

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

Председатель МК
Широкова О.Л. _____

«__» _____ 20__ г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

«Дифференциальная геометрия»

Уровень образования	<i>бакалавриат</i>
Направление подготовки/специальность	01.03.04 Прикладная математика
Направленность (профиль) программы	Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

г. Москва
2015 г.

1. Фонд оценочных средств – неотъемлемая часть нормативно-методического обеспечения системы оценки качества освоения студентами основной профессиональной образовательной программы высшего образования.

2. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине «Дифференциальная геометрия» утвержден на заседании кафедры высшей математики.

Протокол № 1 от «31» августа 2015 г. (год начала реализации 2012)

3. Срок действия ФОС: 2015/2016 учебный год.

1. Структура дисциплины (модуля)

Разделы теоретического обучения

№	Наименование раздела теоретического обучения
1	Введение. Вектор - функции и математические операции над ними. Кривые на плоскости, их локальные особенности. Касание кривых, кривизна кривой. Семейства кривых. Огибающая.
2	Кривые в пространстве. Формулы Френе, трехгранник Френе. Кривизна и кручение кривой. Плоские кривые в пространстве. Эволюта и эвольвента.
3	Теория поверхностей: Криволинейные координаты на поверхности и инвариантные построения. Первая квадратическая форма поверхности и внутренняя геометрия. Сети линий на поверхности. Огибающая семейства поверхностей
4	Искривление поверхности. Вторая квадратическая форма поверхности. Кривизны поверхности. Линии кривизны и асимптотические линии на поверхности. Классификация точек поверхности.
5	Геодезическая кривизна и геодезические линии на поверхности. Специальные виды поверхностей, применяемые в строительстве
6	Линейное векторное пространство. Преобразование ортонормированных базисов. Контрвариантные и ковариантные координаты вектора. Понятие тензора.
7	Тензорная алгебра. Тензоры в трехмерном евклидовом пространстве. Ранги или валентности тензоров. Кососимметрические и симметрические тензоры. Получение инвариантов. Разложение тензора
8	Основные положения тензорного анализа. Тензорное поле и его дифференцирование. Бесконечно малая деформация непрерывной среды. Тензоры напряжений и деформаций. Поток векторного поля через поверхность.
9	Тензоры в римановом пространстве. Многообразия. Метрический тензор и операции с ним. Ковариантные дифференцированные поля. Операции над индексами. Геодезические линии. Понятие о пространстве аффинной связности. Тензор кривизны. Тензор кручения.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы – освоение компетенций.

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю) – получение знаний, умений, навыков.

Компетенция по ФГОС	Код компетенции по ФГОС	Основные показатели освоения (показатели достижения результата)	Код показателя освоения
способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	ПК-9	Знает базовые понятия и теоремы дифференциальной геометрии.	31
		Умеет формализовать в терминах дисциплины задачи как геометрического, так и аналитического характера.	У1
готовностью применять математический аппарат для решения поставленных задач,	ПК-10	Знает основные модели дифференциальной геометрии, а также область	32

Компетенция по ФГОС	Код компетенции по ФГОС	Основные показатели освоения (показатели достижения результата)	Код показателя освоения
способностью применить соответствующую математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов		их практического применения.	
способностью самоорганизации и самообразованию	ОК-7	Имеет навыки самостоятельной работы по разделу дифференциальная геометрия	НЗ

3. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

3.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код компетенции по ФГОС	Этапы формирования компетенций (разделы теоретического обучения)*								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ПК-9	+	+	+	+	+	+	+	+	+
ПК-10	+	+	+	+	+	+	+	+	+
ОК-7	+	+	+	+	+	+	+	+	+

3.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

3.2.1. Описание показателей и форм оценивания компетенций

Код компетенции по ФГОС	Показатели освоения (Код показателя освоения)	Форма оценивания				Обеспеченность оценивания компетенции
		Текущий контроль		Промежуточная аттестация		
		Контрольная работа	Расчетно-графическая работа	Зачет	Дифференцированный зачет	
1	2	3	4	5	6	7
ПК-9	З1			+	+	+
	У1	+	+	+	+	+
ПК-10	З2			+	+	+
ОК-7	НЗ			+	+	+
ИТОГО		+	+	+	+	+

3.2.2. Описание шкалы и критериев оценивания для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) в форме Экзамена/Дифференцированного зачета

