<u>Глава 1.</u> СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Основные понятия и определения.

Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия стохастического эксперимента, случайного события и вероятности случайного события.

> ***Стохастическим называется эксперимент (опыт, испытание), результат которого заранее (до его проведения) предугадать нельзя.***

> ***Случайным событием называется любое явление, которое может произойти или не произойти в результате стохастического эксперимента.***

Пример 1.

Проводится опыт с бросанием двух игральных костей (кубики, каждая грань которых имеет метки − очки, соответствующие цифрам 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Результатом этого опыта − событием − может быть появление одной из пар чисел: (1, 1), (1, 2), ... , (6, 5), (6, 6), где первые и вторые числа равны числу очков, выпавших соответственно на первой и второй костях. Можно рассматривать и другие события, заключающиеся, например, в том, что сумма выпавших очков равна пяти, чётна, делится на три, и так далее.

Для обозначения случайных событий будем использовать большие буквы A, B, C и так далее, снабжая их при необходимости индексами.

> ***Система событий называется совокупностью элементарных событий, если: в результате опыта происходит одно и только одно элементарное событие; каково бы ни было случайное событие A, по наступившему элементарному событию можно сказать о том, произошло или не произошло A.***

Элементарные события обозначают греческой ω, снабжённой при необходимости индексом (ω_i), а их совокупность Ω − называют пространством элементарных событий.

В примере 1 в качестве элементарных событий можно рассматривать появление любой из пар чисел (a,b), где числа a и b равны числу очков, выпавших соответственно на первой и второй костях, причём они могут принимать значения от 1 до 6. Всего в этом опыте имеется 36 элементарных событий. В определённом смысле справедлива аналогия между пространством элементарных событий и R^3- трёхмерным векторным пространством. В R^3 роль элементарных векторов играют три вектора базиса и любой вектор из R^3можно выразить через базисные. Как и в векторной алгебре выбор базисных векторов (обычно берут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, но можно взять любые три некомпланарные вектора), выбор элементарных событий определяется неоднозначно, чем можно пользоваться при решении задач.

1.2. Алгебра событий

Пусть Ω − пространство элементарных событий рассматриваемого опыта. Для каждого возможного в этом опыте события A выделим совокупность всех элементарных событий, наступление которых необходимо влечёт наступление A. Будем говорить, что эти элементарные события благоприятствуют появлению A. Множество этих элементарных событий обозначим тем же символом A, что и соответствующее событие.

Таким образом, событие A состоит в том, что произошло одно из элементарных событий, входящих в указанное множество A. Другими словами, мы отождествляем событие A и соответствующее ему множество A элементарных событий.

Введём теперь ряд понятий и определений.

Событие называется достоверным (Ω)***, если оно наступает в результате появления любого элементарного события***.

Но тогда ему благоприятствует любое $\omega \in \Omega$ и в силу заключённого договора будем обозначать достоверное событие тем же символом Ω**.**

Событие называется невозможным $(\varnothing)$***, если оно не наступает ни при каком элементарном событии.***

Но тогда ему соответствует пустое множество и, поэтому, невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$**.**

Суммой (объединением) двух событий A и B называется событие A + B или $(A \cup B)$***, происходящее тогда и только тогда, когда происходит или A , или B.***

Сумме событий A и B соответствует объединение множеств A и B.

Отметим очевидные соотношения:

$$A+\varnothing=A; \quad A+\Omega=\Omega; \quad A+A=A.$$

Произведением* (*пересечением*) *двух событий A и B называется событие AB или* $(A\cap B)$, *происходящее тогда и только тогда, когда происходит и A , и B.

Произведению событий A и B соответствует пересечение множеств A и B. Отметим очевидные соотношения:

$$A\varnothing=\varnothing; \quad A\Omega=A; \quad AA=A.$$

Два события называются несовместными, если их одновременное появление в опыте невозможно. В этом случае $AB=\varnothing$.

Событие $\bar{A}$ ***называется противоположным к A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит A.***

Справедливы следующие свойства: $A+\bar{A}=\Omega;\ \ A\bar{A}=\varnothing;\ \ \bar{\bar{A}}=A.$

Разностью событий A ***и*** B ***назовём событие*** $A\backslash B$, ***происходящее тогда и только тогда, когда происходит*** A, ***но не происходит*** B**.**

Отметим очевидные соотношения:

$$\overline{A}=\Omega\setminus A; \quad A\setminus B=A\overline{B}.$$

Поскольку разность событий можно выразить с помощью операций отрицания и произведения, пользоваться разностью событий в дальнейшем не будем.

