Глава 2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Основные понятия

Наряду со случайными событиями одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

> ***Случайной называется величина, численное значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента***

Примерами случайных величин могут быть отметка на экзамене – целое положительное число (от 2 до 5), число оборотов спутника вокруг Земли до его гибели – любое целое неотрицательное число (в принципе, ничем не ограниченное), продолжительность работы телевизора до выхода из строя – любое неотрицательное число и т.д.

Обозначать случайные величины будем греческими буквами ξ, η, ζ и т.д., а их возможные значения – x, y, z, снабжая их при необходимости индексами.

Таким образом, случайная величина ξ – число, которое ставится в соответствие каждому возможному исходу стохастического эксперимента. Поскольку исходы опыта полностью определяются элементарными событиями, можно рассматривать случайную величину как функцию от элементарного события ω на пространстве элементарных событий Ω.

В зависимости от возможных значений все случайные величины можно разбить на два класса – дискретные и непрерывные.

> ***Дискретной назовём случайную величину, возможные значения которой образуют или конечное множество, или счётное (бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать).***

Для задания случайной величины недостаточно знать все её возможные значения; две случайные величины могут иметь одинаковые возможные значения, но принимать их с различными вероятностями (случайные величины – оценки на экзамене у сильных и слабых студентов имеют одинаковые возможные значения). Поэтому необходимо указать и возможные значения случайной величины, и вероятности, с которыми она может их принять.

Назовём законом распределения дискретной случайной величины правило, по которому каждому возможному значению ставится в соответствие вероятность, с которой случайная величина может принять это значение.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан графически, аналитически и таблично. В последнем случае задаётся таблица, где в одной строке записаны все возможные значения, а в другой соответствующие им вероятности.

Поскольку в результате опыта случайная величина может принять одно и только одно из возможных значений, то события, заключающиеся в том, что ξ примет значения $x_1,...,x_n$ образуют полную группу (попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие). Отсюда следует, что вероятность суммы этих событий равна единице и мы приходим к важному соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(\xi = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (2.1)$$

Замечание. Если множество возможных значений бесконечно и счётно, то вместо конечной суммы будет бесконечная – сумма ряда.

Пример 1.

Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины ξ, числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0.8, а по физике – 0.6.

Решение. Очевидно, возможные значения ξ есть 0, 1, 2, причём,

$$p\left(\xi = 0\right) = p\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2\right) = p\left(\bar{A}_1\right) \cdot p\left(\bar{A}_2\right) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08;$$

$$p(\xi = 1) = p\left(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2\right) = p\left(A_1 \cdot \bar{A}_2\right) + p\left(\bar{A}_1 \cdot A_2\right) =$$
$$p(A_1) \cdot p(\bar{A}_2) + p(\bar{A}_1) \cdot p(A_2) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.44$$

$$p\left(\xi = 2\right) = p\left(A_1 \cdot A_2\right) = p\left(A_1\right) \cdot p\left(A_2\right) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48.$$

Здесь A_1 и A_2 – события, заключающиеся в том, что математика и физика соответственно сданы на 5. При вычислении вероятностей использовались несовместность слагаемых и независимость сомножителей. Сведём полученные результаты в таблицу

ξ	0	1	2
p	0.08	0.44	0.48

Как легко проверить, условие нормировки (2.1) выполняется.

Пример 2.

Вероятность появления события A при одном испытании равна p. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа испытаний, проведённых до первого появления A.

Решение. Возможные значения ξ – все целые числа от 0 до ∞. Предположим, что $\xi = n$ и подсчитаем вероятность такого события. Очевидно, оно произойдёт, если в первых n испытаниях произойдут события $\bar{A}$, а в $n+1$ испытании произойдёт событие A. Отсюда искомая вероятность равна

$$p(\xi = n) = p\left(\bar{A}_1 \cdot \ldots \bar{A}_n \cdot A_{n+1}\right) = p\left(\bar{A}_1\right) \cdot \ldots p\left(\bar{A}_n\right) \cdot p\left(A_{n+1}\right) = q^n \cdot p$$

здесь $q = 1 - p$ и мы воспользовались независимостью сомножителей. Условие нормировки принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} p\left(\xi = n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(q^n \cdot p\right) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

При вычислениях мы воспользовались формулой суммы членов бесконечно убывающей прогрессии со знаменателем q и первым (при $n = 0$) членом, равным p.

Для задания дискретной случайной величины можно ввести функцию распределения.

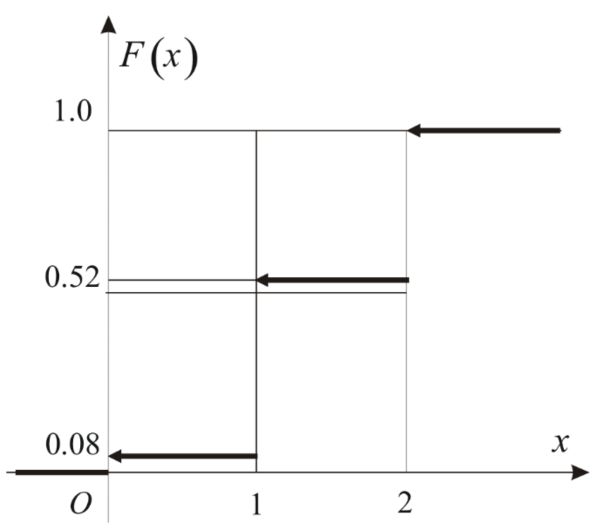
Назовём функцией распределения $F(x)$ функцию, равную вероятности того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее x.

$$F(x) = p(\xi < x). \tag{2.2}$$

При известном законе распределения функция распределения дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x) = p(\xi < x) = \sum_{(x_i < x)} p_i \tag{2.3}$$

где $(x_i < x)$ означает, что суммирование ведётся по всем индексам i, для которых это неравенство выполняется. Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины ξ является ступенчатой, сохраняющей постоянное значение на каждом интервале, не содержащем точек x_i, и терпящей в этих точках скачок, равный p_i. Для примера 1 функция распределения и её график представлены на Рис. 2.1.



$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \in (-\infty, 0] \\ 0.08; & x \in (0, 1] \\ 0.52; & x \in (1, 2] \\ 1; & x \in (2, \infty] \end{cases}$$

Рис. 2.1

Пример 3.

Шарик (точка) бросается случайным образом на отрезок длины L так, что его положение на отрезке равновозможно. Найдём вероятность попадания брошенного шарика в заранее выбранную точку x.

Решение. Определим вероятность попадания шарика на отрезок $\left[x-\delta, x+\delta\right]$ и устремим δ к нулю. В результате, согласно геометрической схеме, получаем

$$p\left(\xi = x\right) = \lim_{\delta\to 0}\frac{2\delta}{L} = 0.$$

Отсюда следует, что не всякое событие, вероятность которого равна нулю, невозможное.

Поскольку случайная величина ξ, координата брошенной точки, в этом случае может принять любое значение из интервала длины L, то нельзя даже перечислить все её возможные значения и вероятность того, что ξ примет определённое значение x, равна нулю. Таким образом, определить закон распределения так же, как и в дискретном случае, невозможно. Но и в этом случае функция распределения сохраняет свой смысл: $F\left(x\right) = p\left(\xi < x\right)$. При этом ясно, что значения $F\left(x\right)$ можно определить для любого x. Будем в дальнейшем предполагать, что функция $F\left(x\right)$ имеет производную $f\left(x\right)$, которая является непрерывной или кусочно-непрерывной функцией на числовой оси. При этом, как известно из курса математического анализа, справедливо равенство

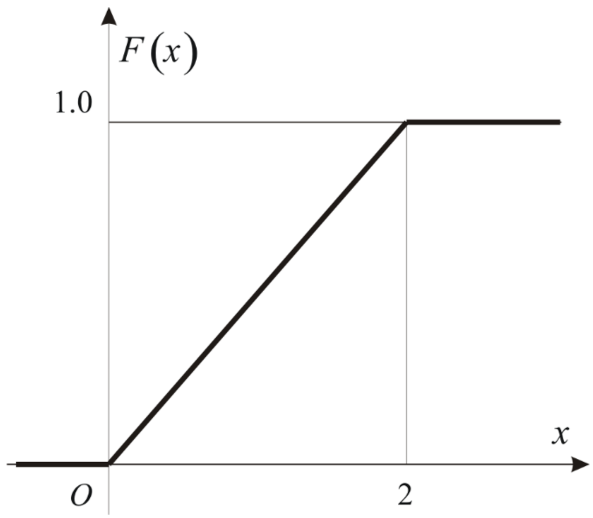
$$F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx. \qquad \text{Отсюда} \qquad f\left(x\right) = F'\left(x\right). \tag{2.4}$$

В этом случае ξ назовём непрерывно распределённой функцией.

Пример 4.

Шарик бросается случайным образом на отрезок $\left[0, 2\right]$. Найти функцию распределения случайной величины – координаты шарика.

Решение. Разобьём ось x на три интервала: $\left(-\infty, 0\right]$; $\left(0, 2\right]$; $\left(2, \infty\right)$. Вид функции распределения и её график приведены на Рис. 2.2, причём, мы учитываем, что событие $\xi < x$ на первом интервале является невозможным, на втором, согласно геометрической схеме, имеет вероятность $\frac{x}{2-0}$, а на третьем – является достоверным.



$$F(x)=\begin{cases} 0; & x\in(-\infty, 0] \\ \frac{x}{2}; & x\in(0, 2] \\ 1; & x\in(2, \infty] \end{cases}$$

Рис. 2.2

Рассмотренные примеры показывают, что функция распределения имеет ряд свойств, справедливых и в общем случае.