Код показателя оценивания	Оценка			
	«2» (неудовлетв.)	Пороговый уровень освоения	Углубленный уровень освоения	Продвинутый уровень освоения
		«3» (удовлетвор.)	«4» (хорошо)	«5» (отлично)
31	Обучающийся не знает значительной части приемов и методов дифференциальной геометрии, допускает существенные ошибки.	Обучающийся имеет знания только основных технических приемов и методов дифференциальной геометрии, но не усвоил деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки и нарушения логической последовательности в изложении.	Теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое. Обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.	Обучающейся исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает основные технические приемы и методы дифференциальной геометрии; свободно справляется с задачами; использует в ответе дополнительный материал. Все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному. Обучающейся анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.
У1	Не умеет самостоятельно использовать алгоритмические приёмы решения стандартных задач дифференциальной геометрии, допускает существенные ошибки, необходимые практические компетенции не сформированы.	Частично освоено использование алгоритмических приёмов решения стандартных задач дифференциальной геометрии. Пробелы не носят существенного характера. Большинство предусмотренных программой заданий выполнено, но в них имеются ошибки при ответе на поставленный вопрос. Обучающийся допускает неточности в решении.	Обучающийся твердо знает алгоритмические приёмы решения стандартных задач дифференциальной геометрии, грамотно и по существу излагает, не допуская существенных неточностей в решении. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое.	Обучающийся глубоко и прочно усвоил алгоритмические приёмы решения стандартных задач дифференциальной геометрии, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал из литературы, правильно обосновывает принятое

				решение.
32	Обучающийся не знает значительной части базовых понятий и теорем дифференциальной геометрии, допускает существенные ошибки.	Обучающийся имеет знания только основных базовых понятий и теорем дифференциальной геометрии, но не усвоил деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки.	Обучающийся твердо знает базовые понятия и теоремы дифференциальной геометрии, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.	Базовые понятия и теоремы дифференциальной геометрии освоены полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал.
НЗ	Не продемонстрировал навыки самостоятельной работы.	Навыки самостоятельной работы продемонстрированы частично, не все темы изучены полностью.	Навыки самостоятельной работы обучающимся продемонстрированы.	Теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал.

3.2.3. Описание шкалы и критериев оценивания для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) в форме Защиты курсовой работы/проекта

Учебным планом курсовые работы/курсовые проекты не предусмотрены.

3.2.4. Описание шкалы и критериев оценивания для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) в форме Зачета

Код показателя оценивания	Оценка	
	Не зачтено	Зачтено
31	Обучающийся не знает значительной части приемов и методов дифференциальной геометрии, допускает существенные ошибки.	Теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое. Обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.
У1	Не умеет самостоятельно использовать алгоритмические приемы решения стандартных задач дифференциальной геометрии, допускает существенные ошибки, необходимые практические компетенции не сформированы.	Обучающийся твердо знает алгоритмические приемы решения стандартных задач дифференциальной геометрии, грамотно и по существу излагает, не допуская существенных неточностей в решении. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое.

32	Обучающийся не знает значительной части базовых понятий и теорем дифференциальной геометрии, допускает существенные ошибки.	Обучающийся твердо знает базовые понятия и теоремы дифференциальной геометрии, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.
НЗ	Не продемонстрировал навыки самостоятельной работы.	Навыки самостоятельной работы обучающимся продемонстрированы.

3.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

3.3.1. Текущий контроль

Контролируется посещение лекций и практических занятий, выполнение контрольных и расчетно-графических работ.

Контрольные работы (КР)

КР «Плоские и пространственные кривые. Их особенности и инварианты. Поверхности в пространстве. Криволинейные координаты. Внутренняя геометрия поверхности. Кривизны поверхности».

Образец КР (5 семестр)

1. Найти особые точки кривой L: $\overline{M}(t) = \overline{N}\left(t - \frac{1}{t}, t^2 - \frac{1}{t}\right)$

Установить их характер. Изобразить L в окрестности точки.

2. Найти огибающую семейства кривых: $(x - c)^2 + (y - c)^2 = 9$.

3. Вычислить кривизну и кручение кривой L:
$$\begin{cases} x = R \cos \\ y = R \sin \\ z = at \end{cases}$$
 в точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Изобразить поверхность $x^2 + y^2 = 4$ Перейти к заданию поверхности при помощи вектор-функции, изобразить криволинейные координаты на поверхности и пояснить их геометрический смысл.

5. Найти первую и вторую квадратичные формы этой поверхности.

6. Найти ее главные кривизны, гауссову и среднюю кривизну.

