КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФУНКЦИИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Варианты для самостоятельной работы

студентов 1 курса очной формы обучения,

обучающихся по программе бакалавриата

Составители:

Доценты Т.Б. Есина, А.А. Медведев, профессор В.Д. Петелина.

Москва 2015

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОГО ЗАДАНИЯ

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ

«ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

ВАРИАНТ 1

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией $z=\sqrt{x-y+2}\cdot\ln(x+y)$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции $z=\ln tg\frac{x}{y}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(3;\ -1;10)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2+xy-2x-y$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.

$u=\ln(x^2+e^{y(z-1)}+y^2)$, $M_0(-2;\ -1;1)$, $\alpha=\beta=\gamma<90^0$.

ВАРИАНТ 2

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией $z=\sqrt{x\ln(y-1)}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции $z=arctg\frac{2y}{x}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2-xy-8x+z+5=0$ в точке $M_0(2;\ -3;1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=4xy-4x^2-3y^2+8x-3y+3$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.

$u=\operatorname{arctg}(xyz^2)$, $M_0(-1;\ 2;-1)$, $\alpha=60^0$, $\beta=45^0$, $\gamma>90^0$.

ВАРИАНТ 3

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией $z = \ln\left[(x-1)(y+1)\right]$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции $z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $e^x + 2y + xz = 3$ в точке $M_0(2;\,1;0)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

5. Найти $\mathrm{grad}\,u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению вектора, составляющею с осями координат углы α, β, γ.

$u = x \cdot e^{x^2 z} - e^{2y}$, $M_0(-1;\,1;2)$, $\alpha = \beta < 90^0$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$.

ВАРИАНТ 4

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией $z = \arcsin(x+2) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции $z = x\sin(x-y)$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = xy$ в точке $M_0(-2;\; 2;-4)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

5. Найти $\mathrm{grad}\,u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению вектора, составляющею с осями координат углы α, β, γ.

$$u = z^2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad M_0(3;\; 4;-1),\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = 2\cos\gamma,\ \gamma > 90^0.$$

ВАРИАНТ 5

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$Z=\dfrac{\ln x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=\arcsin\sqrt{\dfrac{y-x}{y}}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z=2x^2+y^2$ в точке $M_0(1;-1;3)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.

$$u=\sin(x+2z)+\sin^2 y,\quad M_0\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{3}\right),\ \alpha=\beta=60^0,\ \gamma>90^0$$

ВАРИАНТ 6

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z=\sqrt{x+1}+\arccos y$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=4^{\frac{x^2}{y}}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z=\dfrac{x^2-y^2}{2}$ в точке $M_0(3;1;4)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-4x+9y$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.

$$u=\ln(y^2+e^{x(y-1)}+z^2),\ M_0(2;1;-2),\ \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos\beta=3\cos\gamma,\ \beta<90^0$$

ВАРИАНТ 7

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией

$z=\dfrac{\ln(x\cdot y)}{\sqrt{y-x}}$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=y\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right)$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$z=arctg\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0(1;\,1;\dfrac{\pi}{4})$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-x+y-1$.

5. Найти $\operatorname{grad}u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u=y\cdot e^{\frac{x^2}{z}}$, $M_0(-1;\;2;1)$ по направлению вектора $\vec{a}=\{2;\text{-}2;1\}$.

ВАРИАНТ 8

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией

$z=\sqrt{(x-1)\ln(y+2)}$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$z=e^{4+x+2y}$ в точке $M_0(2;\;-3;1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

5. Найти $\operatorname{grad}u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u=\operatorname{arcctg}(x+2y)+\dfrac{1}{z}$, $M_0(3;\;-2;2)$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $M(4;\;0;0)$.

ВАРИАНТ 9

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \sqrt{(x + y - 3} \cdot \ln(3 - x + y)$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z = \ln arctg \frac{x}{y^2}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(2;\ -3;1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.
$u = \ln(2x + y^2 + 2\sqrt{z})$, $M_0(1;\ -1;4)$ по направлению вектора $\vec{a} = \{3;6;-6\}$.

ВАРИАНТ 10

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \sqrt{x}\ln(x + y - 1)$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z = arctg \frac{y}{2x}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^2 - xy - 8x + z = 0$ в точке $M_0(2;\ -3;-4)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - x^2 - 2y^2 + 4x - 3y + 3$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.
$u = x \cdot e^{(x^2 + 4y^2 - z^2)}$, $M_0(3;\ -2;5)$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $M(5;\ -1;3)$.

