлении, образующем одинаковые острые углы с координатными осями.

   Ответ: $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

4. Найти величину и направление градиента функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $M_0(1;-1;2)$.

   Ответ: $\mathrm{grad}\, u(M_0) = (6;-6;6)$,

   $|\mathrm{grad} u(M_0)| = 6\sqrt{3}$.

5. Найти градиент функции $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$ в точке $M_0(1;1)$.

   Ответ: $\mathrm{grad}\, z(M_0) = (0;-e)$