Расчетно-графические работы (РГР)

РГР. Линейное и евклидово пространство. Линейная зависимость и линейная независимость векторов, размерность, базис. Ковариантные и контрвариантные координаты вектора. Ортонормированный базис. Преобразование базисов и координат вектора. Их матричная запись. Тензоры и линейные формы, некоторые действия над ними. Элементы тензорной алгебры. Криволинейные координаты на плоскости и в пространстве. Тензоры в криволинейной системе координат и математические операции над ними. Косоугольные и ортогональные криволинейные системы координат в пространстве. Фундаментальный метрический тензор и действия над ним. Символы Кристоффеля и фундаментальный тензор. Операции над ковариантными и контрвариантными индексами тензоров. Ковариантное дифференцирование тензоров.

Образец РГР (6 семестр)

1. Определить линейное пространство и операции над его элементами.
2. Определить скалярные произведения и евклидово пространство.
3. Реперы (базисы) и координаты вектора. Линейные преобразования реперов и координат векторов.
4. Контрвариантные и ковариантные координаты вектора. Их преобразование при переходе к другому базису.
5. Тензоры и их валентности (ранги). Примеры тензоров.
6. Ковариантные и контрвариантные индексы тензоров.
7. Алгебраические операции над тензорами. Симметрирование и альтернирование.
8. Линейные и билинейные формы. Преобразования их коэффициентов.
9. Понятие сопряженного пространства.
10. Характеристические кривые и характеристические поверхности тензоров.
11. Операции с ковариантными и контрвариантными индексами тензоров.
12. Метрический Тензор. Поднятие и опускание индексов.
13. Символы Кристоффеля и вычисление их через метрический тензор.
14. Криволинейная система координат в пространстве и понятие тензора в ней. Особенности.
15. Тензорная алгебра в криволинейной системе координат.
16. Примеры умножения, свертывания, симметрирования, альтернирования тензоров в этой ситуации.
17. Поле тензора. Тензорные поля. Применение математического анализа.
18. Производная и дифференцирование тензора.
19. Ковариантное дифференцирование тензора.
20. Примеры тензоров деформации, напряжений, инерции и других.

Вариант

1. Образует ли линейное векторное пространство L_3 совокупность векторов $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$, со свойством:
а) (первый случай) $x^1 + x^2 + x^3 = 0$; б) (второй случай) $x^1 + x^2 + x^3 = 1$
2. При каком α векторы $\bar{a}(1, \alpha, 1), \bar{b}(1, 0, 2), \bar{c}(1, 0, \alpha)$ в R^3 не образует базис.
3. Определение скалярного произведения и евклидово пространство. Доказать, что в линейном векторном пространстве L_3 можно определить скалярное произведение двух векторов $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\bar{y} = (y^1, y^2, y^3)$ как $(\bar{x}, \bar{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$, опираясь на неравенство Коши - Буняковского и как вычислить угол между векторами.
4. Пусть дан ортонормированный репер (l_1, l_2, l_3) в R^3 с началом в $(0, 0, 0)$ и вектор $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Перейти к другому (новому) ортонормированному базису (l_{11}, l_{21}, l_{31}) с тем же началом. Получить формулу перехода от старого базиса к новому, а также формулу преобразования координат вектора \bar{x} , т.е. матрицу перехода от старых координат к новым. Сравнить формулы, сделать вывод.
5. Найти контрвариантные и ковариантные координаты вектора \bar{x} в L_2 , если базис: $\{l_1 - \text{направлен по оси } OX, l_2 - \text{ по биссектрисе первого координатного угла. } |l_1|=1, |l_2|=1, \bar{x} = l_1 + l_2 .$

6. Привести матрицу симметрического линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ к

диагональному виду.

7. Дана билинейная форма в \mathbb{R}^2 . Записать ее коэффициенты в виде таблицы. Как преобразуются они при переходе к другому базису и что образуют.

8. Сформулировать основную задачу тензорного исчисления. Дать определения тензоров валентности 0, 1, 2, 3 и привести примеры.

9. Найти характеристическую кривую симметричного тензора третьей валентности со следующими компонентами в \mathbb{R}^2 :

$$a_{111} = a_{222} = 0, \quad a_{112} = a_{122} = \frac{1}{3}.$$

10. Найти характеристическую поверхность симметрического тензора второй валентности в \mathbb{R}^3 . $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i)$

11. Криволинейная система координат в пространстве. Дать рисунок, изобразить локальный репер. Представить в общем виде формулы преобразования локального базиса при переходе от старого к новому и наоборот.

Рассмотреть сферическую систему координат и выполнить следующее:

- найти матрицу преобразования;
- построить локальный базис. дать рисунок;
- найти фундаментальный метрический тензор;
- вычислить параметр Ламе;
- найти символы Кристоффеля второго рода;
- найти градиент скалярного поля φ ;
- представить дивергенцию векторного поля \bar{a} ;
- найти ротор вектора \bar{a} .