ВАРИАНТ 11

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \ln\left[(2x-1)(y-3)\right]$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z = (\sin x)^{3y^2}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$e^x + 2y + xz = 3$ в точке $M_0(0;\ 1;0)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u = e^{\cos(2x=y)} + \cos^2 z$, $M_0(-\frac{\pi}{4};\ \pi;\frac{\pi}{4})$ по направлению вектора, противоположного вектору $\vec{a} = (2;2;-2)$.

ВАРИАНТ 12

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \frac{\ln(y-x^2)}{\sqrt{x-2}}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z = x\cos(3x-y)$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2xy$ в точке $M_0(-2;\ 2;-8)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 - 2x - y$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u = \ln(\cos 2x + y^2 + 3z)$, $M_0(-\frac{\pi}{4};\ -2;-1)$ по направлению вектора $(\vec{a}+\vec{b})$, если $\vec{a} = (5;-3;1)$, $\vec{b} = (1;-3;1)$.

ВАРИАНТ 13

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=\arcsin\dfrac{y-x}{y}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z=2x^2+y^2$ в точке $M_0(-1;\ 1;3)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-x^2-4y^3$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u=\operatorname{arctg}(x^2\cdot z)+\dfrac{z^3}{y^2}$, $M_0(-1;\ 2;1)$ по направлению вектора $(\vec{a}-\vec{b})$, если $\vec{a}=(3;2;4)$, $\vec{b}=(2;0;2)$.

ВАРИАНТ 14

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z=\sqrt{x^2-1}+\arccos(y+2)$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=4^{\frac{x^2}{y}}$

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z=\dfrac{x^2-y^2}{2}$ в точке $M_0(-3;\ -1;4)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=xy-x-2y$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.

$u=\ln(z^2+e^{x(y-1)}+2x)$, $M_0(-1;\ 1;-2)$, $\alpha=\beta=\gamma>90^0$.

ВАРИАНТ 15

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией

$$z = \frac{\ln(x \cdot y)}{\sqrt{y - x - 1}}.$$

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$$z = y\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right).$$

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$z = arctg\,\frac{y}{x}$ в точке $M_0(1;\,1;\frac{\pi}{4})$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора, составляющею с осями координат углы α, β, γ.

$u = \operatorname{arctg}(yz + x^2)$, $M_0(2;\,\text{-}3;1)$, $\alpha = 45^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma < 90^0$.

ВАРИАНТ 16

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией

$$Z = \sqrt{(y + x - 1)ln(y + 4)}.$$

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$$z = \arccos\frac{y}{x}.$$

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$z = e^{4+x+2y}$ в точке $M_0(2;\ -3;1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора, составляющею с осями координат углы α, β, γ.

$u = ye^{y^2x} - e^{2yz}$, $\quad M_0(2;\,\text{-}1;1)$, $\alpha = \beta < 90^0$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$.

ВАРИАНТ 17

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z=\ln(x^2+y^2-4)+\sqrt{y+3x-1}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции
$z=arctg(x^3y)+x\sqrt{y-1}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$2z=3x^2-y^2$ в точке $M_0(1;\ -2;-\frac{1}{2})$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-2y^2-4xy+2x-3y+1$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.

$u=x^2\cdot\sqrt{y^2+z^2}$, $M_0(-1;\ 3;-4)$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{2}\cos\alpha$, $\alpha<90^0$.

ВАРИАНТ 18

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z=\sqrt{x^2+y^2-4}+\sqrt{16-x^2-y^2}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=\frac{x^2}{y}-e^{xy^2}+y^3$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^2-y^2+3z=4$ в точке $M_0(-1;\ 2;2)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=\frac{x^2}{2}+4y^2-2xy+3x+8$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.

$u=\cos(2x+y)+\sin^2 z$, $M_0(\frac{\pi}{4};\ \pi;\frac{3\pi}{4})$, $\alpha=\gamma=60^0$, $\beta>90^0$.

ВАРИАНТ 19

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{y-2x}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции
$z=y\cdot\cos(2x+y)-\frac{x}{y}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^3y-y^2z+z^2=10$ в точке $M_0(2;\,1;-1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=3x^2+y^2-2xy+2x-3y+8$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора, составляющею с осями координат углы α,β,γ.
$u=\ln(e^{2x}+e^{y})+\frac{y^2}{z}$, $M_0(\frac{1}{2};\,1;-2)$, $\cos\beta=3\cos\alpha$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\alpha>90^0$.

ВАРИАНТ 20

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z=\sqrt{y-x^2}+\ln(y-3)$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции
$z=x^2\cdot\ln(2x+y)$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^2y-2y^2z+x^2z+5=0$ в точке $M_0(1;\,2;1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=\frac{x^2}{2}+2xy+3y^2+6x-y-7$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.
$u=z\cdot e^{x^2y}$, $M_0(-1;\,2;-2)$ по направлению вектора $\vec{a}=(-2;-1;-2)$.

