КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# Производная функции одной переменной

Методические указания и варианты заданий для самостоятельной работы студентов I курса, обучающихся по программе бакалавриата

**Москва 2013**

УДК 512.91 (07)
ББК 22.143я73
Т 45

**Ассеева Е.Е., Ворожейкина О.М., Гусакова Т.А.,**
**Петелина В.Д.,Фриштер Л.Ю.**

Производная функции одной переменной. Методические указания / «Моск. гос. строит. ун-т». – Москва: МГСУ, 2013. – с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 270800 «Строительство» и студентов, обучающихся по специальности 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений

**Приращением функции** $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется разность значений функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, если аргументу в точке $x_0$ дано приращение $\Delta x$.

**Производной функции** $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

**Таблица производных функций**

1. $(C)' = 0,\ \ C = const;$
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R,\ \ (x)' = 1, \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}},\ \ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
3. $(a^x)' = a^x \ln a\ \ (\,a > 0, a \neq 1\,),\ \ (e^x)' = e^x;$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ \ (\,a > 0, a \neq 1\,),\ \ (\ln \mathrm{x})' = \frac{1}{x};$
5. $(\sin x)' = \cos x\,;$
6. $(\cos x)' = -\sin x\,;$
7. $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
8. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ \ |x| < 1;$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ \ |x| < 1;$
11. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2};$
12. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2};$
13. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x\,;$
14. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x\,;$
15. $(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x};$
16. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2\, x}.$

## Правила дифференцирования

1. $\big(U(x) \pm V(x)\big)' = U'(x) \pm V'(x);$
2. $\big(U(x) \cdot V(x)\big)' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x);$

   *Частный случай*: $\big(CU(x)\big)' = CU'(x), C = const;$
3. $\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)' = \dfrac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}\ \ (V(x) \neq 0);$
4. *Сложная функция*

   $y = f(u);\ u = u(x);\ y'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = f'_u \cdot u'_x;$
5. *Параметрически заданная функция*

   $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} => \ y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{y'_t}{x'_t}\ \ (x'_t \neq 0);$
6. *Обратная функция*

   $x = x(y) => x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)} = \dfrac{1}{y'_x}\ (y'(x) \neq 0).$

## Геометрический смысл производной функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке с абсциссой $\boldsymbol{x_0}$

Значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$$

(рис. 1, рис. 2 а - г).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

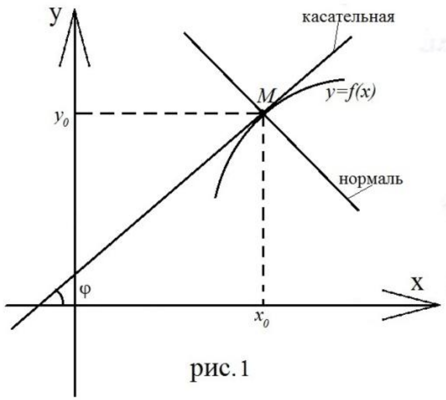

рис.1

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

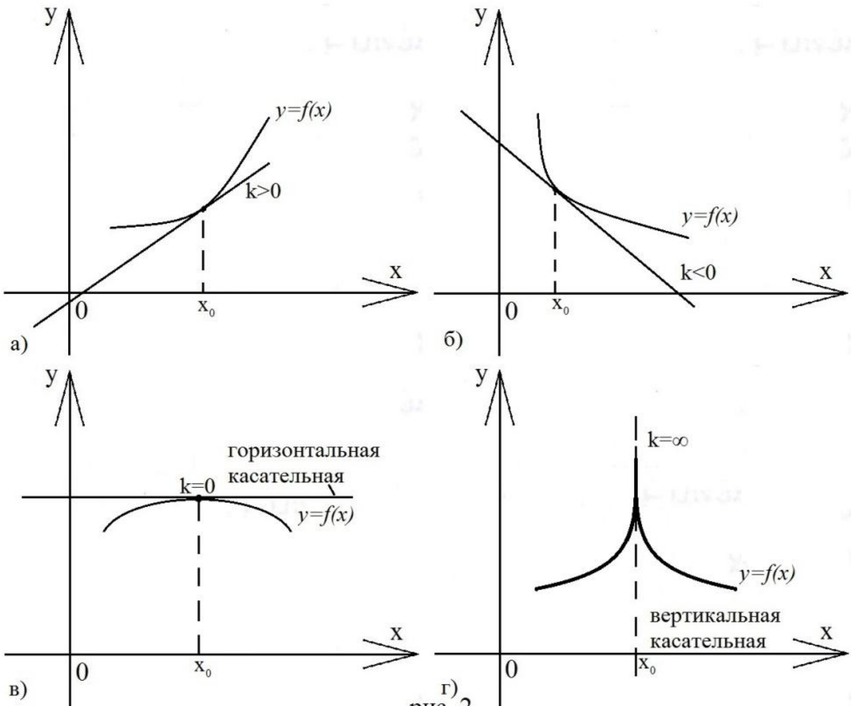

рис. 2

Механический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$ определяет скорость изменения данной функции в точке $x_0$. Пусть $S = S(t)$ – расстояние, которое проходит тело при прямолинейном движении за время t. Скорость прямолинейного движения в момент времени t:

$$v(t) = s'(t).$$

**Таблица производных сложных функций $y = f(u), u = u(x)$**

1. $\left(\left(u(x)\right)^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot \left(u(x)\right)^{\alpha-1} \cdot u'(x), \alpha \in R;$
2. $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x);$
3. $\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x);$
4. $(\log_a u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)\ln a} \quad (a > 0; a \neq 1);$
5. $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)};$

6. $(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$;
7. $(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$;
8. $(\operatorname{tg} u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$;
9. $(\operatorname{ctg} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$;
10. $(\arcsin u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$;
11. $(\arccos u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$;
12. $(\operatorname{arctg} u(x))' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$;
13. $(\operatorname{arcctg} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$;
14. $(\operatorname{sh} u(x))' = \operatorname{ch} u(x) \cdot u'(x)$;
15. $(\operatorname{ch} u(x))' = \operatorname{sh} u(x) \cdot u'(x)$;
16. $(\operatorname{th} u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\operatorname{ch}^2 u(x)}$;
17. $(\operatorname{cth} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\operatorname{sh}^2 u(x)}$.

## Дифференциал функции $\boldsymbol{y = f(x)}$

Дифференцируемой функцией $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется функция, для которой приращение функции имеет вид:
$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$,
где A – постоянная,
$o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с $\Delta x$.

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно $\Delta x$ часть приращения функции $\mathrm{d}y = A \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ равен производной функции $f'(x_0)$, умноженной на дифференциал независимой переменной x.

$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x, \ \Delta x = \mathrm{d}x$.

Дифференциал функции в произвольной точке $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

## Геометрический смысл дифференциала функции $y = f(x)$.

Дифференциал $\mathrm{d}y$ функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ равен приращению ординаты точки касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$, если аргументу дано приращение $\Delta x$ (рис 3).

$\mathrm{d}y = PM,\ \ \Delta y = PN,$

$\Delta y$ – приращение функции.

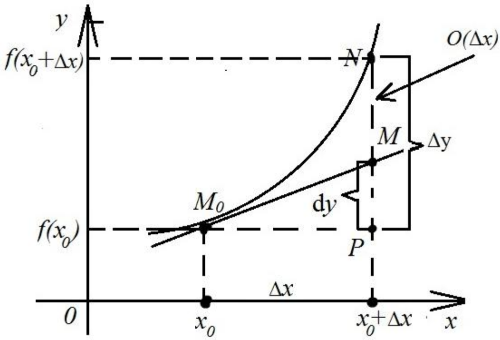

рис. 3

## Дифференциалы основных элементарных функций

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\mathrm{dC} = 0 \quad (\mathrm{C} = \mathrm{const});$ | $\mathrm{d}u = u'(x) \cdot \mathrm{d}x;$ |
| 2. | $\mathrm{d}(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \mathrm{d}x;$ | $\mathrm{d}\Big(\big(u(x)\big)^\alpha\Big) = \alpha \cdot u(x)^{\alpha-1} \cdot \mathrm{d}u, \alpha \in R;$ |
| 3. | $\mathrm{d}(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot \mathrm{d}x;$ | $\mathrm{d}\big(a^{u(x)}\big) = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot \mathrm{d}u;$ |
| 4. | $\mathrm{d}(e^x) = e^x \mathrm{d}x;$ | $\mathrm{d}\big(e^{u(x)}\big) = e^{u(x)} \mathrm{d}u;$ |
| 5. | $\mathrm{d}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a} \mathrm{d}x;$ | $\mathrm{d}(\log_a u(x)) = \dfrac{1}{u(x) \ln a} \mathrm{d}u, ;$ |
| 6. | $\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{x};$ | $\mathrm{d}(\ln u(x)) = \dfrac{\mathrm{d}u}{u(x)};$ |
| 7. | $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x \, \mathrm{d}x;$ | $\mathrm{d}(\sin u(x)) = \cos u(x) \, \mathrm{d}u;$ |
| 8. | $\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x \, \mathrm{d}x;$ | $\mathrm{d}(\cos u(x)) = -\sin u(x) \, \mathrm{d}u;$ |
| 9. | $\mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x};$ | $\mathrm{d}(\operatorname{tg} u(x)) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u(x)};$ |
| 10. | $\mathrm{d}(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x};$ | $\mathrm{d}(\operatorname{ctg} u(x)) = -\dfrac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u(x)};$ |
| 11. | $\mathrm{d}(\arcsin x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}};$ | $\mathrm{d}(\arcsin u(x)) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2(x)}};$ |
| 12. | $\mathrm{d}(\arccos x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}};$ | $\mathrm{d}(\arccos u(x)) = -\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}(x)};$ |
| 13. | $\mathrm{d}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2};$ | $\mathrm{d}(\operatorname{arctg} u(x)) = \dfrac{\mathrm{d}u}{1 + u^2(x)};$ |

14. $\mathrm{d}(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; $\quad \mathrm{d}(\operatorname{arcctg} u(x)) = -\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2(x)}$;
15. $\mathrm{d}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$; $\quad \mathrm{d}(\operatorname{sh} u(x)) = \operatorname{ch} u(x)\,\mathrm{d}u$;
16. $\mathrm{d}(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x$; $\quad \mathrm{d}(\operatorname{ch} u(x)) = \operatorname{sh} u(x)\,\mathrm{d}u$;
17. $\mathrm{d}(\operatorname{th} x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x}$; $\quad \mathrm{d}(\operatorname{th} u(x)) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch}^2 u(x)}$;
18. $\mathrm{d}(\operatorname{cth} x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x}$; $\quad \mathrm{d}(\operatorname{cth} u(x)) = -\dfrac{\mathrm{d}u}{\operatorname{sh}^2 u(x)}$.