12. Дано преобразование системы координат: $x^1 = \frac{rx}{x^2 + y^2}, y^1 = \frac{ry}{x^2 + y^2}$

Зная компоненты тензора в системе координат xu , найти их компоненты в системе $x^1 y^1$ ($x = x^1, y = x^2, x^1 = x^1, y^1 = x^2$): $a_{11} = x, a_1^2 = x + y, a_2^1 = x - y, a_2^2 = y$

13. Перемножить два тензора в заданном порядке $b_1^1 = x^2, b_1^2 = y, b_2^1 = x, b_2^2 = y^2, b_{21} = x, b_{22} = y, b_{12} = x - y, b_{11} = y - x$

14. Свернуть тензор по нижнему и первому верхнему индексу T_i^{jk} :

$$\begin{cases} T_1^{11} = x^1 + (x^2)^2, T_1^{12} = x^1 + x^2, T_1^{21} = x^1 x^2, T_1^{22} = 1 \\ T_2^{11} = x^2 + (x^1)^2, T_2^{12} = x^1 - x^2, T_2^{21} = \frac{x^1}{x^2}, T_2^{22} = 0 \end{cases}$$

15. Дан четырехвалентный тензор T_i^{jk} : $T_1^{111} = 1, T_1^{112} = x^1, T_1^{121} = x^2, T_1^{122} = x^4 x^2,$

$T_1^{211} = x^1 - x^2$, $T_1^{212} = 2$, $T_1^{221} = 0$, $T_1^{222} = 1$, $T_i^{jk} = 0$ и симметричный дважды ковариантный тензор: $a_{11} = 0$, $a_{12} = a_{21} = x^1 x^2$, $a_{22} = 1$. Опустить средний индекс у тензора T_a^{ijk} , умножив его справа на тензор a_{pj}

16. Найти ковариантную производную контрвариантного вектора в сферической системе координат.

17. Найти символы Кристоффеля первого рода в сферической системе координат.

Привести примеры тензоров напряжений, деформаций, инерции и других.

3.3.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о текущем контроле и промежуточной аттестации в ФГБОУ ВПО «МГСУ».

Промежуточная аттестация проводится в виде устного зачета с оценкой в 5 семестре и зачета в 6 семестре.

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины.

Вопросы базового уровня к зачету с оценкой (5 семестр).

1. Плоские кривые. Вектор-функции и математические операции над ними. Разложение в ряд Тейлора. Строение плоской кривой в окрестности любой ее точки (обыкновенные точки, особые, точки самопересечения, асимптоты, экстремумы).
2. Инвариантные элементы плоской кривой (касательная, нормаль, асимптоты, точки самопересечения и др.). График – изображение кривой в различных системах координат.
3. Порядок касания кривых. Кривизна плоской кривой, радиус кривизны, соприкасающаяся окружность. Эволюта и эвольвента.
4. Огибающие плоских кривых. Понятие о дискриминантной кривой. Привести примеры. Нарисовать.
5. Пространственные кривые. Их задание. Вектор-функция. Операции над вектор-функциями. Параметризация кривой. Натуральный параметр. Замена параметра. Продемонстрировать замену на примере. Инвариантные элементы кривой (касательная, единичный касательные вектор, нормальная плоскость и др.)
6. Сопровождающий трехгранник Ферне. Соприкасающаяся, нормальная, спрямляющая плоскости.
7. Формула Френе. Кривизна и кручение кривой. Их геометрическая интерпретация.
8. Трехгранник Френе и особенности движения его элементов при изменении параметра. Кинематическая интерпретация.
9. Плоская кривая в пространстве и ее формулы Френе. Условие плоскостности кривой в \mathbb{R}^3 . Теорема о задании и расположении такой кривой в пространстве.
10. Понятие соприкосновения кривых в пространстве. Соприкасающаяся окружность, радиус кривизны, центр кривизны. Эволюта и эвольвента.
11. Задание простого куска поверхности. Вектор-функция двух аргументов. Условия существования простого куска. Способы задания поверхности.
12. Криволинейные координаты на поверхности. Инвариантные образы и элементы, связанные с поверхностью (касательные векторы, касательная плоскость, нормаль и др.).
13. Первая квадратичная форма поверхности и ее коэффициенты. Что она позволяет вычислять?
14. Понятие внутренней геометрии поверхности и 1-ая квадратичная форма поверхности. Понятие о римановой геометрии.