Функция распределения $F(x)$ определена на всей числовой оси и

$$0\le F(x)\le 1. \quad (2.5)$$

$F(x)$ – неубывающая функция, то есть для $x_1\le x_2$

$$F(x_1)\le F(x_2). \quad (2.6)$$

Действительно, событие $\xi\le x_2$ включает событие $\xi\le x_1$ и поэтому

$$F(x_2)=p(\xi<x_2)\ge p(\xi<x_1)=F(x_1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0; \qquad \lim_{x\to\infty}F(x)=1. \quad (2.7)$$

Событие $\xi < -\infty$ невозможно и его вероятность равна нулю, а событие $\xi < \infty$ достоверное и его вероятность равна единице.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$p(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{2.8}$$

Действительно, пусть A – событие, заключающееся в том, что $\xi < x_2$, а B и C – в том, что соответственно $\xi < x_1$ и $x_1 \le \xi < x_2$. Пользуясь определением функции распределения и несовместностью событий B и C, получаем:

$$F(x_2) = p(\xi < x_2) = p(A) = p(B + C) = p(B) + p(C) =$$
$$= p(\xi < x_1) + p(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_1) + p(x_1 \le \xi < x_2).$$

Отсюда следует справедливость (2.8).

Плотность вероятности

Рассмотрим некоторую непрерывно распределённую случайную величину ξ. Согласно предыдущему, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = p(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Функцию

$$f(x) = F'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \right)'. \tag{2.9}$$

принято называть плотностью распределения вероятностей или плотностью вероятностей. Таким образом,

> ***плотность вероятности некоторой случайной величины равна производной от её функции распределения.***

Свойства плотности вероятности

Плотность вероятности – неотрицательная функция. Это свойство следует из того, что функция распределения – не убывающая и, следовательно, её производная больше или равна нулю.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $\left[x_1, x_2\right)$ равна интегралу от плотности вероятности по этому интервалу.

$$p\left(x_1 \le \xi < x_2\right) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(t\right)dt. \tag{2.10}$$

Действительно, по свойству функции распределения

$$\begin{gathered} p\left(x_1 \le \xi \le x_2\right) = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right) = \int\limits_{-\infty}^{x_2} f\left(t\right)dt - \int\limits_{-\infty}^{x_1} f\left(t\right)dt = \\ \int\limits_{-\infty}^{x_1} f\left(t\right)dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(t\right)dt - \int\limits_{-\infty}^{x_1} f\left(t\right)dt = \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(t\right)dt \end{gathered} \tag{2.11}$$

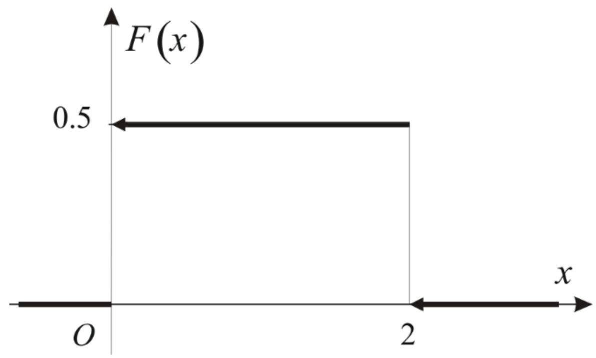
Определённый интеграл от плотности вероятности по всей числовой оси равен единице. Это утверждение следует из того, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t\right)dt = F\left(\infty\right) = 1. \tag{2.12}$$

Подводя итоги, отметим, что плотность вероятности – неотрицательная функция, удовлетворяющая условию нормировки (2.12), которое означает, что площадь фигуры, ограниченной графиком $f\left(x\right)$ и осью Ox, равна единице. Очевидно, любая неотрицательная функция, удовлетворяющая (2.12), может рассматриваться как плотность вероятности некоторой случайной величины.

Пример 5.

Найдём плотность вероятности случайной величины, рассмотренной в примере 4, и построим её график (Рис. 2.3).



$$f(x)=\begin{cases}0; & x\in(-\infty,0]\\ 0.5; & x\in(0,2]\\ 0; & x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

Рис. 2.3

2.2. Числовые характеристики случайной величины

Случайная величина полностью определяется её законом распределения, но для многих задач эта информация излишне полна и в то же время на практике часто закон распределения не известен и приходится довольствоваться меньшими сведениями. В таких случаях пользуются некоторыми суммарными характеристиками случайной величины. К важнейшим из них относятся математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi)=a=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i. \tag{2.13}$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется интеграл:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx. \tag{2.14}$$

Подчеркнём, что математическое ожидание случайной величины есть некоторое число (постоянная, неслучайная величина).

Пример 6.

Закон распределения случайной величины задан таблично (найден в примере 1). Найти математическое ожидание.

ξ	0	1	2
p	0.08	0.44	0.48

Решение. По определению:

$$M\left(\xi\right)=0\cdot 0.08+1\cdot 0.44+2\cdot 0.48=1.4.$$

Пример 7.

Задана плотность вероятности случайной величины (найдена в примере 4). Найти математическое ожидание.

Решение. Разобьём интеграл по всей оси на три интеграла. Учитывая, что на двух интервалах интегрирования плотность вероятности равна нулю, по определению получаем:

$$a=M\left(\xi\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot f\left(x\right)dx+\int_{0}^{2} x\cdot\frac{1}{2}dx+\int_{2}^{\infty} 0\cdot f\left(x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,dx=\frac{1}{4}\cdot x^2\Big|_0^2=1.$$

Для понимания очень полезна механическая аналогия. Трактуя возможные значения случайной величины как координаты точек на оси, а соответствующие им вероятности – как некоторые (вероятностные) массы, можно заметить, что математическое ожидание является аналогом понятия центра масс, то есть является «средним», «центральным» значением.

Свойства математического ожидания

Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной

$$M\left(C\right)=C. \tag{2.15}$$

Действительно, постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую единственное значение C с вероятностью 1, поэтому $M(C) = 1 \cdot C = C$.

Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi). \tag{2.16}$$

Поскольку при умножении на C возможные значения случайной величины также умножаются на C, при сохранении соответствующих вероятностей, то (2.16) следует из известных свойств суммы и интеграла.

Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i). \tag{2.17}$$

Математическое ожидание произведения конечного числа независимых в совокупности случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей

$$M(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M(\xi_1) \cdot \ldots \cdot M(\xi_n). \tag{2.18}$$

Итак, математическое ожидание является тем «средним» значением, вокруг которого распределены все возможные значения случайной величины. Однако, знания среднего значения случайной величины для большинства задач недостаточно, необходимо иметь ещё количественную характеристику разброса возможных значений случайной величины относительно математического ожидания. Для этого рассмотрим разность – отклонение возможного значения случайной величины от её математического ожидания: $(\xi - a)$.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(\xi) = M\left((\xi - a)^2\right). \tag{2.19}$$

Для вычисления дисперсии часто оказывается полезной формула:

$$D(\xi)=M\left(\xi^2\right)-\left(M\left(\xi\right)\right)^2. \qquad (2.20)$$

Действительно:

$$D(\xi)=M\left(\left(\xi-a\right)^2\right)=M\left(\xi^2-2a\xi+a^2\right)=M\left(\xi^2\right)-M\left(2a\xi\right)+M\left(a^2\right)=$$

$$=M\left(\xi^2\right)-2a\cdot M\left(\xi\right)+a^2=M\left(\xi^2\right)-2a^2+a^2==M\left(\xi^2\right)-a^2=M\left(\xi^2\right)-\left(M\left(\xi\right)\right)^2.$$

Свойства дисперсии

Дисперсия постоянной равна нулю

$$D(C)=0. \qquad (2.21)$$

Действительно, $D(C)=M\left(C^2\right)-\left(M\left(C\right)\right)^2=C^2-C^2=0.$

Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(C\cdot\xi)=C^2\cdot D(\xi). \qquad (2.22)$$

Действительно,

$$D(C\cdot\xi)=M\left(C^2\cdot\xi^2\right)-\left(M\left(C\cdot\xi\right)\right)^2=C^2\cdot M\left(\xi^2\right)-C^2\left(M\left(\xi\right)\right)^2=$$

$$=C^2\cdot\left(M\left(\xi^2\right)-\left(M\left(\xi\right)\right)^2\right)=C^2\cdot D(\xi).$$

Дисперсия суммы (разности) конечного числа независимых в совокупности случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i). \qquad (2.23)$$

Действительно,

$$D(\xi \pm \eta) = M\left((\xi \pm \eta)^2\right) - (M(\xi \pm \eta))^2 = M\left(\xi^2 \pm 2\xi\eta + \eta^2\right) - (M(\xi) \pm M(\eta))^2 =$$
$$M\left(\xi^2\right) \pm 2M(\xi)\cdot M(\eta) + M\left(\eta^2\right) - (M(\xi))^2 \mp 2M(\xi)\cdot M(\eta) - (M(\eta))^2 =$$
$$\left(M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2\right) + \left(M\left(\eta^2\right) - (M(\eta))^2\right) = D(\xi) + D(\eta)$$

Поскольку размерность дисперсии случайной величины равна квадрату размерности самой случайной величины, то в ряде случаев удобнее пользоваться корнем из дисперсии. Эта характеристика имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, и её называют среднеквадратическим отклонением.

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{2.24}$$

Из свойств дисперсии следуют свойства среднеквадратического отклонения:

$$\sigma(C) = 0; \quad \sigma(C\cdot\xi) = |C|\cdot\sigma(\xi); \quad \sigma\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sigma(\xi_i).$$

2.3. Некоторые законы распределения и их числовые характеристики

Рассмотрим некоторые особо важные распределения случайных величин и найдём их числовые характеристики.

Биноминальные распределения

К этому распределению приводит схема Бернулли: пусть производится n независимых однородных испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью $p(A) = p$, а ему противоположное – с вероятностью $p(\bar{A}) = 1 - p = q$. Рассмотрим теперь дискретную случайную величину ξ, равную числу появлений события A при n испытаниях. Возможными значениями ξ являются все целые числа от 0 до n, а вероятность того, что ξ примет значение m, определяется формулой Бернулли:

$$p(\xi = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \tag{2.25}$$

Термин «биноминальное» распределение объясняется тем, что вероятность (1.1) равна соответствующему слагаемому в разложении бинома (1.16).