## Свойства дифференциалов

1. $\mathrm{d}\big(u(x) \pm v(x)\big) = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x) = \big(u'(x) \pm v'(x)\big)\mathrm{d}x$;
2. $\mathrm{d}\big(u(x) \cdot v(x)\big) = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x) =$
   $= \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\mathrm{d}x$;
   Частный случай:
   $\mathrm{d}\big(C \cdot u(x)\big) = C\mathrm{d}u(x)$;
3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x) - u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}, \;\; v(x) \neq 0$
4. Дифференциал сложной функции
   $y = f(u), u = u(x) => \mathrm{d}(y) = f'(u)\mathrm{d}u = f'(u) \cdot u'(x)\mathrm{d}x$;

Дифференциал функции $y = f(x)$ сохраняет одну и ту же форму независимо от того, является ли аргумент $u$ независимой переменной или функцией от другой независимой переменной (свойство инвариантности).

## Производные высших порядков функции $\boldsymbol{y = f(x)}$

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, которая является дифференцируемой функцией. Производную от $f'(x)$ называют производной второго порядка функции $f(x)$:

$$y''(x) = \big(f'(x)\big)' = f''(x).$$

Аналогично вводятся производные третьего и последующих порядков:

$$y'''(x) = \big(f''(x)\big)' = f'''(x), \dots,$$

$$y^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x).$$

Рассмотрим наиболее типичные примеры из варианта расчётно-графической работы.

1. Вычислить значение производной функции в указанной точке.

1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+3}),\ x_0 = 1.$

Решение:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+3}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}\right) =$$
$$= \frac{x+\sqrt{x^2+3}}{(x+\sqrt{x^2+3})\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}},$$
$$y'(1) = \frac{1}{2}.$$

2) $e^y - \cos(x + y^2) = 0,\ M(\frac{\pi}{2};0).$

Решение.

Продифференцируем уравнение

$e^y y' + \sin(x+y^2)(1+2yy') = 0,$

подставим $x = \frac{\pi}{2},\ y = 0$

$y' + \sin\frac{\pi}{2} = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\ .$

3) $\begin{cases} x = sin^3 t \\ y = cos^3 t \end{cases},\ t_0 = \frac{3\pi}{4}.$

Решение.

$y'(t) = -3cos^2t \cdot sint\ ,\ x'(t) = 3sin^2t \cdot cost\ ,$

$$y'(x) = \frac{-3cos^2t \cdot sint}{3sin^2t \cdot cost} = -ctgt\ ,$$
$$y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

2. Найти производную показательно – степенной функции $y = (\sin x)^{\text{tg}x}$ .

Решение (метод логарифмического дифференцирования).

Прологарифмируем равенство:

$lny = tgx \cdot \ln(sinx),$

полученное равенство дифференцируем, учитывая, что $y = y(x)$:

$$(lny)' = (tgx \cdot \ln(sinx))',$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{cos^2x}\ln(sinx) + tgx\frac{cosx}{sinx},$$
$$y' = (sinx)^{tgx}\left(\frac{1}{cos^2x}\ln(sinx) + 1\right).$$

3. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции

$y = e^{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 4$ .

Решение.

Уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_o)(x - x_0)$ ,
уравнение нормали $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.
Находим $y_0 = e^{\sqrt{4}} = e^2$ , $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ , $f'(4) = \frac{1}{4}e^2$, подставляем найденные значения в уравнения.
Уравнение касательной $y - e^2 = \frac{e^2}{4}(x - 4)$ ,
уравнение нормали $y - e^2 = -\frac{4}{e^2}(x - 4)$ .

4. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = lnx$ , если известно, что касательная параллельна прямой $2x - 2y - 5 = 0$ .

Решение.
Найдём угловой коэффициент заданной прямой $k = 1$ . Касательная параллельна прямой, следовательно $f'(x_0) = 1$ . Это равенство позволяет найти $x_0$ :

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{x} = 1, \qquad x_0 = 1, y_0 = ln1 = 0.$$

Составляем уравнение касательной $y = x - 1$ и
уравнение нормали $y = -(x - 1)$ .

5. Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции:

$y = \dfrac{1}{2 - x}$ в точке $x_0 = 1$ .

Решение.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{2 - x - \Delta x} - \frac{1}{2 - x}\right)\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2 - x - 2 + x + \Delta x}{(2 - x - \Delta x)(2 - x)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{(2 - x)^2}, \qquad y'(1) = 1.$$

**Вариант 1**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = 2\sqrt{x} - \frac{3x^5}{5} + \frac{2}{3x^6} - \frac{\pi}{2}$ ;

1.2 $y = (3x^2 - x + 2) \cdot e^x$;

1.3 $y = 2^x \cdot \cos x$ ;

1.4 $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$ ;

1.5 $y = \cos^2 x \cdot e^{-\operatorname{tg} x}$;

1.6 $y = \frac{2\cos x - 3}{\sin x + 4}$;

1.7 $y = \frac{\sin 2x + 1}{x^2}$;

1.8 $y = \frac{x^3 - 4}{\ln x}$;

1.9 $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 2x - 5}$ ;

1.10 $y = (e^{4x} + 3^{2x} + \ln 2x)^3$;

1.11 $y = \frac{1}{2} \cdot \lg^4 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$;

1.12 $y = 2\sqrt{1 - 4x^2} \cdot \arccos 2x$ ;

1.13 $y = \frac{2 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{ctg} x}$;

1.14 $y = \operatorname{arctg}^2 3x \cdot (1 + 9x^2)$;

1.15 $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \ln(1 + \operatorname{ctg} t); \end{cases}$

1.16 $e^y + xy = ex$

1.17 $y = (1 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ;

2.2 $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + y - 1$, $x_0 = 0$;

2.3 $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 + 1, \end{cases}$ $t_0 = 1$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \sin x \cdot \cos x$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Сделать чертёж.

Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = \frac{\pi}{6}$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} 2t^2\,, \ \ t \in [0\,;1]\,, \\ 6-(t-3)^2\,, t \in (1\,;3]\,, \\ 6\,, \ \ t \in (3\,;\ 6]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 2$ сек , $t_2 = 5$ сек ;
3) среднюю скорость за первые 2 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \ln\left(2^x + \sqrt{2^x + 1}\right)$;

6.2 $y = \cos^3\frac{x}{3}$;

6.3 $y = 2\,\mathrm{arcctg}\sqrt{5x}$.

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}\,,\ x_0 = 2.$$

8*. Написать уравнение касательной и нормали к кривой: $y = \mathrm{tg}\,x,\ x\epsilon(0;\frac{\pi}{2})$, зная, что касательная параллельна прямой $4x - y = 1$.

9. Теорема Ферма (формулировка, геометрический смысл).

10. Вывести формулу производной функции $y = \arcsin x$.

**Вариант 2**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = 3\sqrt[3]{x} + \frac{x^4}{4} - \frac{e\sqrt{x}}{x^3} - \frac{e}{2}$;

1.2 $y = (2x^2 - 4x) \cdot 4^x$;

1.3 $y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$;

1.4 $y = \frac{1}{4}(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)$;

1.5 $y = (3x - 4)\sin x + 3(1 + x^2)\cos x$;

1.6 $y = \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$;

1.7 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$;

1.8 $y = \operatorname{arctg} 3x - \frac{x}{3x + 1}$;

1.9 $y = \sin 3x - \frac{cos^3 3x}{3}$;

1.10 $y = \sqrt[5]{\operatorname{tg} 5x}$;

1.11 $y = 2^{-x} \cdot \cos 2^x$;

1.12 $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{1 + 2x}$;

1.13 $y = e^{\sqrt{1+x}} \cdot \sqrt{1 + x}$;

1.14 $y = \frac{1}{3}\lg(x^6 + 2)$;

1.15 $\begin{cases} x = 2\cos 2t, \\ y = \sin t; \end{cases}$

1.16 $\operatorname{tg} y = (x^2 + 1)y$;

1.17 $y = (1 + x^4)^{\frac{1}{x}}$.

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \ln^2(x^2 + 1), x_0 = 1$;

2.2 $2xy - 5\pi y + 12 = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$;

2.3 $\begin{cases} x = (2t + 3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}, \quad t_0 = 1.$

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x}$ в точке $M(1; 1)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 4$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(\mathrm{t}) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t^3, & t \in [0\,;1], \\ \frac{1}{12}, & t \in (1\,;3], \\ \frac{1}{12} + (t-3)^2, & t \in (3\,;\,5], \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 2$ сек , $t_2 = 5$ сек ;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [2; 4]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

6.2 $y = \sqrt{\mathrm{tg}^2\,x + 1}$ ;

6.3 $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^x + 1}\right)$.