15. Огибающая однопараметрического семейства поверхностей. Теорема, позволяющая находить огибающую. Пример.
16. Огибающая однопараметрического семейства плоскостей. Понятие развертывающихся поверхностей. Какие бывают развертывающиеся поверхности. Линейчатые поверхности. Пример.
17. Кривизна поверхности в данной точке в данном направлении. Вторая квадратичная форма поверхности и ее коэффициенты.
18. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Теорема о кривизне кривых, касающихся одного и того же направления в точке.
19. Главные направления на поверхности, главные кривизны поверхности.
20. Линии кривизны на поверхности и их свойства. Применения в теории оболочек.
21. Полная и средняя кривизны поверхности.
22. Формула Эйлера. Асимптотические направления на поверхности, их свойства. Асимптотические линии на поверхности. Их связь с линиями кривизны.
23. Формула Эйлера и классификация точек на поверхности.
24. Геодезическая кривизна линий на поверхности и геодезические линии на поверхности.
25. Геодезические линии как кратчайшие и прямейшие на поверхности (локально).
26. Поверхности вращения, переноса, развертывающиеся, линейчатые, минимальные и др.
27. Поверхности применяемые в строительстве в виде оболочек.

Примечания:

- 1) При изложении теоретических вопросов необходимо делать четкие рисунки с обозначениями.
- 2) В процессе изложения теоретического материала или в его конце необходимо приводить примеры и изображения нужных элементов.

Вопросы базового уровня к зачету (6 семестр).

1. Элементы линейной алгебры и линейное векторное пространство. Линейная зависимость и независимость векторов в нем. Его размерность, базис, подпространства.
2. Преобразование базисов. Евклидово пространство. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Матрица перехода.
3. Ковариантные и ковариантные координаты вектора. Их преобразования.
4. Понятие криволинейных координат и локального базиса. Вектор в такой системе. Понятие о производной вектора и понятие о ковариантной производной вектора.
5. Определение вектора. Основная задача тензорного исчисления. Валентность (ранг) тензора. Примеры тензора.
6. Операции над тензорами. Тензорная алгебра. Примеры.
7. Тензоры в трехмерном евклидовом пространстве R^3 .
8. Симметричные и кососимметричные тензоры. Получение инвариантов при помощи тензорных операций.
9. Разложение тензора на симметричный и кососимметричный тензор.
10. Криволинейная система координат в пространстве и преобразование локальных реперов. Матрица преобразования. Обратная матрица.
11. Тензор в криволинейной системе координат, его ранг. Операции с такими тензорами.
12. Тензорное поле и основные понятия тензорного анализа.
13. Тензорные функции и их свойства.
14. Тензор поля. Дифференцирование тензора. Дифференцирование тензорного поля.

15. Бесконечно малая деформация непрерывной среды в окрестности точки.
 16. Понятие тензора деформации.
 17. Тензор напряжений.
 18. Связь между тензорами деформаций и напряжений.
 19. Тензор инерции.
 20. Приведение тензора к главным осям.
 21. Скалярные и векторные поля в криволинейной системе координат.
 22. Градиент скалярного поля (в криволинейной системе).
 23. Поток векторного поля через поверхность.
 24. Дивергенция векторного поля в криволинейной системе координат.
 25. Ротор вектора. Его тензорная запись.
 26. Теорема Остроградского – Гаусса в тензорном изложении.
 27. Обзор других физических приложений тензорного исчисления: в уравнениях математической физики, гидравлики, кристаллографии и др.
 28. Понятие риманова пространства. Понятие элементарного многообразия. Примеры.
 29. Фундаментальный метрический тензор в римановом пространстве и алгебраические операции с ним и с его производными формами.
 30. Вычисление символов Кристоффеля второго и первого рода через фундаментальный метрический тензор.
 31. Ковариантное дифференцирование тензора, заданного в криволинейных координатах в римановом пространстве.
 32. Опускание и поднимание индексов у тензоров при помощи метрического тензора.
 33. Формулы Френе в римановом пространстве.
 34. Геодезические линии в римановом пространстве и их свойства.
 35. Понятие о пространствах аффинной связности и параллельное перенесение.
- Тензор кривизны и его физический смысл.

3.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура промежуточной аттестации проходит в соответствии с Положением о текущем контроле и промежуточной аттестации обучающихся.