Для вычисления математического ожидания и дисперсии введём в рассмотрение случайные величины $\zeta_1,...,\zeta_n$ – индикаторы испытаний, каждый из которых равен 1, если в соответствующем испытании событие A произошло, и 0 в противном случае. Закон распределения и числовые характеристики такой случайной величины приведены ниже:

ζ_k	0	1
p	q	p

$$M\left(\zeta_k\right)=0\cdot q+1\cdot p=p;$$

$$D\left(\zeta_k\right)=M\left(\zeta_k^2\right)-\left(M\left(\zeta_k\right)\right)^2=$$

$$=\left(0^2\cdot q+1^2\cdot p\right)-p^2=p-p^2=p\cdot\left(1-p\right)=p\cdot q.$$

Перейдём к определению $M(\xi)$ и $D(\xi)$. Непосредственный подсчёт по формулам (2.13) и (2.19) достаточно сложен и мы воспользуемся тем, что число появлений события A при n испытаниях равно сумме значений индикаторов, то есть $\xi=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k$. Теперь воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии. Учитывая независимость ζ_k, получаем:

$$\begin{aligned} M\left(\xi\right)&=M\left(\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\right)=\sum_{k=1}^{n}M\left(\zeta_k\right)=n\cdot p;\\ D\left(\xi\right)&=D\left(\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\right)=\sum_{k=1}^{n}D\left(\zeta_k\right)=n\cdot p\cdot q. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина называется распределённой по закону Пуассона, если её возможными значениями являются все целые неотрицательные числа (0, 1, …), а вероятность того, что случайная величина ξ примет значение m, определяется формулой Пуассона:

$$p\left(\xi=m\right)=\frac{a^m}{m!}\cdot\mathrm{e}^{-a}. \tag{2.27}$$

К этому закону, как уже отмечалось ранее, мы приходим в схеме Бернулли при $n \to \infty$ и $np = a$ (асимптотически). К нему же приводит задача о простейшем стационарном (Пуассоновском) потоке и ряд других задач.

Проверим выполнение условия нормировки:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(\xi = m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \cdot \mathrm{e}^{-a} = \mathrm{e}^{-a} \cdot \mathrm{e}^{a} = 1,$$

здесь использована полученная в анализе формула: $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$.

Переходя к пределу в формулах (2.26), получаем $M(\xi) = D(\xi) = a.$ Таким образом, математическое ожидание и дисперсия для этого распределения равны, то есть оно определяется одним параметром, что в ряде случаев является очень существенным.

Равномерное распределение

Назовём непрерывную случайную величину равномерно распределённой на интервале $[a, b]$, если её плотность вероятности равна некоторой константе на этом интервале и нулю вне него (Рис 2.4). Рассмотренные ранее примеры 4 и 5 представляют частный случай этого распределения для интервале $[0, 2]$. В общем случае графики плотности вероятностей (Рис.2.4), функции распределения (Рис.2.5) и их выражения, математическое ожидание и дисперсия приведены ниже.

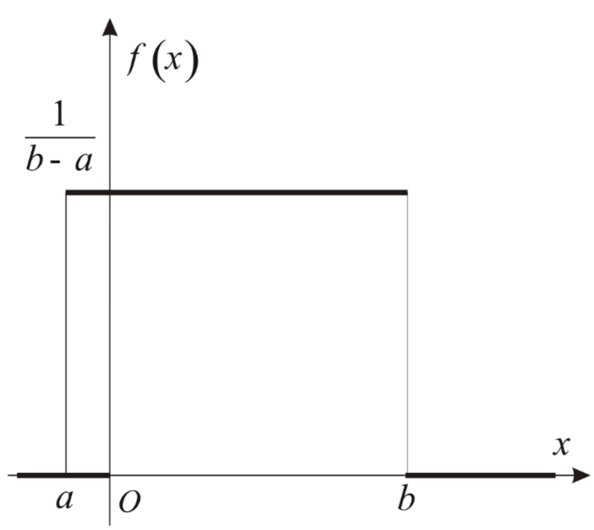


Рис. 2.4

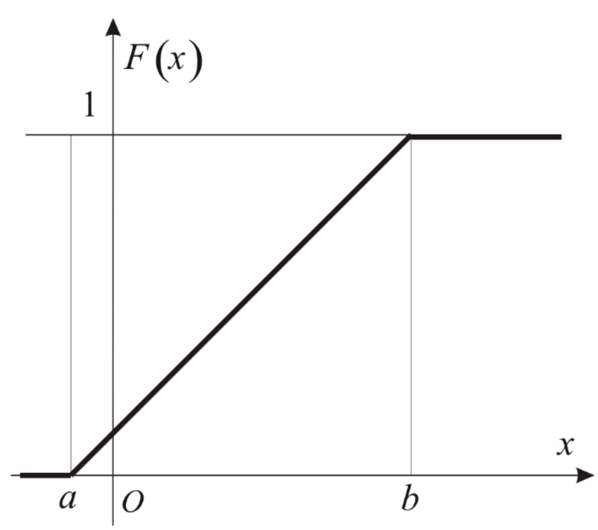


Рис. 2.5

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}; & x\in[a,b];\\ 0; & x\notin[a,b].\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0; & x\in(-\infty,a);\\ \dfrac{x-a}{b-a}; & x\in[a,b];\\ 1; & x\in(b,\infty).\end{cases}\quad \begin{matrix}M(\xi)=\dfrac{a+b}{2};\\ D(\xi)=\dfrac{(a-b)^2}{12}.\end{matrix}\qquad(2.28)$$

Равномерное распределение имеет важное практическое значение, поскольку многие представляющие интерес случайные величины распределены по этому закону и с его помощью можно получить практически любое распределение.

Показательное распределение

Непрерывная случайная величина имеет показательное распределение, если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}; & x\in[0,\infty);\\ 0; & x\in(-\infty,0).\end{cases}\qquad(2.29)$$

Опуская выкладки, приведём графики плотности вероятности и функции распределения (Рис. 2.6-2.7), выражение для функции распределения и числовые характеристики.

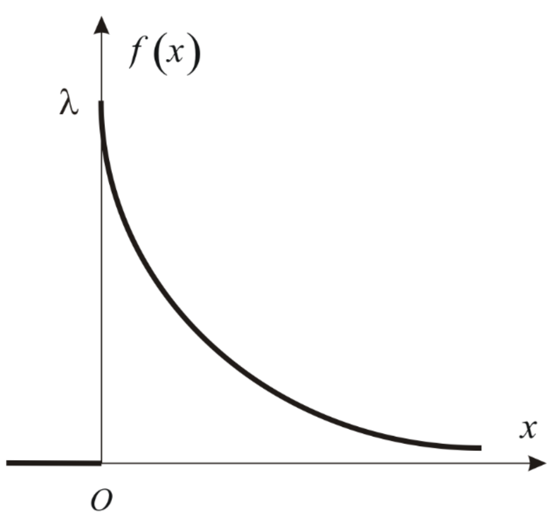


Рис. 2.6

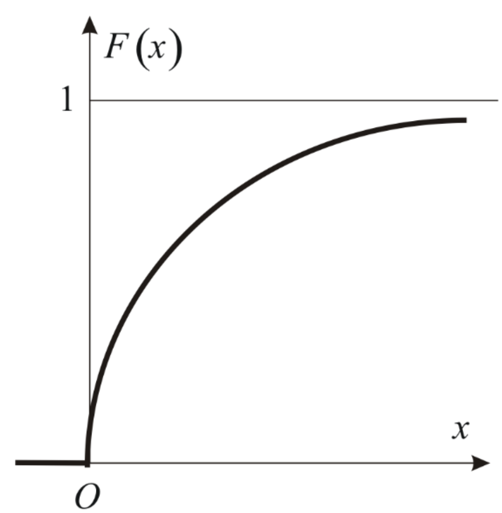


Рис. 2.7

$$F(x)=\begin{cases} 0; & x\in(-\infty,0); \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}; & x\in[0,\infty). \end{cases} \qquad \begin{aligned} M(\xi)&=\frac{1}{\lambda}; \\ D(\xi)&=\frac{1}{\lambda^2}; \\ \sigma(\xi)&=\frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

К показательному распределению приводят задачи о длительности безаварийной работы различных машин и приборов, оно играет особую роль в теории массового обслуживания и надёжности, в страховом деле, демографии и многих других прикладных дисциплин.

Нормальное распределение

Нормальное распределение – распределение Гаусса играет особую роль в теории вероятностей и её приложениях. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Этому закону подчиняется, при соблюдении определённых условий, распределение суммы достаточно большого числа случайных величин, каждая из которых может иметь произвольное распределение. Так, при изучении биномиального распределения мы воспользовались тем, что число появлений события A в сумме Бернулли можно представить в виде суммы индикаторов. Пользуясь этим, позже мы покажем, что при $n\to\infty$ биномиальное распределение быстро приближается к нормальному, то есть обоснуем интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Непрерывная случайная величина распределяется нормально, если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.31}$$

Графики плотности вероятности и функции распределения приведены на Рис. 2.8-2.9.