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = \sqrt[3]{x+1}\,, x_0 = 0.$

8*. Написать уравнение нормали к кривой:
$\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} - 3\mathrm{y}^2 - 12\mathrm{y} - 14 = 0$, зная, что эта нормаль параллельна прямой $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1$.

9. Теорема Ролля (формулировка, геометрический смысл).

10. Вывести формулу производной функции $y = \ln x$, используя определение производной функции.

**Вариант 3**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = 2\sqrt[3]{x^4} + \frac{x^2-3}{2} - \frac{1}{x^3} - \frac{e}{5}$ ;

1.2 $y = (2x^2 - 4x) \cdot lnx;$

1.3 $y = e^x \cdot \sin x$ ;

1.4 $y = \arccos x - 2\sqrt{x}$ ;

1.5 $y = \operatorname{arctg} x - 2\operatorname{tg} x + \pi$ ;

1.6 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

1.7 $y = \frac{1+2x}{\cos x}$ ;

1.8 $y = \frac{\sqrt{x^3}}{\ln 4} + \frac{(\sqrt{2})^x}{2}$ ;

1.9 $y = \sqrt{\ln(x+2)} + \frac{1}{2x-1}$ ;

1.10 $y = \sqrt[3]{\sin 4x}$ ;

1.11 $y = (1+x)^4 \cdot e^{1-x}$ ;

1.12 $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$ ;

1.13 $y = \frac{\cos^2 x}{1+tgx}$ ;

1.14 $y = \arcsin^2 \frac{1}{x}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 ; \end{cases}$

1.16 $e^{yx} = x + y^3$ ;

1.17 $y = (1+\sqrt{x})^{2\sqrt{x}}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \sqrt{\pi \operatorname{arctg} x}$ , $x_0 = 1$ ;

2.2 $e^{xy} = x + y,\ \ x_0 = 0$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$ , $t_0 = 1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(2x+1)$ в точке $M(0;\ 0)$. Сделать чертёж. Определить

по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 5$ , ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} 2t^2, \ t \in [0\,;1]\,, \\ 6-(t-3)^2\,, t \in (1\,;3]\,, \\ 6\,, \ t \in (3\,;\,6]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 2$ сек , $t_2 = 5$ сек ;
3) среднюю скорость за первые 2 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$ ;

6.2 $y = \ln^2(1-e^x)$ ;

6.3 $y = \sin^2\dfrac{x}{2}$.

7*. Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1}, x_0 = 2\,.$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $y^2 - 2y = 4x + 73$, зная, что эта касательная параллельна прямой $2x - y + 1 = 0$.

9. Теорема Лагранжа (формулировка, геометрический смысл).

10. Вывести формулу производной функции $y = e^x$, используя определение производной функции.

**Вариант 4**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = 2\sqrt[4]{x} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^3} + \dfrac{\pi}{4}$ ;

1.2 $y = (x^3 - 3x) \cdot e^{2x}$;

1.3 $y = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$ ;

1.4 $y = x^2 \cdot \lg^3 x$ ;

1.5 $y = \dfrac{\arcsin x - 2x}{e^x}$ ;

1.6 $y = (3\sin x - x^3) \cdot \cos x$ ;

1.7 $y = \dfrac{1}{2x^2} - \operatorname{arcctg} x$ ;

1.8 $y = (3^x + x) \cdot (3^x - x)$ ;

1.9 $y = \sqrt[4]{\cos 2x}$ ;

1.10 $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^4 + 2x^2 + 1}$ ;

1.11 $y = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}$ ;

1.12 $y = \arcsin\dfrac{2}{x}$ ;

1.13 $y = \dfrac{1}{4} \cdot \ln^4 \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ;

1.14 $y = \dfrac{1}{(e^{3x} + 3)^4}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ ;

1.16 $2y + 1 = x(y + 1)^3$ ;

1.17 $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{ctg} x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \ln(x^2 - 4)\,, x_0 = 3$ ;

2.2 $tg\, y = xy\,, x_0 = 0, y_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2.3 $\begin{cases} x = \cos^3 t\,, \\ y = 2\,\sin^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2^x$ в точке $M(1;\,2)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} 3\sin^2 t\,, \quad t \in \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right], \\ 3\,, t \in (\frac{\pi}{2}\,; 3]\,, \\ 3 + \frac{1}{2}(t-3)^2, \quad t \in (3\,;\ 6]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = \frac{\pi}{4}$ сек, $t_2 = 4$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [4; 6]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = ln\frac{1-x}{x+1}$ ;

6.2 $y = \sqrt{\arcsin^3 x}$ ;

6.3 $y = \frac{1}{2-e^{2x}}$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = \sqrt[3]{2-3x}$ , $x_0 = -2$

8*. Написать уравнение нормали к кривой: $x^2 + 4x - 2y^2 + 4y - 6 = 0$, зная, что эта нормаль перпендикулярна прямой $x = y$.

9. Теорема о связи между непрерывностью функции в точке и существованием производной в точке.

10. Вывести формулу производной функции $y = \sin x$, используя определение производной функции**.**

**Вариант 5**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = x\sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{x^3}$ ;

1.2 $y = (x^2 - 2)e^x - e^2$ ;

1.3 $y = \dfrac{2x}{\ln x} + \dfrac{1}{\ln 10}$ ;

1.4 $y = \dfrac{\cos x - x^2}{2x - \sin x}$ ;

1.5 $y = \dfrac{x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x}$ ;

1.6 $y = 5 \operatorname{arctg} x + 3 \operatorname{arcctg} x$ ;

1.7 $y = 2^x \cdot \arccos\dfrac{1}{x}$ ;

1.8 $y = \dfrac{x + 3^x}{1 + 3^x}$ ;

1.9 $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4x} + \sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{5}}$ ;

1.10 $y = 3x \cdot \cos\dfrac{x}{3}$ ;

1.11 $y = \ln^2 x - \lg^2(5x - 2)$ ;

1.12 $y = 4\arccos^2\dfrac{x}{2}$ ;

1.13 $y = (x + 1) \cdot \sqrt{4 - x^2}$ ;

1.14 $y = \ln(\operatorname{ctg}(x^3))$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} 2x, \\ y = \dfrac{1}{1 - t} \end{cases}$ ;

1.16 $2y = 0{,}3 \sin 2y + x$ ;

1.17 $y = (x^3 + 2)^{\frac{1}{x}}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \ln^3 x$, $x_0 = 1$ ;

2.2 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $x_0 = 2$ ;

2.3 $\begin{cases} x = te^{-t}, \\ y = e^{2t}, \end{cases}$ $t_0 = 0$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \cos\frac{x}{2}$ в точке $M\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^3, & t \in [0;2], \\ 7 - 3(t-3)^2, & t \in (2;3], \\ 7, & t \in (3;\ 6], \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 1$ сек , $t_2 = 4$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [1; 4]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \cos \ln x$ ;

6.2 $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ ;

6.3 $y = \frac{1}{e^x - 1}$.

7*. Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1},\ x_0 = 2$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $9x^2 + 8y^2 = 144$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $4x + 3y + 2 = 0$.

9. Производная обратной функции (вывод формулы).

10. Вывести формулу производной функции $y = \operatorname{tg} x$.

**Вариант 6**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 2 \cdot x^{\frac{5}{2}}$;

1.2 $y = \dfrac{2 - 3x^2}{e^x}$ ;

1.3 $y = (x^3 - 3x + 1) \cdot 2^x$ ;

1.4 $y = x^2 \cdot \ln x - \operatorname{tg} x + \ln^3 5$ ;

1.5 $y = (1 - x^2) \cdot \arcsin x$ ;

1.6 $y = \dfrac{x^4 \cdot \operatorname{arctg} x}{4}$ ;

1.7 $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ ;

1.8 $y = \dfrac{\cos x}{2 \sin x + 1}$ ;

1.9 $y = \dfrac{1}{2} \cdot \cos^2 x - \cos 2x$ ;

1.10 $y = \sqrt{e^{2x} - 1}$ ;

1.11 $y = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{cos\frac{x}{2}}$ ;

1.12 $y = (2x - 3) \cdot \sqrt{x^2 - 3x}$ ;

1.13 $y = \operatorname{arcctg}^2 \sqrt{1 + x}$ ;

1.14 $y = \lg(2 + ctg^2 x)$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ ;

1.16 $e^y + xy = ex$ ;

1.17 $y = (\ln(x + 2))^{2x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \sin(x^3 + \pi)$, $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$ ;

2.2 $x^3 + y^3 = a^3 + \sin x$, $x_0 = 0$ ;

2.3 $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2\sqrt{x}$ в точке $M(4;\ 4)$. Сделать чертёж. Определить по

чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 1$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, \ t \in [0\,;2], \\ 2 - \frac{1}{4}(t-4)^2, t \in (2\,;4], \\ 2, \ t \in (4\,;\ 6], \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 3$ сек, $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [3; 5]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \sin \ln^2 x$ ;

6.2 $y = \sqrt{x^4 + 1}$;

6.3 $y = \arccos e^{-x}$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1};\ x_0 = 2$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $9x^2 + +8y^2 = 144$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $4x + 3y + 2 = 0$.

9. Производная функции, заданной параметрически (вывод формулы).

10. Вывести формулу производной функции $y = \operatorname{ctg} x$.