- Аттестационные испытания проводятся преподавателем (или комиссией преподавателей – в случае модульной дисциплины), ведущим лекционные занятия по данной дисциплине, или преподавателями, ведущими практические и лабораторные занятия (кроме устного экзамена). Присутствие посторонних лиц в ходе проведения аттестационных испытаний без разрешения ректора или проректора не допускается (за исключением работников университета, выполняющих контролирующие функции в соответствии со своими должностными обязанностями). В случае отсутствия ведущего преподавателя аттестационные испытания проводятся преподавателем, назначенным письменным распоряжением по кафедре (структурному подразделению).
- Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, имеющие нарушения опорно-двигательного аппарата, допускаются на аттестационные испытания в сопровождении ассистентов-сопровождающих.
- Во время аттестационных испытаний обучающиеся могут пользоваться программой учебной дисциплины, а также с разрешения преподавателя справочной и нормативной литературой, калькуляторами.

- Время подготовки ответа при сдаче зачета/экзамена в устной форме должно составлять не менее 40 минут (по желанию обучающегося ответ может быть досрочным). Время ответа – не более 15 минут.
- При подготовке к устному экзамену экзаменуемый, как правило, ведет записи в листе устного ответа, который затем (по окончании экзамена) сдается экзаменатору.
- При проведении устного экзамена экзаменационный билет выбирает сам экзаменуемый в случайном порядке.
- Экзаменатору предоставляется право задавать обучающимся дополнительные вопросы в рамках программы дисциплины текущего семестра, а также, помимо теоретических вопросов, давать задачи, которые изучались на практических занятиях.
- Оценка результатов устного аттестационного испытания объявляется обучающимся в день его проведения. При проведении письменных аттестационных испытаний или компьютерного тестирования – в день их проведения или не позднее следующего рабочего дня после их проведения.
- Результаты выполнения аттестационных испытаний, проводимых в письменной форме, форме итоговой контрольной работы или компьютерного тестирования, должны быть объявлены обучающимся и выставлены в зачётные книжки не позднее следующего рабочего дня после их проведения.

Порядок подготовки и проведения промежуточной аттестации в форме экзамена/зачёта

Действие	Сроки	Методика	Ответственный
Выдача вопросов к промежуточной аттестации	1 неделя семестра	На лекциях, по интернет и др.	Ведущий преподаватель
Консультации	Последняя неделя семестра, в сессию	На групповой консультации	Ведущий преподаватель
Промежуточная аттестация	В сессию	Письменно, тестирование, устно и др., по билетам, с выдачей задач к билетам	Ведущий преподаватель, комиссия
Формирование оценки	На аттестации	В соответствии с критериями	Ведущий преподаватель, комиссия

4. Фонд оценочных средств для мероприятий текущего контроля обучающихся по дисциплине (модулю)

4.1. Состав фонда оценочных средств для мероприятий текущего контроля

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости включает в себя:

- материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Контрольные работы (КР)

КР «Плоские и пространственные кривые. Их особенности и инварианты. Поверхности в пространстве. Криволинейные координаты. Внутренняя геометрия поверхности. Кривизны поверхности».

Образец КР (5 семестр)

1. Найти особые точки кривой L: $\overline{M}(t) = \overline{N}\left(t - \frac{1}{t}, t^2 - \frac{1}{t}\right)$

Установить их характер. Изобразить L в окрестности точки.

2. Найти огибающую семейства кривых: $(x - c)^2 + (y - c)^2 = 9$.

3. Вычислить кривизну и кручение кривой L:
$$\begin{cases} x = R \cos \\ y = R \sin \\ z = at \end{cases}$$
 в точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Изобразить поверхность $x^2 + y^2 = 4$ Перейти к заданию поверхности при помощи вектор-функции, изобразить криволинейные координаты на поверхности и пояснить их геометрический смысл.

5. Найти первую и вторую квадратичные формы этой поверхности.

6. Найти ее главные кривизны, гауссову и среднюю кривизну.

Расчетно-графические работы (РГР)

РГР. Линейное и евклидово пространство. Линейная зависимость и линейная независимость векторов, размерность, базис. Ковариантные и контрвариантные координаты вектора. Ортонормированный базис. Преобразование базисов и координат вектора. Их матричная запись. Тензоры и линейные формы, некоторые действия над ними. Элементы тензорной алгебры. Криволинейные координаты на плоскости и в пространстве. Тензоры в криволинейной системе координат и математические операции над ними. Косоугольные и ортогональные криволинейные системы координат в пространстве. Фундаментальный метрический тензор и действия над ним. Символы Кристоффеля и фундаментальный тензор. Операции над ковариантными и контрвариантными индексами тензоров. Ковариантное дифференцирование тензоров.