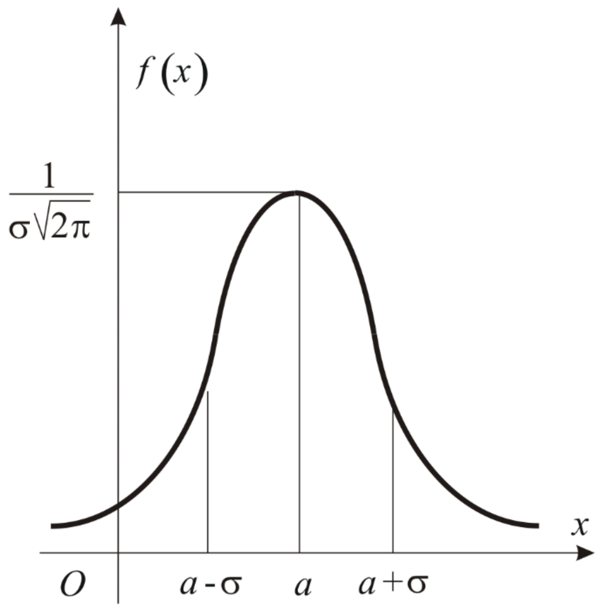


Рис. 2.8

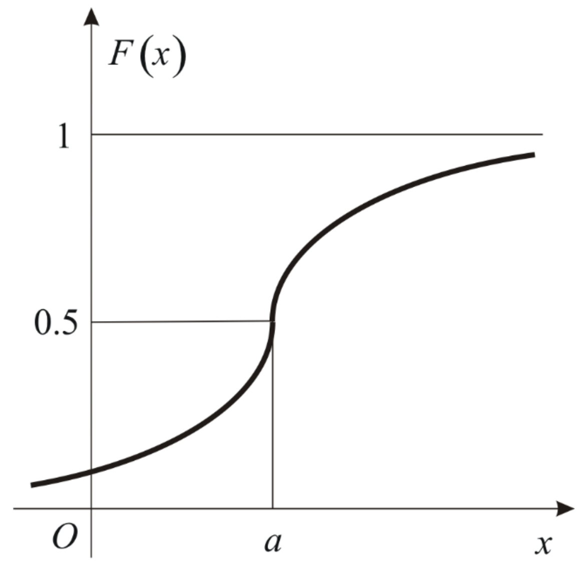


Рис. 2.9

Найдём функцию распределения:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau.$$

Сделав замену переменной

$$\tau=\frac{t-a}{\sigma};\quad t=\sigma\cdot\tau+a;\quad dt=\sigma\cdot d\tau;$$

$$t=-\infty\ \Rightarrow\ \tau=-\infty;\ \ t=x\ \Rightarrow\ \tau=\frac{x-a}{\sigma},$$

и, разбивая интеграл на два, приходим к функции Лапласа, значения которой табулированы:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=$$
$$=0.5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{2.32}$$

График плотности вероятности симметричен относительно прямой $x=a$, ось Ox является горизонтальной асимптотой, точки $x=a\pm\sigma$ – точки перегиба, максимальное значение равно $f_{\max}=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ и достигается при $x=a$. Условие нормировки (2.12) принимает вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=F(\infty)=0.5+\Phi(\infty)=1.$$

Определения математического ожидания и дисперсии приводят к вычислению аналогичных интегралов, что даёт:

$$M(\xi)=a;\quad D(\xi)=\sigma^2;\quad \sigma(\xi)=\sigma. \qquad (2.33)$$

Таким образом, параметрами, определяющими нормальное распределение, (иногда употребляется запись $\mathrm{N}[a,\sigma]$) являются a – математическое ожидание и σ – среднеквадратическое отклонение.

Очевидно, изменение параметра a сводится к параллельному переносу графика $f(x)$ по оси Ox. Для того чтобы понять, как влияет параметр σ на этот график, заметим, что при уменьшении σ возрастает $f_{\max}$. Но площадь фигуры, ограниченной графиком плотности вероятности и осью Ox, равна 1. Поэтому при уменьшении σ кривая должна быстрее приближаться к оси Ox вдали от $x=a$ и более резко возрастать вблизи этого значения.

Если функция распределения известна, то можно легко найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$p(x_1\le\xi\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \qquad (2.34)$$

Воспользуемся полученным соотношением и получим, так называемое, правило трёх σ. Для этого найдём:

$$p\left(\left|\xi-a\right|\le3\sigma\right)=p\left(a-3\sigma\le\xi\le a+3\sigma\right)=\Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right)=$$
$$=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\cdot\Phi(3)=2\cdot0.49865=0.9973.$$

То есть, практически достоверно то, что нормально распределённая величина примет значение, отличающееся от её математического ожидания по модулю не более, чем на 3σ. Иначе говоря, практически невозможно появление значения, выходящего за пределы этого интервала. Последнее обстоятельство находит широкое применение в различных приложениях.

Пример 8.

Затаривание мешков с цементом производится без систематических ошибок. Случайные ошибки подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 200$ грамм. Найти вероятность того, что затаривание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 100 грамм.

Решение. В задаче рассматривается случайная величина – ошибка взвешивания, то есть разность $\xi - a$ между случайным значением веса мешка и его нормативным значением a – математическим ожиданием:

$$p\left(\left|\xi - a\right| \le 100\right) = p\left(a - 100 \le \xi \le a + 100\right) = \Phi\left(\frac{a+100-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-100-a}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\cdot\Phi\left(\frac{100}{200}\right) = 2\cdot\Phi\left(0.5\right) = 0.383.$$

Здесь мы применили формулу (2.34), при $a = 0$ и $\sigma = 200$, и таблицу 4.

Функция одного случайного аргумента

Во многих случаях по известному распределению случайной величины ξ требуется определить распределение случайной величины η, связанной с ξ функциональной зависимостью. Например, по продолжительности жизни человека – случайной величине, страховой компании требуется определённая информация о величине страховой премии и взимаемом при этом взносе.

Пусть $\eta = \varphi(\xi)$. Для описания случайной величины η необходимо в случае дискретной случайной величины ξ по её известному закону распределения найти закон распределения η, а в случае непрерывной случайной величины ξ − по её известной плотности (или функции распределения) $f_\xi\left(x\right)$ найти плотность вероятности $f_\eta\left(x\right)$ случайной величины η (или её функцию распределения).

Рассмотрим сначала дискретный случай. Пусть случайная величина ξ задана таблично. Поскольку $\eta = \varphi(\xi)$, то каждому значению $\xi = x_i$ соответствует

$\eta = y_i = \varphi(x_i)$, причём, в силу функциональной зависимости вероятности событий $\xi = x_i$ и $\eta = y_i$ равны. Поэтому

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
η	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Однако возможно, что значения случайной величины η не упорядочены и среди них встречаются одинаковые. Тогда дополнительно их нужно расположить в порядке возрастания, а одинаковые значения объединить, сложив соответствующие вероятности.

Пример 9.

Случайная величина ξ – отклонение сопротивления резистора от номинала задана таблично и $\eta = k\xi^2$ – время (в минутах), необходимое на наладку прибора, пропорционально квадрату отклонения.

ξ	-2	-1	0	1	2	3
p	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

Составить закон распределения η.

Решение. Учитывая, что $\varphi(-2) = \varphi(2) = 4\cdot k;$ $\varphi(-1) = \varphi(1) = k;$ $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(3) = 9k$, объединяя равные значения и складывая соответствующие вероятности, получаем закон распределения случайной величины η:

η	0	k	$4\cdot k$	$9\cdot k$
p	0.3	0.4	0.2	0.1

Рассмотрим теперь непрерывную случайную величину ξ с плотностью вероятности $f_\xi(x)$ и пусть $\eta = \varphi(\xi)$. Дополнительно предположим, что $y = \varphi(x)$ дифференцируемая и строго монотонная функция (например, возрастающая). Обратную к ней функцию обозначим $x = \psi(y)$. Найдём функцию распределения $F_\eta(y)$ и плотность вероятности $f_\eta(y)$. Для этого воспользуемся определением функции распределения $F_\eta(y) = p(\eta < y)$. Но события, заключающиеся в том, что случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ примет значение меньше y, а ξ – меньше $x = \psi(y)$, в силу функциональной зависимости между ξ и η, осуществляемой монотонно возрастающей функцией, эквивалентны (Рис. 2.10).

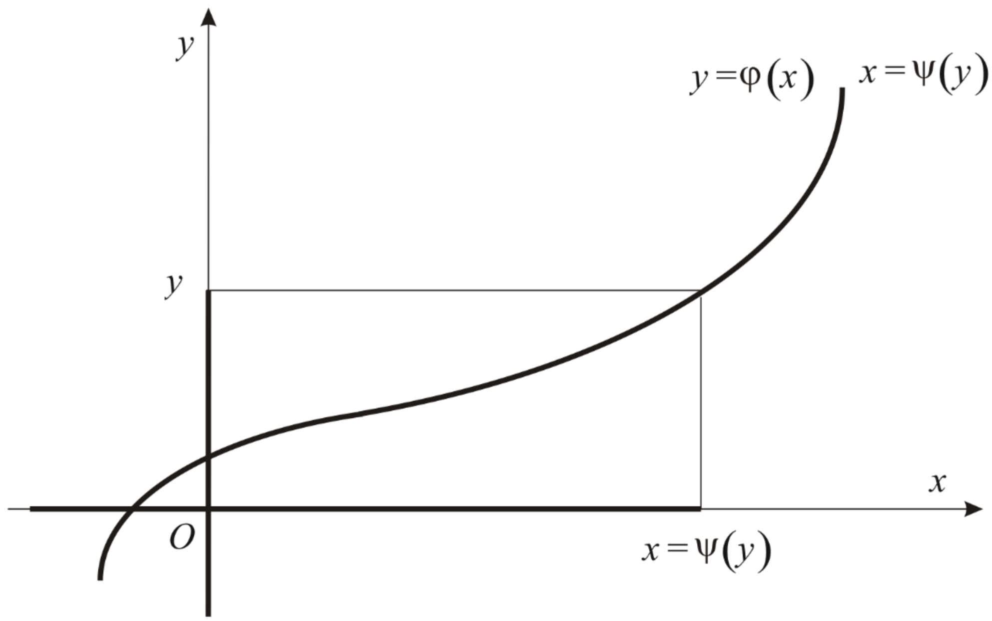


Рис. 2.10

Поэтому

$$F_\eta(y) = p(\eta < y) = p\big(\xi < \psi(y)\big) = \int_{-\infty}^{\psi(y)} f_\xi(x)dx. \tag{2.35}$$

Для определения плотности вероятности $f_\eta(y)$ остаётся продифференцировать найденную функцию распределения:

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \left(\int_{-\infty}^{\psi(y)} f_\xi(x)dx \right)'_y = f_\xi\left[\psi(y)\right] \cdot \psi'(y). \tag{2.36}$$

Аналогично решается задача в случае монотонно убывающей функции $y = \varphi(x)$. Если эта функция не монотонная, но ни на одном интервале не равна тождественно постоянной, то в формуле, аналогичной (2.35), будет несколько интервалов интегрирования с пределами, зависящими от y.