Таким образом, операциям над событиями соответствуют аналогичные операции над множествами.

Введённые выше операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

$$A+B=B+A; \quad AB=BA;$$

$$A(B+C)=AB+AC; \quad A(BC)=(AB)CA.$$

Пример 2.

Производятся два выстрела по цели. Пусть событие A − попадание в цель при первом выстреле, B − при втором, тогда $\bar{A}$ и $\bar{B}$ − промах соответственно при первом и втором выстрелах. Пусть событие C− поражение цели, при условии, что для этого достаточно хотя бы одного попадания. Выразить C через A и B.

Решение. Цель будет поражена в следующих случаях: попадание при первом и промах при втором, промах при первом и попадание при втором, попадание при первом и втором выстрелах. Интересующее нас событие заключается в наступлении или первого, или второго, или третьего вариантов (хотя бы одного). Используя введённые выше операции, получим: $C = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$. С другой стороны, событие $\bar{C}$, противоположное C, есть промах при двух выстрелах, то есть $\bar{C} = \bar{A}\cdot\bar{B}$, отсюда искомое событие C можно записать в виде $C = \overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}$. Возможность различного выражения искомого события часто оказывается полезной при решении задач.

Для лучшего восприятия введенных понятий и операций полезна геометрическая интерпретация − диаграммы Венна: пространство элементарных событий Ω изображается в виде квадрата, каждой точке которого соответствует элементарное событие. Тогда случайные события изображаются в виде некоторых фигур, лежащих в этом квадрате.

На Рис. 1.1−1.4 заштрихованные фигуры представляют:

$A + B$

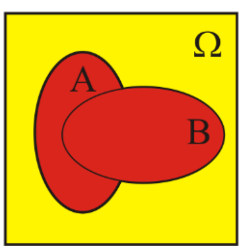

Рис. 1.1

AB

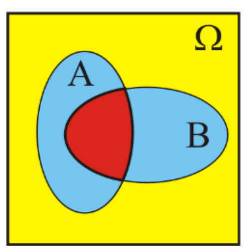

Рис. 1.2

$A\bar{B}$

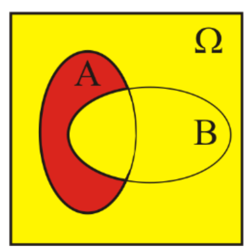

Рис. 1.3

$\bar{A}$

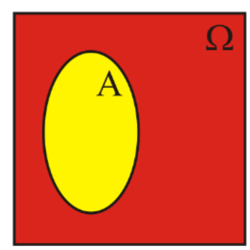

Рис. 1.4

Пусть Ω − пространство элементарных событий, соответствующих стохастическому эксперименту и пусть F − некоторая система случайных событий. ***Система событий F называется алгеброй событий, если выполняются условия***: $\Omega \in F$; ***из того, что*** $A \in F$ ***и*** $B \in F$ ***следует, что***:

$\bar{A} \in F$, $A+B \in F$ ***и*** $A \cdot B \in F$. Следовательно, применяя любые из введенных операций к произвольной системе событий из F, получим событие также принадлежащее F.

1.3. Определение вероятности

Если при многократном проведении одного и того же стохастического эксперимента событие A произошло $m(A)$ раз, то

относительной частотой называется отношение

$$\nu(A) = \frac{m(A)}{n}, \tag{1.1}$$

где n ***− число проведенных опытов***.

Легко убедиться в справедливости свойств: $0 \le \nu(A) \le N$; $\nu(\Omega) = 1$; если A и B несовместны, ($AB = \varnothing$), то $\nu(A+B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Относительная частота определяется только после проведения серии экспериментов и, вообще говоря, может меняться от серии к серии. Однако опыт показывает, что во многих случаях при увеличении числа опытов относительная частота приближается к некоторому числу. Этот факт устойчивости относительной частоты неоднократно проверялся и может считаться экспериментально установленным. Мы уже говорили, что если бросить две тонны монет, то одна тонна упадёт кверху гербом, то есть относительная частота выпадения герба равна 0,5.

Если при увеличении числа опытов относительная частота события $\nu(A)$ ***стремится к некоторому фиксированному числу*** $p(A)$***, то событие*** A ***стохастически устойчиво, а это число называют вероятностью события*** A***.***

Это определение называют статистическим определением вероятности.

Рассмотрим некоторый стохастический эксперимент, и пусть пространство его элементарных событий состоит из конечного или бесконечного (но счётного) множества элементарных событий $\omega_1; \omega_2; ...; \omega_i; ...$. Предположим, что каждому элементарному событию ω_i приписан некоторый «вес» $- p_i$, удовлетворяющий следующим условиям

$$p_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \right). \tag{1.2}$$

В этом случае p_i назовём вероятностью элементарного события ω_i.