Образец РГР (6 семестр)

1. Определить линейное пространство и операции над его элементами.
 2. Определить скалярные произведения и евклидово пространство.
 3. Реперы (базисы) и координаты вектора. Линейные преобразования реперов и координат векторов.
 4. Контрвариантные и ковариантные координаты вектора. Их преобразование при переходе к другому базису.
 5. Тензоры и их валентности (ранги). Примеры тензоров.
 6. Ковариантные и контрвариантные индексы тензоров.
 7. Алгебраические операции над тензорами. Симметрирование и альтернирование.
 8. Линейные и билинейные формы. Преобразования их коэффициентов.
 9. Понятие сопряженного пространства.
 10. Характеристические кривые и характеристические поверхности тензоров.
 11. Операции с ковариантными и контрвариантными индексами тензоров.
 12. Метрический Тензор. Поднятие и опускание индексов.
 13. Символы Кристоффеля и вычисление их через метрический тензор.
 14. Криволинейная система координат в пространстве и понятие тензора в ней.
- Особенности.
15. Тензорная алгебра в криволинейной системе координат.
 16. Примеры умножения, свертывания, симметрирования, альтернирования тензоров в этой ситуации.
 17. Поле тензора. Тензорные поля. Применение математического анализа.
 18. Производная и дифференцирование тензора.
 19. Ковариантное дифференцирование тензора.

20. Примеры тензоров деформации, напряжений, инерции и других.

Вариант

1. Образуется ли линейное векторное пространство L_3 совокупность векторов $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$, со свойством:

а) (первый случай) $x^1 + x^2 + x^3 = 0$; б) (второй случай) $x^1 + x^2 + x^3 = 1$

2. При каком α векторы $\bar{a}(1, \alpha, 1), \bar{b}(1, 0, 2), \bar{c}(1, 0, \alpha)$ в R^3 не образует базис.

3. Определение скалярного произведения и евклидово пространство. Доказать, что в линейном векторном пространстве L_3 можно определить скалярное произведение двух векторов $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\bar{y} = (y^1, y^2, y^3)$ как $(\bar{x}, \bar{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$, опираясь на неравенство Коши - Буняковского и как вычислить угол между векторами.

4. Пусть дан ортонормированный репер (l_1, l_2, l_3) в R^3 с началом в $(0, 0, 0)$ и вектор $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Перейти к другому (новому) ортонормированному базису (l_{11}, l_{21}, l_{31}) с тем же началом. Получить формулу перехода от старого базиса к новому, а также формулу преобразования координат вектора \bar{x} , т.е. матрицу перехода от старых координат к новым. Сравнить формулы, сделать вывод.

5. Найти контрвариантные и ковариантные координаты вектора \bar{x} в L_2 , если базис: $\{l_1 - \text{направлен по оси } OX, l_2 - \text{ по биссектрисе первого координатного угла. } |l_1|=1, |l_2|=1, \bar{x} = l_1 + l_2.$

6. Привести матрицу симметрического линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ к

диагональному виду.

7. Дана билинейная форма в R^2 . Записать ее коэффициенты в виде таблицы. Как преобразуются они при переходе к другому базису и что образуют.

8. Сформулировать основную задачу тензорного исчисления. Дать определения тензоров валентности 0, 1, 2, 3 и привести примеры.

9. Найти характеристическую кривую симметричного тензора третьей валентности со следующими компонентами в R^2 :

$$a_{111} = a_{222} = 0, a_{112} = a_{122} = \frac{1}{3}.$$

10. Найти характеристическую поверхность симметрического тензора второй валентности в R^3 . $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i)$

11. Криволинейная система координат в пространстве. Дать рисунок, изобразить локальный репер. Представить в общем виде формулы преобразования локального базиса при переходе от старого к новому и наоборот.

Рассмотреть сферическую систему координат и выполнить следующее:

а) найти матрицу преобразования;

б) построить локальный базис. дать рисунок;

- в) найти фундаментальный метрический тензор;
- г) вычислить параметр Ламе;
- д) найти символы Кристоффеля второго рода;
- е) найти градиент скалярного поля φ ;
- ж) представить дивергенцию векторного поля \vec{a} ;
- з) найти ротор вектора \vec{a} .