В ряде случаев достаточно знать числовые характеристики случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$, которые в случае монотонно возрастающей функции $\varphi(x)$ равны

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_\eta(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f_\xi\left[\psi(y)\right] \cdot \psi'(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f_\xi(x) dx. \quad (2.37)$$

Аналогично определяется дисперсия:

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x) - M(\eta)\right) \cdot f_\xi(x) dx. \quad (2.38)$$

Таким образом, для определения числовых значений характеристик $\eta = \varphi(\xi)$ не обязательно знать закон её распределения. Можно показать, что формулы (2.37) и (2.38) верны и в общем случае.

Подобрав определённым образом функцию $y = \varphi(x)$, из случайной величины ξ, распределённой по некоторому закону, таким преобразованием можно получить случайную величину η, распределённую по любому закону. Особенно часто в качестве первичной берут случайную величину, равномерно распределённую на интервале $[0,1]$. Последнее объясняется тем, что равномерно распределённую случайную величину достаточно просто можно получить на компьютере (соответствующая встроенная программа получения равномерно распределённых на интервале $[0,1]$ величин имеется даже в обычном инженерном калькуляторе), что используется при численном моделировании.

2.4. Системы случайных величин

Во многих задачах приходится рассматривать одновременно две или более случайные величины. Возникающую при этом систему из конечного числа случайных величин $\xi_1, ..., \xi_n$ назовём n – мерной случайной величиной. Заказывая партию костюмов, торговая фирма должна иметь некоторую информацию о распределении у потенциальных покупателей хотя бы двух случайных параметров – размера и роста.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением двумерной случайной величины. При сохранении главного упрощаются выкладки и появляется возможность дать геометрическую интерпретацию.

В дискретном случае возможные значения двумерной случайной величины (ξ, η) можно рассматривать как координаты случайной точки на плоскости –

(x_i, y_i). Чтобы задать случайную величину, в этом случае надо указать перечень возможных значений и вероятности того, что компоненты ξ и η примут значения x_i и y_i. Как и в одномерном случае, это можно сделать в виде таблицы (но уже с двумя входами) или аналитически (некоторой формулой):

$\eta \backslash \xi$	x_1	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	$\dots$	p_{n1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	p_{1m}	$\dots$	p_{nm}

$$p(\xi = x_i; \eta = y_j) = p_{ij}.$$

Поскольку события, заключающиеся в том, что $(\xi = x_i; \eta = y_j)$ и $(\xi = x_i^*; \eta = y_j^*)$ при несовпадении хотя бы одного индекса несовместны, а их сумма – достоверное событие, то

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \qquad (2.39)$$

Для описания непрерывной двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$, как и в одномерном случае, введём понятие функции распределения

$$F(x, y) = p(\xi < x, \eta < y). \qquad (2.40)$$

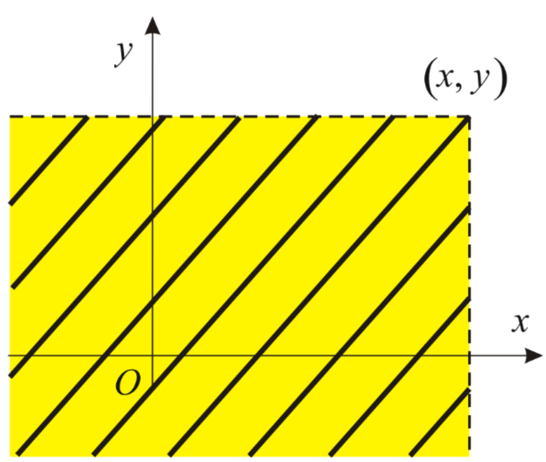


Рис. 2.11

Таким образом, значение функции распределения в точке $(x; y)$ равно вероятности того, что случайная точка с координатами $(\xi; \eta)$ попадёт в квадрант с вершиной в точке $(x; y)$, изображённый на Рис. 2.11.

Как и в одномерном случае, функция распределения двумерной случайной величины обладает рядом свойств:

1. $0 \le F(x) \le 1.$ (2.41)

2. $F(x; y)$ – функция, не убывающая по каждому аргументу.

3. $F(-\infty; y) = F(x; -\infty) = F(-\infty; -\infty) = 0; \qquad F(\infty; \infty) = 1.$ (2.42)

4. Обозначим функции распределения компонент ξ и η двумерной случайной величины соответственно $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Тогда

$$F_\xi(x) = F(x; \infty); \qquad F_\eta(y) = F(\infty; y). \tag{2.43}$$

5. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $(x_1 \le \xi < x_2;\ y_1 \le \eta < y_2)$ равна

$$p(x_1 \le \xi < x_2;\ y_1 \le \eta < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \tag{2.44}$$

Предположим теперь, что функция распределения $F(x; y)$ имеет смешанную частную производную второго порядка, которую назовём плотностью вероятности двумерной случайной величины:

$$f(x; y) = F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{2.45}$$

Как и в одномерном случае, плотность вероятности двумерной случайной величины обладает рядом свойств:

1. $f(x; y) \ge 0.$ (2.46)

2. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy.$ (2.47)

Следствие:

$$F(\infty, \infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{2.48}$$

3. $f(x; y)$ потому называется плотностью вероятностей двумерной величины, что, как и в одномерном случае, она равна отношению вероятности попадания случайной точки в некоторую область, содержащую точку $(x; y)$, к её площади, при неограниченном уменьшении её размеров.

4. Вероятность попадания случайной величины в заданную область

$$p\left(\left(\xi,\eta\right)\in D\right)=\iint_D f\left(x,y\right)dx\,dy \tag{2.49}$$

5. Плотности вероятностей $f_\xi\left(x\right)$ и $f_\eta\left(y\right)$ компонент ξ и η определяются по плотности вероятности $f\left(x;y\right)$ двумерной случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$ следующим образом

$$f_\xi\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,y\right)dy; \qquad f_\eta\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,y\right)dx. \tag{2.50}$$

Зависимость случайных величин

Рассмотрим двумерную случайную величину $\left(\xi;\eta\right)$, заданную плотностью вероятности $f\left(x;y\right)$, по которой при необходимости может быть найдена функция распределения $F\left(x;y\right)$. Обозначим попадание случайной точки в полуплоскость $\xi<x$ событием A, в полуплоскость $\eta<y$ событием B (Рис. 2.12). Тогда значение функции распределения – вероятность попадания случайной точки в квадрант AB будет равно вероятности произведения событий A и B, то есть

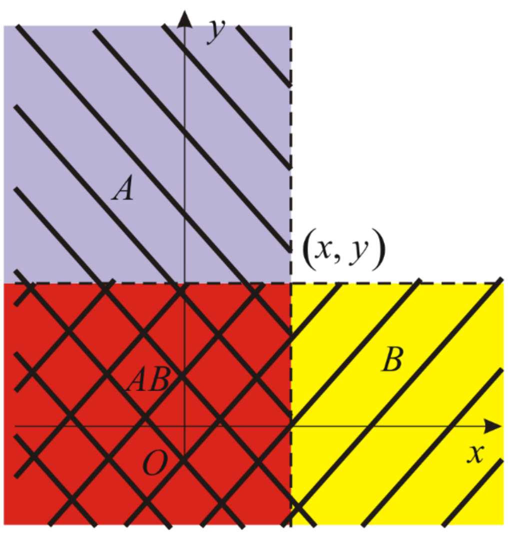


Рис. 2.12

$$F\left(x,y\right)=p\left(AB\right)=p\left(\xi<x,\ \eta<y\right).$$

Учитывая, что функция распределения компонент есть

$$F_\xi\left(x\right)=F\left(x,\infty\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,y\right)dx\,dy=p\left(\xi<x\right)=p\left(A\right);$$

$$F_\eta\left(y\right)=F\left(\infty,y\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f\left(x,y\right)dx\,dy=p\left(\eta<y\right)=p\left(B\right).$$

Примем за основу определение независимости случайных событий и назовём компоненты двумерной случайной величины ξ и η независимыми, если

$$p(\xi < x, \eta < y) = p(\xi < x) \cdot p(\eta < y)$$

Откуда:

$$F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y), \tag{2.51}$$

то есть

назовём компоненты двумерной случайной величины независимыми, если её функция распределения равна произведению функций распределения компонент.

Аналогичное утверждение справедливо и для плотностей вероятности

$$f(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y). \tag{2.52}$$

Следствие. Если случайные величины ξ и η независимы, то по известным распределениям компонент ξ и η можно восстановить распределение системы $(\xi;\eta)$.