Пусть A − случайное событие, наблюдаемое в опыте, и ему соответствует некоторое множество $A \subseteq \Omega$.

> ***Вероятностью случайного события A называется сумма вероятностей элементарных событий, благоприятствующих A* (входящих в соответствующее множество *A*):**

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i. \tag{1.3}$$

Введённая таким образом вероятность обладает теми же свойствами, что и относительная частота:

$$0 \leq p(A) \leq 1; \quad p(\Omega) = 1; \quad \text{если} \quad AB = \varnothing; \quad p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Действительно, согласно (1.3)

$$0 \leq p(A) = \sum_{(\omega_i \in A)} p_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i = p(\Omega) = 1;$$

$$p(A+B) = \sum_{(\omega_i \in A+B)} p_i = \sum_{(\omega_i \in A)} p_i + \sum_{(\omega_i \in B)} p_i = p(A) + p(B).$$

В последнем соотношении мы воспользовались тем, что ни одно элементарное событие не может благоприятствовать одновременно двум несовместным событиям.

Особо отметим, что теория вероятностей не указывает способов определения p_i, их нужно искать из соображений практического характера или получать из соответствующего статистического эксперимента.

В качестве примера рассмотрим классическую схему теории вероятностей. Для этого рассмотрим стохастический эксперимент, пространство элементарных событий которого состоит из конечного (n) числа элементов. Предположим дополнительно, что все эти дополнительные события равновозможны, то есть вероятности элементарных событий равны $p(\omega_i) = p_i = p$. Отсюда следует, что

$$p(\Omega)=1=\sum_{i=1}^{n} p_i = np \quad \text{или} \quad p = p_i = \frac{1}{n}.$$

Пусть теперь событию A благоприятствует m элементарных событий, их обычно называют благоприятными исходами. Тогда

$$p(A)=\sum_{\omega_i\in A} p_i = \frac{1}{n}m = \frac{m}{n}. \tag{1.4}$$

Таким образом,

> ***в классической схеме вероятность случайного события А равна отношению числа исходов, благоприятствующих А, к общему числу исходов.***

При подсчёте числа исходов часто используются некоторые правила и формулы комбинаторики, которые и приведём ниже.

Правило произведения. Если из некоторого множества A элемент a_i можно выбрать k_A способами, а элемент b_j из множества B – k_B способами, то совокупность (a_i, b_j) можно выбрать $k_A \cdot k_B$ способами. Правило верно и для совокупностей большего числа элементов.

Пример 3.

Сколькими способами можно набрать семизначный номер телефона, если все его цифры различны?

Решение. Очевидно, первую цифру можно набрать 10 способами, вторую − 9, так как одна цифра уже использована, ... , седьмую − 4. Согласно правилу произведения общее число возможных номеров равно 10·9·8·7·6·5·4 = 604800.

Если из некоторого множества, состоящего из $\boldsymbol{n}$ различимых элементов, отбираются в определённом порядке $\boldsymbol{m}$ элементов, то возможные варианты называют размещениями из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ и их число равно

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

При $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$ говорят о перестановках из $\boldsymbol{n}$ элементов, их число равно $P_n = n!$.

Если порядок отбираемых $\boldsymbol{m}$ элементов из $\boldsymbol{n}$ элементов не играет роли, то говорят о сочетаниях из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ и их число равно

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(m-n)!\cdot m!}.$$

Пример 4.

Сколькими способами можно из 20 присяжных заседателей отобрать трёх для участия в судебном процессе?

Решение. Поскольку не существенно, в каком порядке отобраны кандидатуры, число вариантов равно

$$C_{20}^3 = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140.$$

Пример 5.

Сколькими способами можно из 20 членов правления фирмы отобрать трёх для замещения вакансий вице-президентов, отвечающих за производство, финансы, реализацию продукции?

Решение. Поскольку порядок при таком выборе играет существенную роль, то число вариантов равно

$$A_{20}^3 = 20\cdot 19\cdot 18 = 6840.$$

Замечание. При большом $\boldsymbol{n}$ подсчёт числа вариантов по этим формулам требует громоздких вычислений, в этом случае пользуются асимптотической формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\cdot n\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Пример 6.

К экзамену подготовлены 30 теоретических вопросов и 50 задач. Определить вероятность того, что студент получит отлично, для чего надо правильно ответить на два теоретических вопроса и решить три задачи, выбранные случайным образом. Студент выучил 20 вопросов и умеет решать 30 задач.