**Вариант 7**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $\mathrm{y} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}} - 5 + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{x^4+1}{2}$ ;

1.2 $y = e^x \cdot (x^4 - 4x^3)$ ;

1.3 $y = \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{3}\,\right) \cdot \ln x - \ln 3$ ;

1.4 $y = \dfrac{\ln x}{2x^3 + x} - \dfrac{\lg x}{2}$ ;

1.5 $y = \dfrac{1}{3} \cdot \operatorname{ctg} 3x - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$ ;

1.6 $y = (x-1)\arccos x - \arccos 0{,}1$ ;

1.7 $y = \dfrac{10^x + 1}{\ln 10}$ ;

1.8 $y = \dfrac{x + \frac{1}{\ln 2}}{2^x}$ ;

1.9 $y = \dfrac{1}{(2x+4)^2}$ ;

1.10 $y = \sqrt[3]{1 + \sin 3x}$ ;

1.11 $y = \sqrt{x} \cdot e^{-2\sqrt{x}}$

1.12 $y = \dfrac{\ln(\ln x + 1)}{(\ln x + 1)^2}$ ;

1.13 $y = e^{-\operatorname{arctg}\,3x} + \operatorname{arcctg} 3x$ ;

1.14 $y = 3 \ln \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ ;

1.16 $\operatorname{arctg}(x+y) = 2x$ ;

1.17 $y = (\operatorname{tg}^2 x + 2)^{3x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \cos x^2, \ \ x_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$ ;

2.2 $\operatorname{arctg}(x+y) = x + 1, \ \ x_0 = 0$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}, \quad t_0 = 2$ ;

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2\sqrt{x}$ в точке $M(4;\ 4)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 1$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$\mathrm{S(t)} = \begin{cases} 3t^2 - 2t^3\ ,\ \ t \in [0\ ;1]\ , \\ 1\ , t \in (1\ ;4]\ , \\ 1 + (t-4)^2\ ,\ \ t \in (4\ ;\ 5]\ , \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек , $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [4; 5]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ;

6.2 $y = \ln\sin x$ ;

6.3 $y = \sqrt{1 - x - x^2}$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5 + 2x}}\ ,\ x_0 = 2\ .$$

8*. Написать уравнение нормали к кривой: $y = 1 - e^x$, зная, что эта нормаль параллельна прямой $y - e^2\mathrm{x} - \mathrm{e} = 0$.

9. Дифференциал функции (определение и геометрический смысл).

10. Вывести формулу производной функции $y = \mathrm{arctg}\, x$.

**Вариант 8**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{x^3}{3} - 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{2x^4} - \pi$ ;

1.2 $y = (2x - 3)\ln x + \ln(e^2 + 1)$ ;

1.3 $y = \dfrac{e^x}{1 + 2x}$ ;

1.4 $y = \dfrac{x\cos x + 1}{\sin x}$ ;

1.5 $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{3}$ ;

1.6 $y = (x + 1)\arcsin 2x$ ;

1.7 $y = (\sqrt{3})^x - x^{\sqrt{3}}$ ;

1.8 $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{x^4 - 1}$ ;

1.9 $y = \dfrac{2}{\operatorname{ctg}^3 x}$ ;

1.10 $y = \sqrt{\ln 5x} - \sqrt{x\ln 4}$ ;

1.11 $y = (1 - x)^4 e^{1-x}$ ;

1.12 $y = (1 + 4x)\sqrt[3]{2x + 1}$ ;

1.13 $y = \dfrac{\sqrt{6x^2 - 1}}{x}$ ;

1.14 $y = \lg^3(x^2 + 2x + 3)$ ;

1.15 $\begin{cases} x = e^{2t} \ , \\ y = \cos^2 t \ ; \end{cases}$

1.16 $\operatorname{tg}\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = xy + \dfrac{\pi x}{4}$ ;

1.17 $y = (1 + lnx)^{\operatorname{arctg}\, x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = 2^{x^2}$, $x_0 = 1$ ;

2.2 $x^3 + 2x^2y + y^2 = 4$ , $x_0 = 1, y_0 \in (0; 2)$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \arcsin t \ , \\ y = \ln(1 - t^2) \ , \end{cases}$ $t_0 = 0$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = e^{-2x}$ в точке $M(-1\ ;\ e^2)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 1$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(\mathrm{t}) = \begin{cases} \sin^2\dfrac{t}{2}\ , \quad t \in [0\,;\pi]\ , \\ 1\ , t \in (\pi\,;5]\ , \\ 1 + (t-5)^2, \quad t \in (5\,;\ 6]\ , \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек , $t_2 = 6$ сек ;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [4; 6]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \dfrac{1}{\sin x}$ ;

6.2 $y = \sqrt{2\lg x + x}$ ;

6.3 $y = \sin^3 x - \sin^3 \dfrac{\pi}{4}$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}},\ x_0 = 8\ .$$

8*. Написать уравнение одной из касательных к кривой: $\mathrm{y} = \arcsin x$, зная, что эта касательная параллельна прямой $\sqrt{3}\mathrm{y} - 2\mathrm{x} = 0$.

9. Производная функции, заданной параметрически (вывод формулы).

10. Вывести формулу производной функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

**Вариант 9**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{2x^5}{5} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - ex^3 + \dfrac{x}{2}$ ;

1.2 $y = \dfrac{e^x - 3}{x + 1}$ ;

1.3 $y = (3x^2 - x + 2)\ln x$ ;

1.4 $y = \dfrac{(x+1)\sin x}{3} - \cos 2x$ ;

1.5 $y = \dfrac{\arccos\frac{x}{3}}{e^2}$ ;

1.6 $y = \dfrac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3} - 2\sqrt{x}$ ;

1.7 $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{1 + x^2}$ ;

1.8 $y = 2x\cos x - \sin x + \pi$ ;

1.9 $y = \ln(2x - 3) - \dfrac{1}{2x - 3}$ ;

1.10 $y = \sqrt[3]{\sin^2 3x}$ ;

1.11 $y = \operatorname{arctg} 2x \cdot \ln^2(1 + 4x^2)$ ;

1.12 $y = \dfrac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ;

1.13 $y = \arcsin^2\sqrt{x}$ ;

1.14 $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \ln t\ , \\ y = \dfrac{1}{t+1}\ ; \end{cases}$

1.16 $\operatorname{tg} y = (x^2 + 1)y$ ;

1.17 $y = (x + 1)^{\ln 2x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \sin 2x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ ;

2.2 $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x_0 = 4a$ ;

2.3 $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}, \end{cases} t_0 = 1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2\sin x$ в точке $M\left(\frac{\pi}{6};\ 1\right)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^3\,, \quad t \in [0\,;2]\,, \\ 5 - \frac{3}{4}(t-4)^2\,, t \in (2\,;4]\,, \\ 5\,, \quad t \in (4\,;\,5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек , $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость за первые 3 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \dfrac{1}{2 - e^{2x}}$ ;

6.2 $y = \sqrt{\arcsin 2x}$ ;

6.3 $y = \sin \lg \dfrac{x}{2}$.

7*. Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = \sqrt{2 - x}$, $x_0 = -7$.

8*. Написать уравнение касательной к кривой:

$y = \sqrt{x} - 2$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $4x - y = 0$.

9. Теорема о производной суммы двух функций.

10. Вывести формулу производной функции $y = a^x$.

**Вариант 10**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y=\dfrac{e}{2}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\dfrac{x^5}{10}$ ;

1.2 $y=(x^2-4x+1)e^{2x}$ ;

1.3 $y=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{2\ln 2}$ ;

1.4 $y=2\cos x-\sin\dfrac{\pi}{10}\cdot\sin x$ ;

1.5 $y=\dfrac{\operatorname{ctg}2x-\operatorname{tg}2x}{2}$ ;

1.6 $y=\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}$ ;

1.7 $y=x\cdot\arccos x$ ;

1.8 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ ;

1.9 $y=\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{3}$ ;

1.10 $y=2(x^2+1)\operatorname{arctg}x-2x$ ;

1.11 $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$ ;

1.12 $y=\ln^4(e^x+1)$ ;

1.13 $y=x\cdot\arcsin\dfrac{1}{x}$ ;

1.14 $y=\sqrt[3]{\arccos 2x}-\sqrt{1-4x^2}$ ;

1.15 $\begin{cases}x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2};\end{cases}$

1.16 $y=e^{1-xy}$ ;

1.17 $y=(\cos 2x)^{x^2+1}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y=\sqrt{2x^2-4}$, $x_0=2$ ;

2.2 $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=e$ , $x_0=1$ ;

2.3 $\begin{cases}x=t(t\cos t-2\sin t), \\ y=t(t\sin t+2\cos t),\end{cases}\quad t_0=\dfrac{\pi}{4}$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=-\sqrt{x+3}$ в точке $M(-2\,;\,-1)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0=6$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^2\,, \quad t \in [0\,;3]\,, \\ 4-(t-4)^2\,, t \in (3\,;4]\,, \\ 4\,, \quad t \in (4\,;\,6]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек , $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость за первые 4 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \dfrac{2}{\ln x}$ ;

6.2 $y = \sqrt{e^x} + \dfrac{1}{3}\sqrt{x^3}$ ;

6.3 $y = \cos^2 3x + \sin^2 \dfrac{\pi}{3}$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ , $x_0 = 2$ .

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $y = 2\sin x$, $x \epsilon [o;\pi]$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $\sqrt{3}y + x = 1$.

9. Теорема о производной разности двух функций.

10. Вывести формулу производной функции $y = x^\alpha$, используя определение производной функции.