ВАРИАНТ 21

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией

$z=\ln(9-x^2-y^2)+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=y^2\cdot\sin(x+y)-\dfrac{2y}{x}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$2x^2+xy^2-yz^2=2$ в точке $M_0(1;\,-2;1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-4x^2-y^2+6x-2y+1$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u=\operatorname{arctg}(y+2z)-\dfrac{1}{x}$ $M_0(2;\ -3;1)$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $M(6;\ 1;-1)$.

ВАРИАНТ 22

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией

$z=\sqrt{y+2x-1}+\sqrt{2-x}$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции

$z=y^2e^{x^2y}-y\ln x$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$2x^2+y^2-3z^2=6$ в точке $M_0(2;\ -1;1)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^2+y^2-xy-3x-2y+1$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u=\ln(x^2+2\sqrt{y}+2z)$, $M_0(-1;\ 4;-1)$ по направлению вектора $\vec{a}=(0{,}1;0{,}2;-0{,}2)$.

ВАРИАНТ 23

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \arccos\frac{x}{3} + \ln(x^2 + y^2 - 16)$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции
$z = \frac{x^3}{y} - \sqrt{x^2 + 2y^2}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z = 3x^2 - 2y^2$ в точке $M_0(2;\ -2;4)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + \frac{y^2}{2} - xy + 5x - 2y - 10$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.
$u = y \cdot e^{(4x^2 + y^2 - z^2)}$, $M_0(2;\ 3;-5)$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $M(4;\ 2;-3)$.

ВАРИАНТ 24

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \ln(x^2 - y) + \sqrt[4]{y + 2}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции
$z = (x^2 + 1)y - e^{3y} + \frac{1}{x^{2y}}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$\frac{x^2}{2} + y^2 - z^2 + 1 = 0$ в точке $M_0(2;\ -1;-2)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-1)^2 + (y+2)^2 - xy + 6x$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.
$u = e^{\sin(2y+z)}$, $M_0(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\pi)$ по направлению вектора, противоположного вектору $\vec{a} = (4;-2;-4)$.

ВАРИАНТ 25

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \arccos\frac{y}{2} + \ln(y - 2x)$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции
$z = \ln(x^3 + 2y) - \left(\frac{1}{x}\right)^{y^2}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $M_0(3;\ 4; -7)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - x^2 - 2y^2 + 4x - 3y + 3$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u = \ln(x^2 + y^3 + \sin 2z)$, $M_0(-2;\ -1; \frac{\pi}{2})$ по направлению вектора $(\vec{a} + \vec{b})$, если $\vec{a} = (7; -1; 2)$, $\vec{b} = (-1; -2; 4)$.

ВАРИАНТ 26

1. Найти область определения функции с геометрической иллюстрацией
$z = \ln(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{2y + 1}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz функции
$z = \frac{y^3}{x} - e^{2xy} + x^2 - 2y^{2x}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z + 4y^2 - 2x^2 = 0$ в точке $M_0(2; 1; 4)$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - 2y)(2x + y - 1)$.

5. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u = \operatorname{arctg}(y^2 z) + \frac{x^3}{z^2}$, $M_0(2;\ -1; 1)$ по направлению вектора $(\vec{a} - \vec{b})$, если $\vec{a} = (5; 2; 3)$, $\vec{b} = (7; 3; 1)$.

Теоретические вопросы:

1. Определение функции 2-х переменных, область определения, график.
2. Предел функции 2-х переменных в точке (определение).
3. Частные приращения функции $z = f(x, y)$, частные производные (определение и геометрический смысл.
4. Полное приращение функции $z = f(x, y)$. Два определения функции, непрерывной в точке.
5. Определение дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке и её свойства (с доказательством). Достаточное условие дифференцируемости (формулировка).
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности (определение). Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$ и заданной явно $z = f(x, y)$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Теорема о существовании касательной плоскости (доказательство по усмотрению лектора).
7. Полный дифференциал (определение, форма, геометрический смысл).
8. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных (формулировка).
9. Определение точки максимума и минимума функции $z = f(x, y)$.
10. Необходимый признак экстремума функции $z = f(x, y)$ (с доказательством). Достаточный признак экстремума (формулировка).
11. Определение производной функции $u = u(x, y, z)$ по заданному направлению в данной точке. Формула для вычисления (без вывода).
12. Градиент функции $u = u(x, y, z)$ (определение). Связь градиента с производной по направлению, свойства градиента.