Решение. В качестве пространства элементарных событий этого опыта возьмём множество всех наборов из двух вопросов и трёх задач. Поскольку выбор случаен, то все исходы равновозможны и применимо классическое определение вероятности. Для подсчёта $\boldsymbol{n}$ − числа исходов – заметим, что два теоретических вопроса можно выбрать C_{30}^{2}, а три задачи C_{50}^{3} способами (порядок следования здесь не важен). По правилу произведения общее число таких наборов будет равно $n = C_{30}^{2} \cdot C_{50}^{3}$. Событие A − отличная оценка − реализуется тогда, когда оба вопроса будут из 20 выученных и все три задачи из 30 ему известных. Число таких наборов − благоприятствующих A исходов − находится аналогично: $m(A) = C_{20}^{2} \cdot C_{30}^{3}$. Поэтому искомая вероятность равна

$$p(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{C_{20}^{2} \cdot C_{30}^{3}}{C_{30}^{2} \cdot C_{50}^{3}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{30 \cdot 29 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = 0.09.$$

Пример 7.

Среди K поставленных единиц данного товара L единиц не удовлетворяют предъявляемым условиям. Найти вероятность того, что среди $k \le K$ единиц, отобранных для выборочного контроля качества, ровно $l \le L$ не будут удовлетворять этим требованиям.

Решение. Опыт заключается в случайном отборе k образцов. Следовательно, исходы этого испытания равновозможны и их общее число равно $n = C_{K}^{k}$. Событие A состоит в том, что из k отобранных ровно l не будут удовлетворять этим требованиям. Число исходов, благоприятствующих A, согласно правилу произведения, равно $m(A) = C_{K-L}^{k-l} \cdot C_{L}^{l}$, здесь первый множитель даёт число вариантов отбора хороших, а второй – плохих образцов. Отсюда искомая вероятность равна

$$p(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{C_{K-L}^{k-l} \cdot C_{L}^{l}}{C_{K}^{k}}.$$

Предложенное выше определение вероятности наряду с очевидными достоинствами, прежде всего, простота и интуитивная наглядность, имеет и ряд существенных недостатков: оно предусматривает только конечное или счётное множество элементарных событий и обязательно знания их вероятностей. Всё это далеко не всегда имеет место, и поэтому введённое определение не является достаточно общим. Поэтому в настоящее время стало общепринятым аксиоматическое построение теории вероятностей.

Сформулируем теперь аксиомы теории вероятностей.

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого стохастического эксперимента и в пространстве Ω выделена система F событий, являющаяся алгеброй событий. Это означает, что

$\Omega \in F$;

если $A \in F$, ***то*** $\bar{A} \in F$;

если $A \in F$ ***и*** $B \in F$, ***то*** $A + B \in F$ ***и*** $AB \in F$.

Пусть каждому событию $A \in F$ поставлено в соответствие число $p(A)$ – вероятность случайного события A. Тогда

$p(A) \geq 0$ ***для любого*** $A \in F$;

$p(\Omega) = 1$;

если A ***и*** B ***несовместны,*** $(AB = \varnothing)$***, то,*** $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

В таком виде аксиоматика теории вероятностей была предложена А.Н. Колмогоровым и оказалась исключительно плодотворной для её развития. Введённая таким образом тройка (Ω, F, p) называется вероятностным пространством.

Рассмотрим в качестве примера так называемую геометрическую схему вероятностей. Для этого рассмотрим опыт, состоящий в бросании случайным образом точки на отрезок $[0;l]$, предполагая, что попадания в любую точку равновозможны. Пространство элементарных событий в этом эксперименте – все точки отрезка $[0;l]$ – Ω. Поскольку множество элементарных событий несчётно (бесконечное) и все они равновозможны, то для любого ω: $p(\omega) = 0$, то есть классическая схема неприменима. В этом случае припишем событию A –

попаданию брошенной точки на отрезок $\left[a;b\right]$, входящий в $\left[0;l\right]$, вероятность, пропорциональную его длине, то есть положим

$$p\left(A\right)=k\cdot\left(b-a\right),$$

где $\left(b-a\right)$ – длина отрезка. Коэффициент k найдём из условия нормировки:

$$p(\Omega)=k(l-0)=kl=1\Rightarrow k=\frac{1}{l}, \qquad p(A)=\frac{1}{l}(b-a) \tag{1.5}$$

Легко убедиться в справедливости всех аксиом.
Естественно, что вместо отрезка можно говорить о плоской фигуре, определив вероятность как отношение

$$p\left(A\right)=\frac{S\left(A\right)}{S\left(\Omega\right)}, \tag{1.6}$$

где $S\left(A\right)$ и $S\left(\Omega\right)$ – площади соответствующих фигур.