**Вариант 11**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{1}{2x} - 6\sqrt[3]{x} + \dfrac{x^4 + 1}{2}$ ;

1.2 $y = (3 - x^3)e^x - ex$ ;

1.3 $y = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{\ln x}$ ;

1.4 $y = \dfrac{3\sin x + 4}{4\cos x - 3}$ ;

1.5 $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\cos x}$ ;

1.6 $y = 2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$ ;

1.7 $y = \operatorname{arctg} x - x^2 \operatorname{arcctg} x$ ;

1.8 $y = \dfrac{3^x}{\ln 2} - \dfrac{2^x}{\ln 3} + x$ ;

1.9 $y = \ln^2 x - \ln(3x + 1)$ ;

1.10 $y = \dfrac{1}{3}\sin^3 x - \sin x$ ;

1.11 $y = (1 - x) \cdot e^{-2x}$ ;

1.12 $y = \dfrac{\cos^2 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$ ;

1.13 $y = \sqrt{x} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ;

1.14 $y = \operatorname{arctg} e^x$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \sin 2t \quad , \\ y = \cos^2 t \quad ; \end{cases}$

1.16 $\operatorname{ctg} y = (x^2 + 2)y$ ;

1.17 $y = (1 + \cos x)^{\ln^2 x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \sqrt{3x^3 + 4}$, $x_0 = -1$ ;

2.2 $\ln x + \dfrac{x}{y} = c$ , $x_0 = 1$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \dfrac{1 + t}{t^3} , \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} , \end{cases} \quad t_0 = 2$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2\ln x + 1$ в точке $M(e\,;\,3)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 1$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\,, & t \in [0\,;1]\,, \\ \frac{1}{6}\,, & t \in (1\,;5]\,, \\ \frac{1}{6} + (t-5)^2\,, & t \in (5\,;\,6]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек , $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [4; 6]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \sqrt{2^x + 1}$ ;

6.2 $y = \arcsin\frac{x}{4}$ ;

6.3 $y = tg^3\frac{x}{3}$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = \sqrt{x-1}$ , $x_0 = 10$ .

8*. Написать уравнение одной из касательных к кривой: $y = arctgx$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $y + 4x = 2$.

9. Теорема о производной произведения двух функций.

10. Вывести формулу производной функции $y = \ln x$, используя определение производной функции.

**Вариант 12**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{x-2}{4} - \dfrac{2}{3x^{1,5}} + 2\sqrt{x}$ ;

1.2 $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{e^x}$ ;

1.3 $y = (3 - 4x)\ln x - 2\ln 3$ ;

1.4 $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \sin x}$ ;

1.5 $y = e^x \operatorname{tg} x - \sqrt{e}$ ;

1.6 $y = \dfrac{1 - 2\arcsin x}{x}$ ;

1.7 $y = (\operatorname{arcctg} x + x) \cdot e^x$ ;

1.8 $y = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ ;

1.9 $y = \ln(1 - 3x) - e^{-2x}$ ;

1.10 $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^3 4x}$ ;

1.11 $y = \sin\dfrac{x}{2} \cdot \ln\cos\dfrac{x}{2}$ ;

1.12 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ;

1.13 $y = \frac{1}{2}\arccos x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ ;

1.14 $y = e^{-\sin 2x}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = e^{1-2t}, \\ y = \dfrac{1}{2t - 1} \end{cases}$ ;

1.16 $y = \cos(x + y)$ ;

1.17 $y = (1 + tgx)^{\operatorname{ctg} x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \arcsin 4x^2$ , $x_0 = 0$ ;

2.2 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ , $x_0 = a$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = (2t + 1)\cos t, \end{cases}$ $t_0 = 1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2^{-(x+1)}$ в точке $M(-1\,;\,1)$. Сделать чертёж. Определить

по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = -2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} 1 - \cos t\ ,\ \ t \in [0\,; \pi]\ , \\ 2\ , t \in (\pi\ ; 4]\ , \\ 2 - (t-4)^2,\ \ t \in (4\ ;\ 5]\ , \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек , $t_2 = 6$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [4; 5]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \ln\ln 2x$ ;

6.2 $y = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$;

6.3 $y = \operatorname{arctg} x^2$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-8}}\ ,\ x_0 = 3\ .$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $y = \sqrt[3]{x+1}$, зная, что эта касательная параллельна прямой $3y - x = 1$.

9. Теорема о производной частного двух функций.

10. Вывести формулу производной функции $y = \cos x$, используя определение производной функции.

**Вариант 13**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + \dfrac{x^7 + 1}{7}$ ;

1.2 $y = \dfrac{2e^x + 2}{2 - x^2}$ ;

1.3 $y = 2(\arccos x - \arcsin x)$ ;

1.4 $y = \dfrac{\ln x + 1}{x^2}$ ;

1.5 $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} x}{x^3} - \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$ ;

1.6 $y = \dfrac{x}{1 + x^2} + \operatorname{arcctg} x$ ;

1.7 $y = \dfrac{2 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{ctg} x}$ ;

1.8 $y = \dfrac{3x}{2^x + x}$ ;

1.9 $y = \dfrac{1}{\ln(3x - 1)} - (3x - 1)^{-1}$ ;

1.10 $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x$ ;

1.11 $y = x \cdot e^{1 - x^3}$ ;

1.12 $y = \arcsin^3 \dfrac{3}{x}$ ;

1.13 $y = \sqrt[3]{x} \cdot \arccos\sqrt{x + 1}$ ;

1.14 $y = \sqrt{\lg(4 + \operatorname{ctg}^2 3x)}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t^2 \end{cases}$ ;

1.16 $e^{xy} = x + y^2$ ;

1.17 $y = (1 - \sqrt[3]{x})^{\sqrt[3]{x}}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \arccos 2x^3$, $x_0 = 0$ ;

2.2 $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$, $x_0 = 0$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t + 2}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t + 2}\right)^2, \end{cases}$ $t_0 = -1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = ln(ex)$ в точке $M(1\,;1)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = e^2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} t^3\,, \ \ t \in [0\,;1]\,, \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{2}(t-2)^2\,, t \in (1\,;2]\,, \\ \frac{5}{2}\,, \ \ t \in (2\,;\,5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек, $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость за первые 4 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \dfrac{1}{\cos 4x}$;

6.2 $y = \sqrt{e^{2x} + 1}$;

6.3 $y = \cos^3\dfrac{x}{3} + \sin^3\dfrac{\pi}{6}$.

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{(3-2x)^2}\,,\ x_0 = 1\,.$$

8*. Написать уравнение нормали к кривой: $y = tgx,\ x\epsilon\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ зная, что эта нормаль параллельна прямой $x + 4y = 0$.

9. Теорема о производной сложной функции.

10. Вывести формулу производной функции $y = e^x$, используя определение производной функции.

**Вариант 14**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{1 + 3\sqrt[3]{x}}{2} - \dfrac{1}{3x^3} + 2x^5$ ;

1.2 $y = e^x \cdot (2 - x - x^2) \cdot e^2$ ;

1.3 $y = \dfrac{\ln x}{x^3} - \lg 3$ ;

1.4 $y = (2x - 5) \cdot \cos 2x - 2\sin 2x$ ;

1.5 $y = \dfrac{2 + \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ;

1.6 $y = 2\sqrt{x} - \arcsin 2x$ ;

1.7 $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{arctg} x}$ ;

1.8 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{\ln 3} + \dfrac{(\sqrt{3}\,)^x}{2}$ ;

1.9 $y = e^{4x} \cdot \sin 2x - e^2$ ;

1.10 $y = \dfrac{1 + 2x}{\lg(1 + 2x)}$ ;

1.11 $y = \sqrt{1 - 4x^2} \cdot \arccos 2x$ ;

1.12 $y = x^2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} - x$ ;

1.13 $y = \arcsin 2^{-x}$ ;

1.14 $y = \ln\left(1 + \sin\dfrac{x}{2}\right)$ ;

1.15 $\begin{cases} x = e^{-t} \quad , \\ y = \sin^2 t \ ; \end{cases}$

1.16 $a\cos^2(x + y) = by$ ;

1.17 $y = (\operatorname{tg}^2 x + 2)^{3x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = e^{-5x^2}$, $x_0 = -1$ ;

2.2 $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, $x_0 = 0$, $y_0 \in (0; 2)$;

2.3 $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1 + t^3} \ , \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^2} \ , \end{cases} \quad t_0 = 1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = -2\sqrt{x}$ в точке $M(1\,;\,-2)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$\mathrm{S(t)} = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2\,, \quad t \in [0\,;2]\,, \\ 3 - (t-3)^2\,, t \in (2\,;3]\,, \\ 3\,, \quad t \in (3\,;\,6]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек , $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость за первые 4 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \mathrm{ctg}\dfrac{2}{x}$ ;

6.2 $y = \sqrt{2\cos x + 1}$ ;

6.3 $y = \ln^2(1-3x)$.

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,,\ x_0 = 2\,.$$

8*. Написать уравнение нормали к кривой: $\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 2\mathrm{y}^2 + 4\mathrm{y} - 6 = 0$, зная, что эта нормаль перпендикулярна прямой $\mathrm{x} = \mathrm{y}$.

9. Геометрический смысл производной.

10. Вывести формулу производной функции $y = a^x$.