2.5. Функции нескольких случайных аргументов

Ранее мы рассмотрели случай функции одного случайного аргумента. Пусть теперь $(\xi;\eta)$ двумерная случайная величина с известной плотностью вероятности $f(x, y)$ и $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$, то есть паре возможных значений ξ и η соответствует одно значение случайной величины ζ, которую в дальнейшем будем называть функцией двух случайных аргументов. Возникает задача: по известному распределению двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ найти функцию распределения $F_\zeta(z)$, плотность вероятности $f_\zeta(z)$ и числовые характеристики ζ. Найдём, прежде всего, функцию распределения, воспользовавшись определением

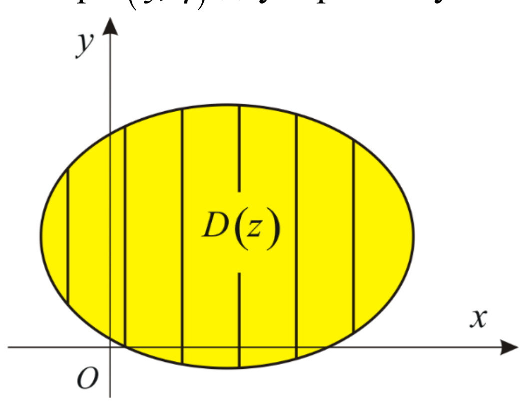


Рис. 2.13

$$F_{\zeta}(z)=p(\zeta<z)=p\left(\varphi(\xi,\eta)<z\right)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (2.53)$$

где область $D(z)$ (Рис. 2.13) – множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\varphi(x;y)<z$. Дифференцируя $F_{\zeta}(z)$ по z, получаем плотность вероятности $f_{\zeta}(z)$ случайной величины ζ.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $\zeta=\varphi(\xi,\eta)=\xi$. В этом случае область $D(z)$ имеет вид, показанный на

Рис. 2.14.

$$F_{\zeta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Отсюда:

$$f_{\zeta}(z)=F'_{\zeta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Но это уже ранее найденные функции распределения (2.43) и плотности вероятности (2.50) компоненты ξ двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$.

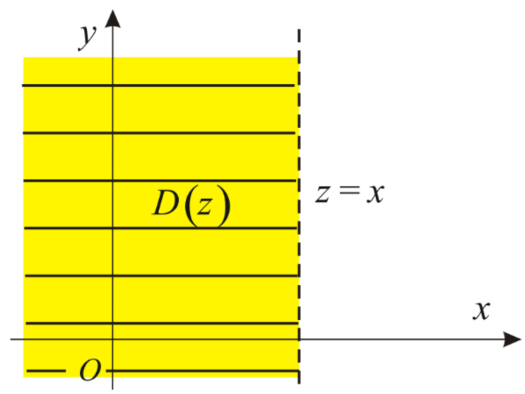


Рис. 2.14

2. Распределение суммы двух случайных величин.

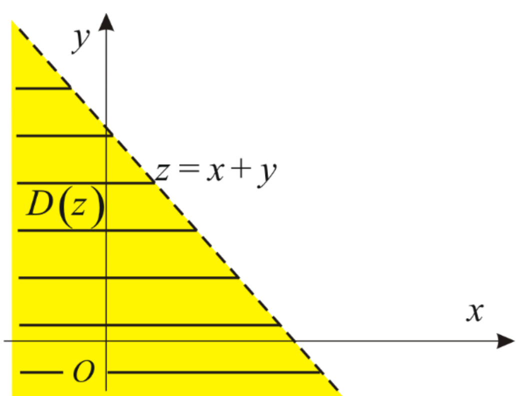


Рис. 2.15

Пусть $\zeta=\varphi(\xi,\eta)=\xi+\eta$. Соответствующая этому случаю область $D(z)$ представлена на Рис. 2.15. Функция распределения в этом случае равна

$$F_{\zeta}(z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)\,dx\,dy= \\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right)dx \qquad (2.54)$$

Дифференцируя по z, получаем:

$$f_\zeta(z) = F'_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx \tag{2.55}$$

В важном для приложений случае <u>независимых</u> случайных величин соотношение (2.55), с учётом (2.52), принимает вид:

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) \cdot f_\eta(z - x)dx, \tag{2.56}$$

который называют свёрткой или композицией исходных законов распределения.

Аналогичным образом можно получить соответствующие выражения для произведения и частного двух случайных величин.

Перейдём к определению числовых характеристик функции двух случайных аргументов $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$. По определению математическое ожидание равно:

$$M(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_\zeta(z)dz.$$

Однако для определения математического ожидания $M(\zeta)$ нет необходимости предварительно определять плотность вероятности случайной величины ζ, то есть $f_\zeta(z)$. Ранее, при изучении функции одного случайного аргумента, было показано, что если $\zeta = \varphi(\xi)$, то $M(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x)dx$. Аналогичное утверждение верно и в рассматриваемом случае:

$$M(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) \cdot f(x, y)dx\,dy. \tag{2.57}$$

Аналогично находится дисперсия:

$$D(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x, y) - M(\zeta)\right)^2 \cdot f(x, y)dx\,dy. \tag{2.58}$$

Найдём теперь математическое ожидание функции двух случайных аргументов в некоторых частных случаях.

1. Математическое ожидание компонент. Пусть $\zeta = \varphi(\xi, \eta) = \xi$. Тогда

$$M\left(\zeta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f\left(x,y\right)dx\,dy=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dy\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{\xi}\left(x\right)dx. \qquad (2.59)$$

Аналогично определяется математическое ожидание второй компоненты.

2. Математическое ожидание суммы случайных величин.
Пусть $\zeta=\varphi(\xi,\eta)=\xi+\eta$. Тогда

$$M(\zeta)=M(\xi+\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+y)\cdot f(x,y)dxdy=$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x,y)dxdy+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(x,y)dxdy= \qquad (2.60)$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right)dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right)dy=M(\xi)+M(\eta)$$

Тем самым обосновано ранее не доказанное свойство: математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых. Подчеркнём, что на слагаемые не налагается никаких ограничений.

3. Математическое ожидание произведения двух <u>независимых</u> случайных величин. Пусть $\zeta=\varphi(\xi,\eta)=\xi\cdot\eta$. Тогда

$$M(\zeta)=M(\xi\cdot\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x\cdot y)\cdot f(x,y)dxdy=$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot y\cdot f_{\xi}(x)\cdot f_{\eta}(y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{\xi}(x)dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_{\eta}(y)dy=M(\xi)\cdot M(\eta) \qquad (2.61)$$

Тем самым обосновано ещё одно свойство математического ожидания: математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей.

В заключение рассмотрим некоторые распределения, связанные с нормальным распределением.

1. Сумма нормальных распределений.

Пользуясь разобранными правилами, можно показать, что сумма независимых нормально распределённых случайных величин также распределена нормально. Это утверждение выражает чрезвычайно важное свойство устойчивости нормального распределения.

Пример 10.

Нормативная грузоподъёмность железнодорожной цистерны равна 60 тоннам. Считая загрузку каждой цистерны нормально распределённой случайной величиной с математическим ожиданием равным нормативной вместимости со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 2$ т, (зависит от точности работы загрузочного устройства), найти закон распределения, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины – загрузки состава из 50 цистерн.

Решение. Рассматривая загрузку состава как случайную величину $\zeta = \xi_1 + ... + \xi_{50}$, равную сумме загрузок всех цистерн, на основании свойства устойчивости нормального распределения можем утверждать, что ζ также распределена нормально с числовыми характеристиками

$$M(\zeta) = \sum_{i=1}^{50} M(\xi_i) = 50 \cdot M(\xi) = 50 \cdot 60 = 3000 \text{ т};$$

$$\sigma^2 = D(\zeta) = \sum_{i=1}^{50} D(\xi_i) = 50 \cdot D(\xi) = 50 \cdot (2)^2 = 200.$$

Отсюда: $\sigma = \sqrt{D(\zeta)} = 14.14$ т.

Воспользуемся полученными значениями и правилом трёх σ, согласно которому с вероятностью 0.9973 загрузка состава не выйдет за пределы интервала ($3000 - 3 \cdot 14.14;\quad 3000 + 3 \cdot 14.14$), то есть (2957.58; 3042.42).

2. Распределение χ_n^2 («хи-квадрат»).

Так называется распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2, \tag{2.62}$$

где ξ_i – независимые, нормально распределённые, стандартные ($a_i = 0$; $\sigma_i = 1$) случайные величины. Число слагаемых n называется числом степеней свободы этого распределения. Это распределение можно получить, найдя сначала χ_1^2 как функцию одного случайного аргумента, затем – χ_2^2 и, применяя метод математической индукции, найти искомое распределение. Это распределение хорошо изучено и для него существуют подробные таблицы (таблица 6).

3. Распределение Стьюдента (*t* - распределение).

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – независимые стандартные случайные величины. Распределением Стьюдента с n степенями свободы называется распределение случайной величины

$$t = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \chi_n^2}} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}. \tag{2.63}$$

Это распределение также хорошо изучено и для него также существуют подробные таблицы (таблица 5).

2.6. Корреляционная зависимость

Рассмотрим двумерную случайную величину $(\xi; \eta)$, плотность вероятности которой $f(x, y)$ известна. Найдём математическое ожидание произведения отклонения компонент от их математических ожиданий:

$$\begin{gathered} M\big((\xi - M(\xi)) \cdot (\eta - M(\eta))\big) = M\big((\xi - a_1) \cdot (\eta - a_2)\big) = \\ M(\xi \cdot \eta - a_1 \cdot \eta - a_2 \cdot \xi + a_1 \cdot a_2) = M(\xi \cdot \eta) - a_1 a_2 - a_2 a_1 + a_1 a_2 = \\ M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) \end{gathered} \tag{2.64}$$

Здесь обозначено $a_1 = M(\xi)$; $a_2 = M(\eta)$.

Поскольку в общем случае математическое ожидание произведения не равно произведению математических ожиданий сомножителей, т.е.,

$$M(\xi \cdot \eta) \neq M(\xi) \cdot M(\eta),$$

полученная разность не равна нулю. Величину этой разности называют ковариацией случайных величин ξ и η и обозначают $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$. Таким образом, имеются два способа вычисления ковариации

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)=M((\xi-a_1)\cdot(\eta-a_2)) \qquad (2.65)$$

Очевидно, для независимых случайных величин $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$.