12. Дано преобразование системы координат: $x^1 = \frac{rx}{x^2 + y^2}, y^1 = \frac{ry}{x^2 + y^2}$

Зная компоненты тензора в системе координат x, y , найти их компоненты в системе x^1, y^1 ($x = x^1, y = x^2, x^1 = x^1, y^1 = x^2$): $a_{11} = x, a_1^2 = x + y, a_2^1 = x - y, a_2^2 = y$

13. Перемножить два тензора в заданном порядке $b_1^1 = x^2, b_1^2 = y, b_2^1 = x, b_2^2 = y^2, b_{21} = x, b_{22} = y, b_{12} = x - y, b_{11} = y - x$

14. Свернуть тензор по нижнему и первому верхнему индексу T_i^{jk} :

$$\begin{cases} T_1^{11} = x^1 + (x^2)^2, T_1^{12} = x^1 + x^2, T_1^{21} = x^1 x^2, T_1^{22} = 1 \\ T_2^{11} = x^2 + (x^1)^2, T_2^{12} = x^1 - x^2, T_2^{21} = \frac{x^1}{x^2}, T_2^{22} = 0 \end{cases}$$

15. Дан четырехвалентный тензор T_i^{jk} : $T_1^{111} = 1, T_1^{112} = x^1, T_1^{121} = x^2, T_1^{122} = x^4 x^2, T_1^{211} = x^1 - x^2, T_1^{212} = 2, T_1^{221} = 0, T_1^{222} = 1, T_i^{jk} = 0$ и симметричный дважды ковариантный тензор: $a_{11} = 0, a_{12} = a_{21} = x^1 x^2, a_{22} = 1$. Опустить средний индекс у тензора T_a^{ijk} , умножив его справа на тензор a_{pj}

16. Найти ковариантную производную контрвариантного вектора в сферической системе координат.

17. Найти символы Кристоффеля первого рода в сферической системе координат.

- Привести примеры тензоров напряжений, деформаций, инерции и других.
 - перечень компетенций и их элементов, проверяемых на каждом мероприятии текущего контроля успеваемости;
 - систему и критерии оценивания по каждому виду текущего контроля успеваемости
 - описание процедуры оценивания.

4.2. Система и критерии оценивания по каждому виду текущего контроля успеваемости

Для оценивания выполнения контрольных работ, домашних заданий и расчётно-графических работ возможно использовать следующие критерии оценивания:

Оценка	Характеристики действий обучающегося
Отлично	Обучающийся самостоятельно и правильно решил учебно-профессиональную задачу, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагал свое решение, используя профессиональные понятия.

Хорошо	Обучающийся самостоятельно и в основном правильно решил учебно-профессиональную задачу, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагал свое решение, используя профессиональные понятия.
Удовлетворительно	Обучающийся в основном решил учебно-профессиональную задачу, допустил несущественные ошибки, слабо аргументировал свое решение, используя в основном профессиональные понятия.
Неудовлетворительно	Обучающийся не решил учебно-профессиональную задачу.

4.3. Процедура оценивания при проведении текущего контроля успеваемости

1 семестр

Действие	Сроки	Методика	Ответственный
Выдача КР	15 неделя семестра	На практическом занятии по вариантам	Ведущий преподаватель
Консультации по КР	14 неделя семестра	На практических занятиях	Ведущий преподаватель
Проверка КР	16 неделя семестра	Вне занятий	Ведущий преподаватель
Формирование оценки	Во время проверки	В соответствии со шкалой и критериями оценивая	Ведущий преподаватель
Объявление результатов оценки КР	17 неделя семестра	На практическом занятии	Ведущий преподаватель

6 семестр

Действие	Сроки	Методика	Ответственный
Выдача РГР	10 неделя семестра	На практическом занятии по вариантам	Ведущий преподаватель
Выполнение задания	10-13 неделя семестра	Выполнение задания дома или в учебном классе	Обучающийся
Сдача задания	13 неделя семестра		Обучающийся лично
Проверка задания	14 неделя семестра	Вне занятий	Ведущий преподаватель
Защита	15 неделя семестра	Зпрос	Ведущий преподаватель
Формирование оценки	На защите	В соответствии со шкалой и критериями оценивая	Ведущий преподаватель
Объявление результатов оценки выполненного задания	15 неделя семестра	На защите, на практическом занятии	Ведущий преподаватель

Перечень приложений:

Методические материалы для проведения промежуточной аттестации и текущего контроля успеваемости

номер приложения	Наименование документов приложения
1	Билеты для зачета
2	Бланк для оценки ответа обучающегося экзаменатором
3	Варианты заданий для контрольных работ

Приложение 1

Хранится в отдельном файле

Приложение 3

Хранится в отдельном файле

Приложение 2

Примерный бланк для оценки ответа обучающегося экзаменатором

Критерии оценки				
	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Уровень усвоения материала, предусмотренного программой				
Умение выполнять задания, предусмотренные программой				
Уровень знакомства с дополнительной литературой				
Уровень раскрытия причинно-следственных связей				
Уровень раскрытия междисциплинарных связей				
Стиль поведения (культура речи, манера общения, убежденность, готовность к дискуссии)				
Качество ответа (полнота, правильность, аргументированность, его общая композиция, логичность)				
Общая оценка				