Пример 8.

Два лица − M и D договорились встретиться в определённом месте между 19 и 20 часами, причём появление любого из них равновозможно в любой момент этого часа. Найти вероятность того, что встреча состоится, если, когда первым на место встречи приходит M, то он ждёт не более 20 минут; а когда первым приходит D, то он ждёт не более 10 минут.

Решение. Пусть моменты прихода (отсчёт времени будем проводить в минутах от начала часа) M и D на место встречи будут x и y. Интересующее нас событие A произойдёт, если будет выполнена система неравенств (Рис. 1.5):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge y; \\ 0 \le x - y \le 20; \end{cases} \\ \begin{cases} x < y; \\ 0 \le y - x \le 10. \end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x - 20 \le y \le x; \\ x \le y \le 10 + x. \end{cases}$$

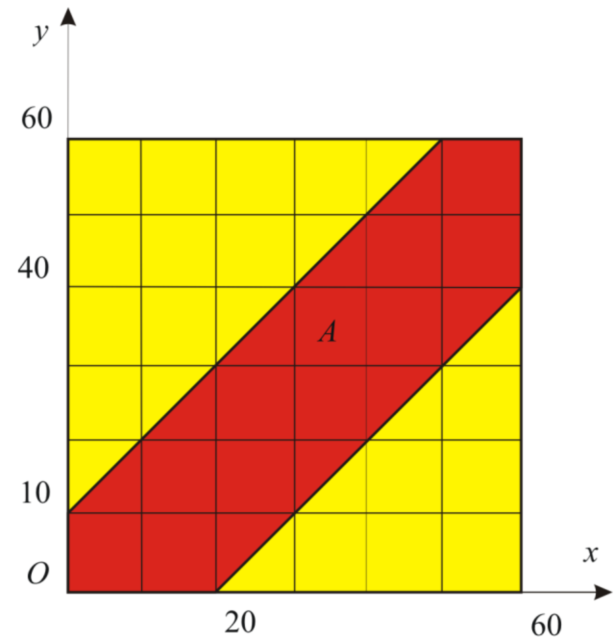

Рис. 1.5

где x и y определяют координаты точки в квадрате со стороной 60. По условию любое положение этой точки в квадрате равновозможно, поэтому вероятность события A − попадания точки в область A согласно геометрической схеме равна

$$p(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{60 \cdot 60 - 0,5 \cdot 50 \cdot 50 - 0,5 \cdot 40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = 0,43.$$

1.4. Некоторые теоремы

Рассмотрим ряд теорем, которые позволят нам в дальнейшем выразить вероятность одного события через вероятности других. Именно эта ситуация, когда по известным вероятностям одних событий требуется определить вероятность интересующего нас события, наиболее типична для задач теории вероятностей.

Вероятность противоположного события

Рассмотрим некоторое случайное событие A и пусть его вероятность $p(A)$ известна. Тогда вероятность противоположного события $\bar{A}$ определяется по формуле

$$p\left(\bar{A}\right)=1-p\left(A\right) \qquad (1.7)$$

<u>Доказательство</u>. В силу несовместности A и $\bar{A}$, учитывая аксиомы, получаем: $p(\Omega)=p\left(A+\bar{A}\right)=p(A)+p\left(\bar{A}\right)=1$ и, следовательно, $p\left(\bar{A}\right)=1-p(A)$.

<u>Следствие</u>: $p(\varnothing)=p\left(\bar{\Omega}\right)=1-p(A)=1-1=0$, то есть вероятность невозможного события равна нулю.

Вероятность суммы двух событий

Вероятность суммы двух случайных событий равна

$$p\left(A+B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(AB\right). \qquad (1.8)$$

<u>Доказательство</u>. Представим событие $A+B$ в виде суммы несовместных событий:

$$A+B=A+\Omega B=A+\left(A+\bar{A}\right)B=A+AB+\bar{A}B=A+\bar{A}B.$$

Учитывая несовместность A и $\bar{A}B$, получаем, согласно аксиомам,

$$p\left(A+B\right)=p\left(A+\bar{A}B\right)=p\left(A\right)+p\left(\bar{A}B\right). \qquad (1.9)$$

Аналогично находим

$$p\left(B\right)=p\left(AB+\bar{A}B\right)=p\left(AB\right)+p\left(\bar{A}B\right).$$ Отсюда: $$p\left(\bar{A}B\right)=p\left(B\right)-p\left(AB\right).$$

Подставляя последний результат в (1.9), получаем формулу (1.8).