Используя введённое понятие, найдём ещё одно выражение для дисперсии суммы и разности компонент двумерной случайной величины:

$$D(\xi\pm\eta)=M\left((\xi\pm\eta)^2\right)-\left(M(\xi\pm\eta)\right)^2=M\left(\xi^2\pm 2\xi\cdot\eta+\eta^2\right)-\left(M(\xi)\pm M(\eta)\right)^2=$$
$$M\left(\xi^2\right)\pm 2M(\xi\cdot\eta)+M\left(\eta^2\right)-\left(M(\xi)\right)^2\mp 2M(\xi)\cdot M(\eta)-\left(M(\eta)\right)^2=$$
$$D(\xi)+D(\eta)\pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$$

Таким образом,

$$D(\xi\pm\eta)=D(\xi)+D(\eta)\pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta). \qquad (2.66)$$

В случае независимости компонент ковариация равна нулю и дисперсия суммы или разности равна сумме дисперсий.

Поскольку $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ является размерной величиной (её размерность совпадает с размерностью произведения случайных величин), то вводится безразмерная характеристика, которую называют коэффициентом корреляции

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}. \qquad (2.67)$$

Коэффициент корреляции обладает рядом свойств.

Для независимых случайных величин $\rho(\xi,\eta)=0$, поскольку в этом случае $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$.

Если $\rho(\xi,\eta)\neq 0$, то компоненты двумерной случайной величины зависимы, поэтому коэффициент корреляции может служить некоторой характеристикой зависимости случайных величин. Однако, будучи необходимым, равенство нулю коэффициента корреляции не является достаточным условием независимости, то есть из условия $\rho(\xi,\eta)=0$ не следует независимость ξ и η. Если $\rho(\xi,\eta)=0$, то говорят, что ξ и η не коррелированны.

Можно показать, что коэффициент корреляции по модулю не превосходит единицы

$$|\rho(\xi,\eta)|\leq 1 \qquad (2.68)$$

и равен по модулю единице тогда и только тогда, когда между ξ и η имеется линейная зависимость. То есть равенство коэффициента корреляции по модулю единице является необходимым и достаточным условием линейной зависимости случайных величин, а близость к единице характеризует степень близости зависимости между случайными величинами к линейной зависимости.

Рассмотрим двумерную случайную величину (ξ,η) с известной плотностью вероятности $f(x,y)$. Если компоненты независимые, то, как было показано, $f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$ и $\rho(\xi,\eta)=0$, где $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ – плотности вероятности компонент. Между ξ и η может существовать функциональная зависимость, когда каждому значению одной компоненты соответствует вполне определённое значение другой. Такова связь между радиусом круга и его площадью. Однако, существуют такие зависимости между величинами, которые нельзя отнести к функциональным. Такова, например, связь между избыточным весом человека и продолжительностью его жизни, ростом и весом и так далее. Здесь каждому значению одной величины соответствует множество возможных значений другой. Для изучения зависимостей такого вида чаще всего рассматривают изменение средних характеристик одной величины при изменении другой.

Две случайные величины ξ и η назовём корреляционно зависимыми, если распределение одной из них зависит от значения другой. Распределение случайной величины η при заданном значении ξ будем называть условным. Проводя рассуждения, как и при введении условной вероятности, можно найти условную плотность $f_{\eta|\xi=x}(y)$ вероятности компоненты η при заданном значении x компоненты ξ:

$$f_{\eta|\xi=x}(y)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}, \qquad \text{где} \qquad f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\neq 0. \tag{2.69}$$

Совершенно аналогично определяется условная плотность вероятности второй компоненты

$$f_{\xi|\eta=y}(x)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}, \qquad \text{где} \qquad f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\neq 0. \tag{2.70}$$

Найдём теперь условные математические ожидания компоненты ξ при заданном значении $\eta=y$ и компоненты η при заданном значении $\xi=x$:

$$M\left(\xi|\eta=y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_{\xi|\eta=y}(x)dx; \qquad M\left(\eta|\xi=x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_{\eta|\xi=x}(y)dy. \tag{2.71}$$

Условное математическое ожидание $M\left(\xi|\eta=y\right)$ является некоторой функцией от значения случайной величины $\eta=y$ и, следовательно, также является случайной величиной. Эта функция называется функцией регрессии величины ξ на величину η и обозначается

$$x = g_{\xi|\eta}(y) = M(\xi \mid \eta = y) \tag{2.72}$$

Аналогично определяется функция регрессии величины η на величину ξ:

$$y = g_{\eta|\xi}(x) = M(\eta \mid \xi = x) \tag{2.73}$$

Графики этих функций называются линиями регрессии соответственно ξ на η и η на ξ. Вид функций регрессии определяет характер корреляционной зависимости случайных величин ξ и η. Наиболее простым случаем является линейная регрессия, имеющая самостоятельное значение и служащая первым приближением в более сложных ситуациях. В случае линейной регрессии, линии регрессии ξ на η и η на ξ – прямые линии (в общем случае различные), а функции регрессии – линейные функции. Примером может служить общеизвестная формула

$$y = g_{\eta|\xi}(x) = M(\eta \mid \xi = x) = x - 100\,,$$

где ξ – рост случайно выбранного человека, а η – его вес.

Можно показать, что уравнения прямых регрессии η на ξ и ξ на η соответственно имеют вид

$$\frac{y-a_2}{\sigma_2} = \rho\cdot\frac{x-a_1}{\sigma_1}; \qquad \frac{x-a_1}{\sigma_1} = \rho\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_2}. \tag{2.74}$$

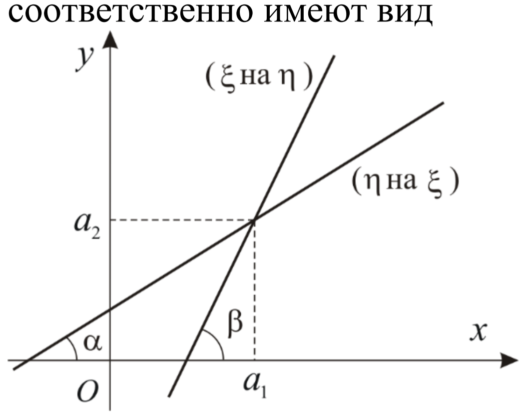


Рис. 2.16

Обе эти прямые проходят через точку (a_1, a_2), причём угловые коэффициенты прямых регрессии равны

$$k_1 = \mathrm{tg}\,\alpha = \rho\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \qquad k_2 = \mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Учитывая, что $|\rho| \le 1$, получаем $k_1 \le k_2$. Это означает, что прямая регрессии η на ξ имеет меньший наклон, чем прямая регрессии ξ на η. При $|\rho| = 1$ прямые регрессии сливаются, а линейная корреляционная зависимость превращается в линейную функциональную.

2.7. Предельные теоремы

В этом параграфе нас будут интересовать закон распределения и некоторые связанные с ним числовые характеристики суммы случайных величин при условии, что распределение и числовые характеристики слагаемых известны, а их число неограниченно возрастает.

Неравенство Чебышева. Для произвольной случайной величины ξ с математическим ожиданием $a = M(\xi)$ и дисперсией $\sigma^2 = D(\xi)$ для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$p\left(\left|(\xi - a)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \;\Leftrightarrow\; p\left(\left|(\xi - a)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \qquad (2.75)$$

Приведём доказательство для непрерывной случайной величины.

$$\sigma^2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} (x-a)^2 \cdot f(x)dx + \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} (x-a)^2 \cdot f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} (x-a)^2 \cdot f(x)dx \ge$$

$$\ge \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)dx + \varepsilon^2 \int_{a-\varepsilon}^{\infty} f(x)dx = \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a-\varepsilon}^{\infty} f(x)dx \right).$$

Здесь мы разбили интервал интегрирования на три участка, а далее в первом и третьем слагаемых заменили $(x-a)^2$ на меньшее ε^2 и отбросили второе слагаемое, в результате чего и получили неравенство, так как сумма при этом может только уменьшиться. Но выражение, стоящее в правой части в скобках, равно вероятности попадания случайной величины в интервалы $(-\infty, a-\varepsilon) \cup (a+\varepsilon, \infty)$, то есть вероятности выполнения неравенства $|x-a| > \varepsilon$. Отсюда $\sigma^2 \ge \varepsilon^2 \cdot p(|\xi - a| > \varepsilon)$. Деля на ε^2, получаем (2.75).

Из неравенства Чебышева следует: чем меньше дисперсия, тем меньше вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на ε.

Теорема Чебышева. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной. Тогда вероятность отклонения среднего арифметического системы случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий по модулю меньше чем на ε стремится к единице при неограниченном увеличении n .

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right|\le\varepsilon\right)=1, \qquad \text{где} \qquad M\left(\xi_i\right)=a_i. \tag{2.76}$$

Найдём случайную величину $\zeta_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}$ – среднее арифметическое и найдём её числовые характеристики:

$$M\left(\zeta_n\right)=M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}M\left(\xi_i\right)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n};$$

$$D\left(\zeta_n\right)=D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}D\left(\xi_i\right)}{n}\le\frac{1}{n^2}\cdot Cn=\frac{C}{n}.$$

Здесь мы воспользовались свойствами математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин и тем, что дисперсии всех слагаемых ограничены одной константой C . Применим теперь к ζ_n неравенство Чебышева:

$$p\left(\left|\zeta_n-M\left(\zeta_n\right)\right|\le\varepsilon\right)\ge1-\frac{D\left(\zeta_n\right)}{\varepsilon^2}$$

или

$$p\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)\ge1-\frac{C}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$ и учитывая ограниченность $\frac{C}{\varepsilon^2}$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}-\frac{a_1+...+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)\ge 1.$$

Но вероятность не может быть больше единицы, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}-\frac{a_1+...+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)=1.$$

Это и требовалось доказать. В этом случае говорят, что среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому математических ожиданий слагаемых.

Следствия.

1. Обычно, при определении численного значения некоторой величины проводятся несколько измерений и в качестве искомого значения принимается их среднее арифметическое. Действительно, результат каждого измерения можно рассматривать как случайные величины $\xi_1,...,\xi_n$. Если результаты измерений независимы, имеют одно и то же математическое ожидание и их дисперсии ограничены одной и той же константой (что на практике обычно выполняется), то согласно теореме Чебышева, среднее арифметическое $\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}$ сходится по вероятности $\frac{a_1+...+a_n}{n}=a$ к истинному значению измеряемой величины.