**Вариант 15**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{4x^4} + \dfrac{\pi}{2}$ ;

1.2 $y = (x^3 + x) \cdot \ln x$ ;

1.3 $y = \dfrac{x^2}{\ln x} - \dfrac{3}{\ln 3}$ ;

1.4 $y = \dfrac{x + \sin x}{3 \cos x}$ ;

1.5 $y = (1 - \operatorname{tg} x) \cdot (2 + \operatorname{ctg} x)$ ;

1.6 $y = 2x(\operatorname{arctg} 2x - x)$ ;

1.7 $y = \dfrac{1 - 2x}{\operatorname{arcctg} x}$ ;

1.8 $y = (3^x + x) \cdot (3^x - x)$ ;

1.9 $y = \sqrt[4]{\cos 4x}$ ;

1.10 $y = \dfrac{1}{2}\cos^2 x - \cos x$ ;

1.11 $y = \ln^3\left(2 + \dfrac{x^2}{3}\right)$ ;

1.12 $y = \operatorname{arcctg} e^{2x}$ ;

1.13 $y = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{1 - x^2}$ ;

1.14 $y = x^4 \cdot \arccos\dfrac{2}{x^2}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = e^{\sin\frac{t}{2}}. \end{cases}$

1.16 $e^y - e^x + xy = 0$ ;

1.17 $y = (1 + \sqrt{x})^{2\sqrt{x}}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = 7^{x^2}$, $x_0 = 1$ ;

2.2 $y - 0{,}3 \cdot \sin(yx) = x$ , $x_0 = 0$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{t + 1}{\sqrt{t^2 - 1}}, \end{cases}$ $t_0 = 2$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln 2\text{x} - 1$ в точке $M\left(\frac{1}{2};\ -1\right)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$\text{S(t)} = \begin{cases} 6t^2 - 4t^3\ ,\ \ t \in [0\ ;1]\ , \\ 2\ ,t \in (1\ ;3]\ , \\ 2 + (t-3)^2,\ \ t \in (3\ ;\ 5]\ , \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 4$ сек $, t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость за первые 4 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \operatorname{arcctg} 2x$ ;

6.2 $y = \sqrt{1 + x^4}$ ;

6.3 $y = \ln(1 + e^x)$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{2 - x}\ ,\ x_0 = 1\ .$$

8*. Написать уравнение нормали к кривой: $y = e^{1-x}$, зная, что эта нормаль параллельна прямой $y + \text{e}x + 2\text{e} = 0$.

9. Уравнение касательной к кривой.

10. Вывести формулу производной функции $y = x^\alpha$, используя определение производной функции.

**Вариант 16**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = 4x^{\frac{2}{3}} - 4x^3 + 2\sqrt[4]{x} - 5$ ;

1.2 $y = \dfrac{3}{x^2} + 5\cos x - \log_4 x$ ;

1.3 $y = \dfrac{7x^4 - 2}{\sin x - 2x}$ ;

1.4 $y = 3e^x \cdot \arcsin x$ ;

1.5 $y = 3x^3 \operatorname{arctg} x - (x^2 - e) \cdot \arccos x$ ;

1.6 $y = \dfrac{4}{3}\operatorname{arcctg} x + \dfrac{4\lg x}{\sqrt{x}}$ ;

1.7 $y = (2x^6 - 3x) \cdot (5^x + 7)$ ;

1.8 $y = \dfrac{3\operatorname{ctg} x - x}{4 - \operatorname{tg} x}$ ;

1.9 $y = \left(1 + \sqrt{\sin x}\right)^3$ ;

1.10 $y = \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{3}{5}\cos^5 x$ ;

1.11 $y = \ln(1 - 3x) \cdot \lg(2x + 1)$ ;

1.12 $y = \sqrt[4]{\dfrac{2x - 1}{3x + 2}}$ ;

1.13 $y = \log_3(\operatorname{tg} 3x)$ ;

1.14 $y = \dfrac{(x - 2)^9}{(x - 1)^2}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = 2e^{-t} + 3t, \\ y = 3e^{2t} - 4t; \end{cases}$

1.16 $\operatorname{arctg}(x + y) = yx$ ;

1.17 $y = (\ln(x + 3))^{4x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \ln(6x^2 - 5)$ , $x_0 = 1$ ;

2.2 $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $x_0 = 0$ , $y_0 \epsilon (0; 2)$;

2.3 $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2, \end{cases}$ $t_0 = -2$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке $M(1; 1)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$\mathrm{S(t)} = \begin{cases} 3t^2 - t^3\,, \quad t \in [0\,;2]\,, \\ 4\,, t \in (2\,;3]\,, \\ 4 + \sin^2 \dfrac{\pi(t-3)}{4}, \quad t \in (3\,;\,5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 1$ сек , $t_2 = 4$ сек;
3) среднюю скорость в интервале $t \in [1; 4]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$ ;
6.2 $y = x \cdot \cos^2 2x$ ;
6.3 $y = \ln^3(1 + x)$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\,,\ x_0 = 0\,.$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $y = 4y^2 - 8y - x^2 - 4x = 20$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $y = 3x + 1$.

9. Уравнение нормали к кривой.

10. Вывести формулу производной функции $y = \operatorname{arctg} x$.

**Вариант 17**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^3} + 2x\sqrt[4]{x} - 2$ ;

1.2 $y = \dfrac{4}{x} + 5\,\mathrm{arctg}\,x - \log_2 x$ ;

1.3 $y = (2x^3 - 1 + x)e^x$ ;

1.4 $y = 3^x\left(\arcsin x - 5x + \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{7}\right)$ ;

1.5 $y = \dfrac{\mathrm{arcctg}\,x}{1+x^2}$ ;

1.6 $y = 3\arccos x + \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ;

1.7 $y = \left(2\cos x - \dfrac{1}{x}\right)\cdot(\sin x + 7)$ ;

1.8 $y = \dfrac{3\ln x - \ln 4}{4x^3 - 3x}$ ;

1.9 $y = (1 + \mathrm{tg}\,x)^5$ ;

1.10 $y = \sin^3 4x \cdot \cos^5 3x$ ;

1.11 $y = 4e^{-x}\cdot \mathrm{ctg}\,7x$ ;

1.12 $y = \ln\dfrac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2x^5}$ ;

1.13 $y = 3^{\mathrm{arctg}^{\,2}(2x+1)}$ ;

1.14 $y = \dfrac{\arcsin 5x}{\sqrt{(x-1)^5}}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \sin(2t+1), \\ y = \cos(3t-1); \end{cases}$

1.16 $\mathrm{ctg}\,x^3 + \ln y - 4xy = 0$ ;

1.17 $y = (\mathrm{tg}\,x)^{6x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = (7x-4)^6,\ x_0 = 1$ ;

2.2 $a\cdot x\cdot\cos^2(x+y) = b\cdot y, \qquad x_0 = 0;$

2.3 $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases} \quad t_0 = 10$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2^{-x} + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$. Сделать чертёж.

Определить по чертежу знак производной $y'(x_1)$ при $x_1 = 2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} tg^2 t\,, \ \ t \in \left[0\,; \frac{\pi}{4}\right], \\ 1 + \frac{3\pi}{2} - \frac{8}{\pi}\,, t \in (\frac{\pi}{4}\,; \pi]\,, \\ \frac{2+3\pi}{2}, \ \ t \in (\pi\,; \ 5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = \frac{\pi}{4}$ сек , $t_2 = \frac{\pi}{2}$ сек;
3) среднюю скорость в интервале $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \sqrt{e^{2x} + x^2}$ ;

6.2 $y = \ln\ln(5 + x)$ ;

6.3 $y = 0{,}2 \cdot \arccos 5x$ .

$7^*$ . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = (x+2)^3$ , $x_0 = 3$ .

$8^*$. Написать уравнение касательной к кривой: $y = ln(x^2 + 1)$, зная, что эта касательная параллельна прямой $5y + 4\text{x} = 1$.

9. Приращение независимой переменной и функции (определения и геометрическая иллюстрация).

10. Вывести формулу производной функции $y = \sin x$, используя определение производной функции.

**Вариант 18**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \frac{5 - x^7}{2} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + x \cdot \sqrt[5]{x} - \sqrt{3}$ ;

1.2 $y = \frac{3}{x^5} + 5^x - \cos x$ ;

1.3 $y = (1 + \operatorname{tg} x)e^x$ ;

1.4 $y = (x + \operatorname{ctg} x)(5x + \cos 3)$ ;

1.5 $y = \frac{\operatorname{arcctg} x}{x + 7x^4}$ ;

1.6 $y = x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{\ln x - 4}{3\sqrt{x}}$ ;

1.7 $y = \left(2x - \frac{1}{x}\right) \sin x$ ;

1.8 $y = \frac{\log_3 x - \ln x}{\cos x - 3}$ ;

1.9 $y = \arccos \frac{2x + 1}{3x - 2}$ ;

1.10 $y = \left(\sqrt{2x + 1} + 3\right)^4$ ;

1.11 $y = 3^{-\cos^4 2x}$ ;

1.12 $y = (1 + \operatorname{tg} 4x)e^{-3x}$ ;

1.13 $y = \operatorname{ctg}^3 \sqrt{4x} - \sqrt[3]{\ln 2}$ ;

1.14 $y = \frac{5x}{\sqrt{4 - x^5}}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \sin^3 2t \ , \\ y = 2\cos^3 2t \ ; \end{cases}$

1.16 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - e^{xy} = 1$ ;

1.17 $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 3x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \operatorname{arctg} x^2$ , $x_0 = 1$ ;

2.2 $x^y = y^x$, $x_0 = 1$ ;

2.3 $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \ , \\ y = t^2 \ln t \ , \end{cases} \quad t_0 = 1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2^x - 2$ в точке $M(1; 0)$. Сделать чертёж. Определить по

чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} t - \sin t\ ,\ \ t \in \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{3\pi}{4} - 1 - \frac{1}{\pi}(t-\pi)^2\ , t \in (\frac{\pi}{2}\ ; \pi]\,, \\ \frac{3\pi - 4}{4},\ \ t \in (\pi\ ;\ 5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = \frac{\pi}{4}$ сек, $t_2 = 4$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = e^{-x} \cdot \sin e^x$ ;

6.2 $y = \sqrt{4 - x^4} \cdot x$ ;

6.3 $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = \sqrt{cosx}$ , $x_0 = 0$ .

8*. Написать уравнение касательной к кривой:
$y^2 + 4y - x + 5 = 0$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $y = 4x + 1$.

9. Производная функции в точке (определение и геометрический смысл).

10. Вывести формулу производной функции $y = \cos x$, используя определение производной функции.