Условная вероятность

В некоторых случаях необходимо определить вероятность случайного события B при условии, что произошло случайное событие A, имеющее ненулевую вероятность. То, что событие A произошло, сужает пространство элементарных событий до множества A, соответствующему этому событию. Дальнейшие рассуждения проведём на примере классической схемы. Пусть Ω состоит из n равновозможных элементарных событий (исходов) и событию A благоприятствует $m\left(A\right)$, а событию B – $m\left(AB\right)$ исходов. Найдём условную вероятность события B при условии, что A произошло – $p(B|A)$. По определению

$$p(A)=\frac{m(A)}{n}; \qquad p(AB)=\frac{m(AB)}{n}.$$

Если A произошло, то реализован один из $m(A)$ исходов, и событие B может произойти, только если произойдёт один из исходов, благоприятствующих AB, их же $m(AB)$. Поэтому естественно положить условную вероятность события B при условии, что A произошло, равной отношению

$$p(A|B)=\frac{m(AB)}{m(A)}=\frac{p(AB)}{p(A)}.$$

Условной вероятностью события B при условии, что событие A с ненулевой вероятностью произошло, называется

$$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(A)}. \tag{1.10}$$

Достаточно часто условную вероятность можно легко найти из условия задачи, в более сложных случаях приходится пользоваться определением (1.10).

***Пример* 9.**

Из 30 экзаменационных билетов студент подготовил только 25. Если он отказывается отвечать по первому взятому билету (который он не знает), то ему разрешается взять второй. Определить вероятность того, что второй билет окажется счастливым.

Решение. Пусть событие A заключается в том, что первый вытащенный билет оказался для студента "плохой", а B − "хороший". Поскольку после наступления события A один из "плохих" уже извлечён, то остаётся всего 29 билетов, из которых 25 студент знает. Отсюда искомая вероятность, предполагая, что появление любого билета равновозможно и билеты обратно не возвращаются, равна

$$p(A|B)=\frac{25}{29}.$$

Вероятность произведения

Соотношение (1.10), предполагая, что $p(A)$ или $p(B)$ не равны нулю, можно записать в виде

$$p(AB)=p(A)\cdot p\left(B\middle|A\right)=p(B)\cdot p\left(A\middle|B\right). \tag{1.11}$$

Это соотношение называют теоремой о вероятности произведения двух событий, которая может быть обобщена на любое число множителей, например, для трёх она имеет вид

$$p(ABC)=p(A)\cdot p\left(B\middle|A\right)\cdot p\left(C\middle|AB\right).$$

Пример 10.

По условиям примера 9 найти вероятность успешной сдачи экзамена, если для этого студент должен ответить на первый билет, или, не ответив на первый, обязательно ответить на второй.

Решение. Пусть события A и B заключаются в том, что соответственно первый и второй билеты ″хорошие″. Тогда $\bar{A}-$ появление ″плохого″ билета в первый раз. Экзамен будет сдан, если произойдёт событие A, или одновременно $\bar{A}$ и B. То есть искомое событие C − успешная сдача экзамена − выражается следующим образом: $C=A+\bar{A}B$. Отсюда

$$p(C)=p\left(A+\bar{A}B\right)=p(A)+p\left(\bar{A}B\right)=p(A)+p\left(\bar{A}\right)\cdot p\left(B\middle|\bar{A}\right)=\frac{25}{30}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}=0.997.$$

Здесь мы воспользовались несовместностью A и $\bar{A}$, а, следовательно, несовместностью A и $\bar{A}B$, формулами вероятностей суммы, произведения и классическим определением вероятности.

Эту задачу можно решить и проще, если воспользоваться вероятностью противоположного события:

$$p(C)=1-p\left(\bar{C}\right)=1-p\left(\bar{A}\cdot\bar{B}\right)=1-p\left(\bar{A}\right)\cdot p\left(\bar{B}\middle|\bar{A}\right)=1-\frac{5}{30}\cdot\frac{4}{29}=0.997.$$

Независимость событий

Случайные события A и B называются независимыми, если

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B). \tag{1.12}$$

Для независимых событий из формулы (1.12) следует, что $p(\bar{B}|\bar{A}) = p(B)$; справедливо и обратное утверждение.

Независимость событий означает, что наступление одного события не изменяет вероятности появления другого, то есть условная вероятность равна безусловной.

На практике пользуются правилом, согласно которому

из физической независимости событий следует их независимость в теоретико-вероятностном смысле*.*

Пример 11.

Абонент забыл последние три цифры нужного ему телефонного номера, но помнит, что все они нечётные. Найти вероятность того, что ему удастся дозвониться с первого раза.