2. **Теорема Бернулли.** Эта теорема устанавливает связь между относительной частотой события $\nu(A)$ и его вероятностью $p(A)$. Пусть производится n независимых однородных испытаний (схема Бернулли), в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p(A)$. Введём в рассмотрение случайные величины $\xi_1,...,\xi_n$ – индикаторы испытаний. Напомним, что ξ_i принимает только два значения: 1, если в i-м испытании событие A наступило, и 0 в противоположном случае. Ранее были найдены $M(\xi_i)=p$ и $D(\xi_i)=pq$. Система случайных событий $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы Чебышева и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1.$$

Остаётся отметить, что сумма $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ равна числу появлений события A при n испытаниях, а значит $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ является относительной частотой, которую ранее обозначали $\nu(A)$.

Таким образом, **при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота $\nu(A)$ события A сходится по вероятности к $p(A)$ – вероятности его появления при одном испытании.** Это утверждение и является теоремой Бернулли.

Центральная предельная теорема. Снова рассмотрим последовательность случайных величин $\{\xi_i\}$ и найдём закон распределения $\zeta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ суммы этих случайных величин при неограниченном возрастании n. Оказывается, что закон распределения такой суммы при весьма общих условиях близок к нормальному. Этот факт определяет особое значение нормального распределения в теории вероятностей и имеет огромное прикладное значение. Соответствующее утверждение называется центральной предельной теоремой. Её строгое доказательство при достаточно общих предположениях впервые было дано русским математиком А.М. Ляпуновым. Приведём без доказательства формулировку этой теоремы.

Теорема Ляпунова. Пусть $\{\xi_i\}$ – последовательность независимых случайных величин и существуют конечные соотношения:

$$a_i=M(\xi_i);\quad b_i^2=D(\xi_i)=M\left(\left(\xi_i-a_i\right)^2\right);\quad c_i^3=M\left(\left|\xi_i-a_i\right|^3\right).$$

Если

$$\zeta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i;\quad A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i;\quad B_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2};\quad C_n=\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n}c_i^3}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=0,$ то тогда

$$\lim_{n\to\infty}p\left(\frac{\zeta_n-A_n}{B_n}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (2.77)$$

Отсюда следует, что случайная величина $\dfrac{\zeta_n - A_n}{B_n}$ распределена асимптотически нормально с параметрами $a = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

Смысл условий теоремы Ляпунова заключается в том, что вклад любого слагаемого ξ_i в образование всей суммы равномерно мал.

Следствия.

1. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Рассмотрим последовательность независимых однородных испытаний (схема Бернулли), в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Вероятность того, что событие A появится при этом не менее m_1 и не более m_2 раз определяется по формуле Бернулли:

$$p\left(m_1 \le m \le m_2\right) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

причём, при большом n применение этой формулы практически невозможно и применяется интегральная теорема Муавра-Лапласа. Для её обоснования рассмотрим систему случайных величин $\{\xi_i\}$ – индикаторов испытаний. Сумма индикаторов, то есть $\zeta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, равна числу появления события A при n испытаниях (то есть m), причём

$$a_i = M\left(\xi_i\right) = p; \quad b_i^2 = D\left(\xi_i\right) = pq;$$

$$c_i^3 = M\left(\left|\xi_i - a_i\right|^3\right) = \left|0 - p\right|^3 \cdot q + \left|1 - p\right|^3 \cdot p = p^3 \cdot q + q^3 \cdot p = pq\left(p^2 + q^2\right);$$

$$A_n = np; \quad B_n = \sqrt{npq}; \quad C_n = \sqrt[3]{npq\left(p^2 + q^2\right)};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{npq\left(p^2 + q^2\right)}}{\sqrt{npq}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 p^2 q^2 \left(p^2 + q^2\right)^2}{n^3 p^3 q^3}\right)^{1/6} = \left(\frac{\left(p^2 + q^2\right)^2}{pq}\right)^{1/6} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0$$

Условия теоремы Ляпунова выполнены, поэтому случайная величина $\zeta_n = m$ распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием $a = np$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{npq}$. Остаётся найти вероятность того, что случайная величина $\zeta_n = m$ будет заключена в пределах от m_1 до m_2, для чего воспользуемся формулой (2.34)

$$p(m_1 \le \xi \le m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2.78}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Тем самым обоснована интегральная теорема Муавра-Лапласа.

2. Ошибки измерений. Известно, что при повторении измерений одного и того же объекта, выполненных одним и тем же инструментом и с одинаковой тщательностью, мы не получаем одинаковых результатов. Разброс результатов измерений вызывается тем, что на процесс измерения влияют многочисленные факторы, которые невозможно и нецелесообразно учитывать. В этой ситуации ошибку, возникающую при измерении интересующей нас величины, часто можно рассматривать как сумму большого числа независимых между собой слагаемых, каждое из которых даёт лишь незначительный вклад в образование всей суммы. Но в таком случае мы находимся как раз в условиях применимости теоремы Ляпунова и можем ожидать, что распределение ошибки измеряемой величины мало отличается от нормального.

В более общем случае ошибка является функцией большого числа случайных аргументов, каждый из которых лишь немного отличается от своего математического ожидания. Линеаризируя функцию, то есть, заменяя её линейной, мы приходим к предыдущему случаю. Накопленный опыт по статистической обработке результатов измерений действительно подтверждает этот факт в большинстве практических случаев.

Аналогичные рассуждения поясняют появление нормального распределения в отклонении параметров, определяющих изделие, от нормативных значений при их массовом производстве.

Доска Гальтона.

Центральная предельная теорема (а точнее, её частный случай – теорема Муавра-Лапласа) может быть проиллюстрирована на простой механической модели (достаточно редкая в математике ситуация), представляющей наклонную плоскость, на которой в шахматном порядке установлены штифты (Рис. 2.17). Падающие из бункера через воронку шарики, диаметры которых несколько меньше расстояний между штифтами, после многократных столкновений со штифтами попадают в вертикальные накопительные ячейки. При каждом столкновении, а всего каждый шарик совершит их столько, сколько имеется рядов штифтов, шарик может отклониться или влево, или вправо, причём в силу симметрии эти два события равновозможны (Рис. 2.18).

Введём случайные величины ξ_i – индикаторов результата i-го столкновения, положив $\xi_i = 1$, если шарик отклоняется вправо, и $\xi_i = -1$, если влево. Закон распределения такой случайной величины, а также её числовые характеристики приведены ниже.

ξ_i	-1	1
p	0.5	0.5

$$a_i = M(\xi_i) = 0; \quad b_i^2 = M\left[(\xi_i - a_i)^2\right] = 1; \quad c_i^3 = M\left[|\xi_i - a_i|^3\right] = 1;$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = 0; \quad B_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \sqrt{n}; \quad C_n = \sqrt[3]{nc_i^3} = \sqrt[3]{n}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0$$

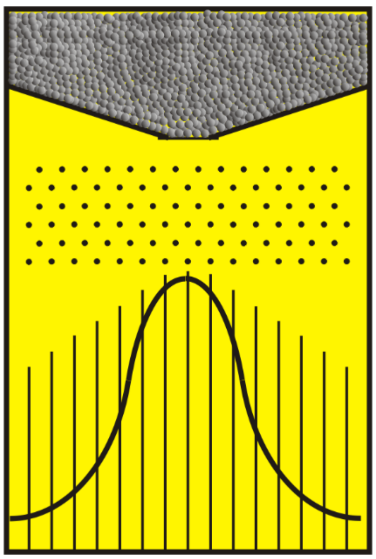


Рис. 2.17

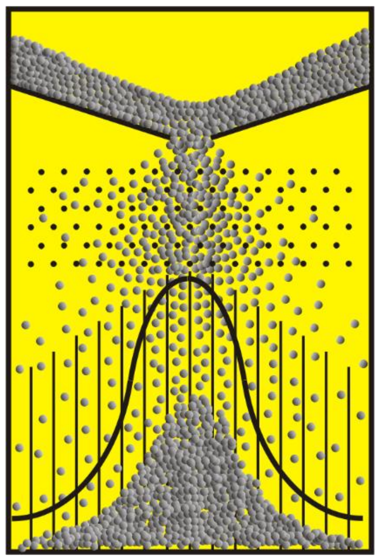


Рис. 2.18

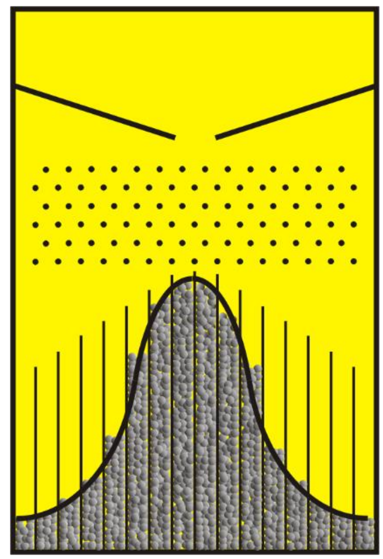


Рис. 2.19

Сумма $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ определяет абсциссу вертикальной ячейки, в которую после всех столкновений со штифтами попадёт шарик (при условии, что начало отсчёта помещено в середину воронки и горизонтальный шаг решётки штифтов равен 2). Очевидно, условия теоремы Ляпунова выполнены и поэтому ζ_n при достаточно большом n распределена почти нормально с параметрами $a = 0$ и $\sigma = \sqrt{n}$. Число шариков, оказавшихся в накопительных ячейках, согласно частотному смыслу вероятности будет пропорционально вероятности попадания шарика в соответствующую ячейку и тем самым – соответствующей ординате графика плотности нормального распределения. Поэтому линия, огибающая лежащие в ячейках шарики, будет отличаться от кривой Гаусса только масштабом. Опыт показывает, что даже при не очень большом числе рядов (n) полученная таким образом огибающая отчётливо воспроизводит эту кривую (Рис. 2.19).