**Вариант 19**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \frac{2 - x^4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 4x \cdot \sqrt[3]{x} - \sqrt{\pi}$ ;

1.2 $y = \frac{4}{x} + e - \operatorname{tg} x$ ;

1.3 $y = 3e^x \cdot \arcsin(e^x)$ ;

1.4 $y = (x + \operatorname{ctg} x)(5x + \cos 3x)$ ;

1.5 $y = \frac{4^x + 4x}{2x^4 - 3}$ ;

1.6 $y = 5 \arccos x \cdot \left(\frac{2 \ln x}{\sqrt{x}} - \ln 3\right)$ ;

1.7 $y = \frac{x^3}{3} \cdot \sin x - x^2 \operatorname{arctg} x$ ;

1.8 $y = \frac{\operatorname{arcctg} x - \log_5 x}{x^5 - 2}$ ;

1.9 $y = \ln(1 + \sin x)$ ;

1.10 $y = e^{-x^2} \cdot \cos^3 x$ ;

1.11 $y = 2^{\operatorname{ctg}(5x+1)}$ ;

1.12 $y = (1 + \operatorname{tg} 4x) \cdot (2x - 1)^3$ ;

1.13 $y = \frac{\arcsin(1 - x^2)}{2 - 3x^3}$ ;

1.14 $y = \operatorname{arctg}^3(x^4 - 3x)$ ;

1.15 $\begin{cases} x = 7\cos^3 t, \\ y = \frac{4}{\arccos t} \end{cases}$ ;

1.16 $(x + y)^4 + (x - 3y)^2 = 0$ ;

1.17 $y = \left(\arccos \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^x$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \cos(2x^2 + \pi)$, $x_0 = \sqrt{\pi}$ ;

2.2 $\ln y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$ , $x_0 = 1$;

2.3 $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2), \end{cases}$ $t_0 = -15$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

   Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_1)$ при $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.
5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \sin^3 t\ ,\ \ t \in \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right], \\ 1\,, t \in (\frac{\pi}{2}\ ; 3]\,, \\ t^2 - 6t + 10,\ \ t \in (3\ ;\ 5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 3$ сек, $t_2 = 4$ сек;
3) среднюю скорость за первые 4 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - 1$ ;

6.2 $y = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ ;

6.3 $y = \ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$ .

7*. Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{1-2x}{x}\ ,\ x_0 = 1\,.$$

8*. Написать уравнение одной из касательных к кривой: $y^2 - 6y - 6x + 5 = 0$, зная, что эта касательная параллельна прямой $2y + 3x = 0$.

9. Теорема о связи между непрерывностью функции в точке и существованием производной в точке.

10. Вывести формулу производной функции $y = \arccos x$.

**Вариант 20**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{4}{x^2 \cdot \sqrt{x}} + x \cdot \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{x^6}{3}$ ;

1.2 $y = (x^3 - x) \cdot (2 - lnx)$ ;

1.3 $y = x^4 \cdot 4^x + \cos x - 4e$ ;

1.4 $y = \left(\dfrac{\sin x}{3} + x\right)(5x + 3)$ ;

1.5 $y = \dfrac{4 + \operatorname{tg} x}{x^7 - \operatorname{ctg} x}$ ;

1.6 $y = \arcsin x \cdot (2x^5 - 3)$ ;

1.7 $y = \dfrac{x^2}{2} \cdot x + \operatorname{arcctg} x$ ;

1.8 $y = \dfrac{4e^x - \ln x}{3 - \arccos x}$ ;

1.9 $y = \arcsin(\operatorname{ctg} x)$ ;

1.10 $y = \sqrt{\cos 3x} \cdot (6 - x)^3$ ;

1.11 $y = 5^{1-x^2} \cdot e^{3x}$ ;

1.12 $y = \dfrac{\sqrt{1 + 3x^2}}{2 + 3\sin x^2}$ ;

1.13 $y = \dfrac{\arccos 2x}{(4x - 3)^4}$ ;

1.14 $y = e^{\arcsin\,(1-x)}$;

1.15 $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}^3 t, \\ y = \operatorname{arcctg}(1 + t^3) \end{cases}$ ;

1.16 $(x + 1)^3 + (y + 1)^3 - 3(x + 1)(y + 1) = 0$;

1.17 $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \sin\sqrt{x}$ , $x_0 = \pi^2$ ;

2.2 $ye^y = e^{x+1}$ , $x_0 = 0$;

2.3 $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t, \end{cases}$ $t_0 = 1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(x - 4)$ в точке $M(4 + e; 1)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 7$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} 3t^2, & t \in [0\,;1], \\ 6 - 3(t-2)^2, & t \in (1\,;2], \\ 6, & t \in (2\,;\,6], \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 1$ сек, $t_2 = 3$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [1; 2]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \dfrac{1}{\cos x + 1}$;

6.2 $y = \ln(e^x + e^{-x})$;

6.3 $y = \arccos\sqrt{x}$.

7*. Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{x}{(x+2)^2}, \quad x_0 = -1.$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $3y^2 - 24y + x^2 + 4x + 4 = 0$, зная, что эта касательная параллельна прямой $y + x = 2$.

9. Дифференциал функции в точке (определение и геометрический смысл).

10. Вывести формулу производной функции $y = \arcsin x$.

**Вариант 21**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \dfrac{4-5\sqrt{x}}{3} - \dfrac{2}{3\sqrt[4]{x}} + \dfrac{5}{x}$ ;

1.2 $y = (e^3 - x)(2 - \cos x)$ ;

1.3 $y = \dfrac{2\sin x - x^3}{4 - x}$ ;

1.4 $y = \dfrac{e^x - 2}{\operatorname{ctg} x - 6}$ ;

1.5 $y = (\operatorname{tg} x - 3)\left(\operatorname{arctg} x + \sqrt{2}\right)$ ;

1.6 $y = \dfrac{1}{3}x^3 \cdot 4^x - x^2 \operatorname{arcctg} x$ ;

1.7 $y = \dfrac{4\log_3 x - 1}{x - \arccos x}$ ;

1.8 $y = \dfrac{5 - lnx}{\arcsin x} - \sqrt{3}$ ;

1.9 $y = \ln(sin\, x - cos\, x)$ ;

1.10 $y = \dfrac{\sqrt{4 + \cos x}}{1 + \sin 3x}$ ;

1.11 $y = 2\operatorname{tg} 3x \cdot \sqrt[4]{x - x^4}$ ;

1.12 $y = \dfrac{3\log_4(x+2)}{\sin(x+3)}$ ;

1.13 $y = \arcsin^3 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x$ ;

1.14 $y = 5^{\cos 4x}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + t\,, \\ \quad y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t}\ ; \end{cases}$

1.16 $x\ln(1 + y^2) + y\ln(1 + x^2) = 0$ ;

1.17 $y = (\arcsin 3x)^{x^3}$.

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{x}$ , $x_0 = \dfrac{\pi^3}{8}$ ;

2.2 $e^y + xy = e,\ \ x_0 = 0$ ;

2.3 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(2\cos t\,), \end{cases}\ t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = e^{-x} + 1$ в точке $M(0; 2)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = -1$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$\mathrm{S(t)} = \begin{cases} 9t^2 - 6t^3\,, \;\; t \in [0\,;1]\,, \\ \quad 3\,, t \in (1\,;4]\,, \\ 3 + (t-4)^2, \;\; t \in (4\,;\,5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 3$ сек , $t_2 = 5$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [3; 5]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,;$

6.2 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 3}\right)\,;$

6.3 $y = \mathrm{arcctg}\sqrt{x}\,.$

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1\,,\; x_0 = 1\,.$

8*. Написать уравнение одной из касательных к кривой:

$38\mathrm{y}^2 + 48\mathrm{y} - 9x^2 - 36x + 108 = 0$, зная, что эта касательная параллельна прямой $2\mathrm{y} - 3x = 0$.

9. Теорема о производной сложной функции.

10. Вывести формулу производной функции $y = a^x$.

**Вариант 22**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{5}{x^4} - e^3$ ;

1.2 $y = \left(5 - 3x - \frac{1}{x}\right)(\pi - \sin x)$ ;

1.3 $y = \frac{2\cos x - 3}{4 - x^3}$ ;

1.4 $y = \frac{e^x}{\operatorname{ctg} x} + \ln x$ ;

1.5 $y = 6x^7 \cdot 2^x - 10^x \cdot \sqrt{x}$ ;

1.6 $y = \frac{2 - \operatorname{arcctg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ;

1.7 $y = (5 - 3x)(e - \arcsin x)$ ;

1.8 $y = \frac{2 - \log_3 x}{\operatorname{arctg} x}$ ;

1.9 $y = \ln\ln(x - 3) - \frac{2}{\ln^3(x - 3)}$ ;

1.10 $y = \cos(2x^2 + 3x + 1)$ ;

1.11 $y = x^9 \cdot \operatorname{arctg}\frac{3 - x}{4 + x}$ ;

1.12 $y = e^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \arcsin 3x$ ;

1.13 $y = \frac{\sin^3 x}{5^{\sin x}} - \operatorname{ctg}^2 x$ ;

1.14 $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x^5}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = 2t - 1 \ , \\ y = \arccos(1 - 2t) \end{cases}$ ;

1.16 $xy - 2\sqrt[5]{y} = x^2$ ;

1.17 $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\sqrt{x}}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = 5\cos^2 x$, $x_0 = \pi$ ;

2.2 $ye^x + e^y = e + 1$, $x_0 = 0$, $\quad y_0 = 1$;

2.3 $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases}$ $t_0 = -\frac{\pi}{8}$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2e^{-x}$ в точке $M(-1; 2e)$. Сделать чертёж. Определить по

чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = -2$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^3\ , \ \ t \in [0\,;1]\,, \\ 2 - \frac{3}{8}(t-3)^2\ , t \in (1\,;3]\,, \\ 2, \ \ t \in (3\,;\ 6]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 1$ сек , $t_2 = 4$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [1;3]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \sqrt{9-4x^2}$ ;

6.2 $y = \cos 2x - \dfrac{1}{\cos 2x}$ ;

6.3 $y = \arcsin\sqrt{x}$ .