Решение. Пусть события A, B и C заключаются в том, что соответственно первая, вторая и третья забытые цифры будут набраны верно, тогда вероятность успеха − события $D = ABC$ (должны произойти и A, и B, и C) будет равна

$$p(D) = p(ABC) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 0.008.$$

Здесь мы воспользовались независимостью событий, классическим определением и тем, что из пяти нечётных цифр подходит в каждом случае только одна.

Система событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется независимой в совокупности, если вероятность произведения равна произведению вероятностей для любой комбинации сомножителей из этой системы.

Формулы полной вероятности

Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие:

$$H_i \cdot H_j = \varnothing, \quad \text{если} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Такую совокупность называют полной группой событий.

Пусть теперь интересующее нас событие A наступает после реализации одного из событий H_i и известны вероятности $p(H_i)$; $p(A|H_i)$. В этом случае вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A|H_i). \tag{1.13}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что H_i (их обычно называют гипотезами) попарно несовместны (следовательно, несовместны и $H_i \cdot A$) и их сумма есть достоверное событие

$$p(A) = p(\Omega \cdot A) = p\left(\sum_{i=1}^{n} H_i \cdot A\right) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A|H_i).$$

Пример 12.

Определить вероятность того, что путник, вышедший из пункта А, попадёт в пункт В, если на развилке дорог он наугад выбирает любую дорогу (кроме обратной). Схема дорог указана на Рис. 1.6.

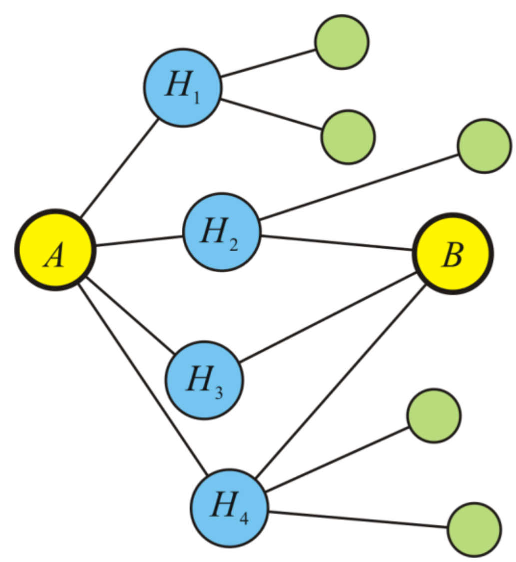

Рис. 1.6

Решение. Пусть приход путника в пункты H_1, H_2, H_3 и H_4 будут соответствующими гипотезами. Очевидно, что они образуют группу событий и по условию задачи

$$p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = p(H_4) = 0.25.$$

(Все направления из пункта А для путника равновозможны.)

Согласно схеме дорог условные вероятности попадания в B при условии, что путник прошёл через H_i, равны

$$p\left(B\middle|H_1\right)=0; \quad p\left(B\middle|H_2\right)=\frac{1}{2}; \quad p\left(B\middle|H_3\right)=1; \quad p\left(B\middle|H_4\right)=\frac{1}{3}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получаем:

$$p(B)=\sum_{i=1}^{4}p(H_i)\cdot p\left(B\middle|H_i\right)=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{24}.$$

Формула Байеса

Предположим, что при выполнении условий предыдущего пункта дополнительно известно, что событие A произошло. Найдём вероятность того, что при этом была реализована H_k гипотеза. По определению условной вероятности

$$p\left(H_k\middle|A\right)=\frac{p(H_kA)}{p(A)}=\frac{p(H_k)\cdot p\left(A\middle|H_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}p(H_i)\cdot p\left(A\middle|H_i\right)}. \tag{1.14}$$

Полученное соотношение называют формулой Байеса. Она позволяет по известным (до проведения опыта) априорным вероятностям гипотез $p(H_i)$ и условным вероятностям $p\left(A\middle|H_i\right)$ определить условную вероятность $p\left(H_k\middle|A\right)$, которую называют апостериорной (то есть полученной при условии, что в результате опыта A уже произошло).

Пример 13.

30% пациентов, поступивших в больницу, принадлежат к первой социальной группе, 20% − ко второй и 50% − к третьей. Вероятность заболевания туберкулёзом для представителей этих групп соответственно равны 0,02, 0,03 и 0,01. Определить вероятность того, что поступивший больной болен туберкулёзом. Проведенные анализы у поступившего больного показали наличие туберкулёза. Найти вероятность того, что это представитель третьей группы.