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \sqrt{\sin x}\ ,\ x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, зная, что эта касательная параллельна прямой $y + x = 2$.

9. Теорема о производной произведения двух функций.

10. Вывести формулу производной функции $y = \operatorname{tg} x$.

**Вариант 23**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = 3\sqrt{x^5} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}} + \dfrac{5}{x^2} - \pi^3;$

1.2 $y = \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)(\pi\cos x - \operatorname{tg} x)\ ;$

1.3 $y = \dfrac{2\log_5 x - x}{1 - x^2}\ ;$

1.4 $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x - 3x}{6 - e^x} + \sin x\ ;$

1.5 $y = \left(\sqrt{3}\right)^x - 3\sqrt{x} \cdot x\sqrt{3}\ ;$

1.6 $y = \dfrac{\arcsin x - 6x}{1 + \operatorname{ctg} x}\ ;$

1.7 $y = \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} - 3x^3\right)(7 - \arccos x)\ ;$

1.8 $y = \dfrac{3 - \ln x}{\operatorname{arcctg} x - x^4}\ ;$

1.9 $y = \log_2(1 + \sin x)\ ;$

1.10 $y = \dfrac{2}{\cos(x^3 - 1)} + \operatorname{ctg} 3x\ ;$

1.11 $y = \operatorname{arctg} 4x + \operatorname{arcctg} 3x\ ;$

1.12 $y = \lg(\operatorname{tg} x + 1) - \sqrt{5x - 3}\ ;$

1.13 $y = \dfrac{\arccos\frac{x}{3}}{1 + e^{2x}}\ ;$

1.14 $y = \sqrt{\arcsin 2x - \sqrt{x^2 - 5}}\ ;$

1.15 $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\ , \\ y = \cos^3 t\ ; \end{cases}$

1.16 $x^2y - y^2x + (x - y)^3 = 0\ ;$

1.17 $y = (\log_2 x)^{x^2}\ .$

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = 3\ \sin^2 x\ ,\ x_0 = \pi\ ;$

2.2 $\dfrac{e^{xy}}{x^2 + y} = x^2 + xy + \dfrac{1}{2}\ ,\ x_0 = 0\ ;$

2.3 $\begin{cases} x = \arccos t\ , \\ y = -2\sqrt{1 - t^2}\ , \end{cases} \quad t_0 = 4\ .$

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y^2 + 4y - x + 5 = 0$ в точке $M(2;-1)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 5$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$\mathrm{S(t)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin^2 t\,, \ \ t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{1}{2}\,, t \in (\frac{\pi}{2}\ ; 2]\,, \\ \frac{1}{2} + (t-2)^2, \ \ t \in (2\ ;\ 5]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = \frac{\pi}{4}$ сек , $t_2 = 3$ сек ;
3) среднюю скорость за первые 4 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \sqrt{2 - x - x^2}$ ;

6.2 $y = \operatorname{tg} e^{-2x}$ ;

6.3 $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{3}{(x+2)^3}\ ,\ x_0 = -1\ .$$

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $y = cos^2 x$, $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, зная, что эта нормаль перпендикулярна прямой $x + y = 2$.

9. Теорема о производной суммы двух функций.

10. Вывести формулу производной функции $y = \operatorname{ctg} x$.

**Вариант 24**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y = \sqrt{2x^3} - \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^7}} + x^2 - \pi$ ;

1.2 $y = \left(e^x - \dfrac{1}{x^3}\right)(4 - ctgx)$ ;

1.3 $y = \dfrac{\ln x - x}{\cos x - 2x^2}$ ;

1.4 $y = \dfrac{\arcsin x - 3^x}{5} + \sin x$ ;

1.5 $y = \cos\dfrac{\pi\sqrt{x}}{5} \cdot (\cos x - 4)$ ;

1.6 $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x - 3}{1 + \operatorname{tg} x}$ ;

1.7 $y = (1 - x^3)\operatorname{arcctg} x - 3(7 - x)$ ;

1.8 $y = \dfrac{\log_4 x}{5x - x^4}$ ;

1.9 $y = \operatorname{ctg} x^3 + (4x + 3)^2$ ;

1.10 $y = \lg\dfrac{5 + x}{2 - x}$ ;

1.11 $y = x \cdot 3^{\cos^3 x}$ ;

1.12 $y = \dfrac{(\arcsin x)^3}{\ln(4x - 3)}$ ;

1.13 $y = x \cdot \operatorname{arctg}^3 5x + \ln \operatorname{tg} x$ ;

1.14 $y = \sin^3 5x \cdot \cos^2\dfrac{x}{3}$ ;

1.15 $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t \end{cases}$ ;

1.16 $2^x = e^{x-y}$ ;

1.17 $y = (x^3 - 1)^{\ln x}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y = \operatorname{tg} x^2,\ \ x_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ;

2.2 $\dfrac{\cos y}{x} + x^2 - 2 = 0,\ \ x_0 = 1, y_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2.3 $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t, \end{cases}\ t_0 = 1$ .

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{2}{3-x}$ в точке $M(2;2)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = 5$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3, \quad t \in [0\,;2], \\ \frac{14}{3} - 2(t-3)^2, t \in (2\,;3], \\ \frac{14}{3}, \quad t \in (3\,;\,6], \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 1$ сек, $t_2 = 4$ сек;
3) среднюю скорость в отрезке $t \in [1;3]$;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = \sqrt{\sin 2x + 1}$;

6.2 $y = \ln\ln(-x)$;

6.3 $y = \arccos\sqrt{x+1}$.

7*. Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}, \ x_0 = 2.$$

8*. Написать уравнение нормали к кривой: $9x^2 + 5y^2 = 90$, зная, что эта касательная перпендикулярна прямой $x - 3y + 3 = 0$.

9. Теорема о производной частного двух функций.

10. Вывести формулу производной функции $y = \operatorname{arctg} x$.

**Вариант 25**

1. Найти производные следующих функций:

1.1 $y=\sqrt{x^3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x}}+x^5-\ln 5$ ;

1.2 $y=x^3\cdot\arcsin x$ ;

1.3 $y=\frac{\sin x+\sqrt{x}}{x-2x^3}$ ;

1.4 $y=\frac{x-3^x}{5}+8\,\mathrm{tg}\,x$ ;

1.5 $y=\ln 4\cdot(\mathrm{ctg}\,x+2)$ ;

1.6 $y=\frac{\log_6 x-\mathrm{arcctg}\,x}{e^x}$ ;

1.7 $y=(1-2x^3)\cdot\mathrm{arctg}\,x$ ;

1.8 $y=\frac{\ln x}{5\cos x-x^3}$ ;

1.9 $y=\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$ ;

1.10 $y=\ln(1-3x)\cdot\lg(2x+1)$ ;

1.11 $y=\sqrt{xe^x+x^2}$ ;

1.12 $y=\frac{\arccos(2x+1)}{2^{tgx}}$ ;

1.13 $y=\mathrm{arctg}\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ ;

1.14 $y=5^{\sin^2 x}$ ;

1.15 $\begin{cases} x=t^5+2t, \\ y=t^3+8t \end{cases}$ ;

1.16 $\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ ;

1.17 $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$ .

2. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x_0$:

2.1 $y=\mathrm{ctg}\sqrt{x}$ , $x_0=\frac{\pi^2}{4}$ ;

2.2 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{arctg}\,yx$, $x_0=0$, $y_0\epsilon(0;2)$;

2.3 $\begin{cases} x=t\,e^t, \\ y=\frac{t}{e^t}, \end{cases}$ $t_0=-\frac{1}{2}$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \sin x \cos x$ в точке $M(\frac{\pi}{2}; 0)$. Сделать чертёж. Определить по чертежу знак производной $y'(x_0)$ при $x_0 = \frac{3\pi}{2}$, ответ обосновать.

4. Найти производные второго порядка для функций, заданных в пунктах 1.1, 1.2, 1.3.

5. Закон прямолинейного движения точки:

$$\mathrm{S(t)} = \begin{cases} \sqrt{t}\,, \ \ t \in [0\,;4]\,, \\ 2, t \in (4\,;5]\,, \\ 2 + (t-5)^2, \ \ t \in (5\,;\ 7]\,, \end{cases}$$

где S(t) – путь в метрах, t – время в секундах.

Построить график функции S(t). Найти:

1) зависимость скорости движения от времени и построить график этой зависимости;
2) скорость движения в момент $t_1 = 2$ сек , $t_2 = 6$ сек;
3) среднюю скорость за первые 4 сек;
4) интервал времени, в течение которого точка находилась в покое;
5) момент времени, когда точка имела наибольшую скорость.

6. Найти дифференциалы функций:

6.1 $y = x + \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$ ;

6.2 $y = \ln(e^{-x} + 1)$ ;

6.3 $y = \dfrac{1}{\cos x^2}$.

7* . Используя определение производной, найти $f'(x_0)$ для функции
$f(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ x_0 = 1$ .

8*. Написать уравнение касательной к кривой: $9x^2 - 18x - 2y^2 - 8y - 17 = 0$, зная, что эта нормаль параллельна прямой $3y = 1 - x$.

9. Теорема о связи между непрерывностью функции в точке и существованием производной в точке.

10. Вывести формулу производной функции $y = \ln x$, используя определение производной функции.