Решение. Пусть H_1, H_2, H_3 − гипотезы, заключающиеся в том, что пациент принадлежит соответственно первой, второй и третьей группам. Очевидно, они образуют полную группу событий, причём $p(H_1)=0.3;$ $p(H_2)=0.2;$ $p(H_3)=0.5$. По условию событие A, обнаружение у больного туберкулеза, произошло, причём, условные вероятности по данным условиям равны $p(A|H_1)=0.02;$ $p(A|H_2)=0.03;$ $p(A|H_3)=0.01.$ Апостериорную вероятность $p(H_3|A)$ вычисляем по формуле Байеса:

$$p(H_3|A)=\frac{p(H_3)\cdot p(A|H_3)}{\sum_{i=1}^{3} p(H_i)\cdot p(A|H_i)}=\frac{0.5\cdot 0.01}{0.3\cdot 0.02+0.2\cdot 0.03+0.5\cdot 0.01}=\frac{5}{17}.$$

1.5. Последовательность независимых однородных испытаний. Схема Бернулли

Рассмотрим стохастический эксперимент, который в свою очередь является последовательностью n независимых и однородных (одинаковых) испытаний, в результате каждого из которых может произойти событие A или ему противоположное $\bar{A}$ с вероятностями p и $q=1-p$. По условию результат любого испытания не зависит от его порядкового номера и от того, что произошло до него. Найдём вероятность $p_n(m)$ события $B_n(m)$, заключающегося в том, что в результате событие A появится ровно m раз. Очевидно, интересующее нас событие появится тогда, когда появится одно из следующих событий:

$$A_1\cdot\ldots\cdot A_m\cdot\bar{A}_{m+1}\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n;\ldots\ldots\ldots;\bar{A}_1\cdot\ldots\cdot\bar{A}_{n-m}\cdot\ldots\cdot A_{n-m+1}\cdot\ldots\cdot A_n$$

Здесь выписаны все комбинации из n сомножителей, из которых m множителей вида A и $n-m$ вида $\bar{A}$. Нижний индекс указывает на порядковый номер испытания. Поскольку $B_n(m)$ произойдёт тогда, когда произойдёт или первая, или вторая, …, или последняя комбинация, то

$$B_n(m)=A_1\cdot\ldots\cdot A_m\cdot\bar{A}_{m+1}\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n+\ldots+\bar{A}_1\cdot\ldots\cdot\bar{A}_{n-m}\cdot\ldots\cdot A_{n-m+1}\cdot\ldots\cdot A_n$$

В этой сумме имеется всего C_n^m (или C_n^{n-m}) таких комбинаций, поскольку m элементов типа A (или $n-m$ элементов типа $\bar{A}$) распределяются по n позициям. Поскольку все слагаемые в этой сумме попарно несовместны, а множители в каждом слагаемом независимы, то искомая вероятность будет равна сумме одинаковых слагаемых, каждое из которых содержит m множителей $p(A)=p$ и $n-m$ множителей $p(\bar{A})=q$. Учитывая, что всего слагаемых C_n^m, в итоге получаем формулу Бернулли:

$$p_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}. \tag{1.15}$$

При выводе этой формулы мы попутно показали, что $C_n^m=C_n^{n-m}$.

Рассмотрим бином Ньютона

$$(q+p)^n=C_n^0\cdot p^0\cdot q^n+C_n^1\cdot p^1\cdot q^{n-1}+...+C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}+...+C_n^n\cdot p^n\cdot q^0. \tag{1.16}$$

Очевидно, $p_n(m)$ равна соответствующему слагаемому в разложении бинома (здесь для общности мы будем полагать C_n^0 и 0! равными единице). Учитывая, что $(q+p)^n=1$, получаем:

$$\sum_{m=0}^{n}p_n(m)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}=1. \tag{1.17}$$

Вероятность события, заключающегося в том, что при n испытаниях A появится не менее m_1 и не более m_2 раз, вычисляется по формуле:

$$p_n(m_1\le m\le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2}C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}. \tag{1.18}$$

Пример 14.

Вероятность заболевания гриппом во время эпидемии равна 0.4. Найти вероятность того, что из шести сотрудников фирмы заболеет ровно четыре (не более четырёх).

Решение. Очевидно, имеет место схема Бернулли, где

$$p=0.4;\quad q=1-p=0.6;\quad n=4;\quad m=4\quad (m\le 4),$$

поэтому

$$p_6(4)=C_6^4\cdot 0.4^4\cdot 0.6^2=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 0.4^4\cdot 0.6^2=0.138.$$

На второй вопрос можно найти ответ двумя способами, используя теорему о вероятности противоположного события:

$$p_6(0 \le m \le 4) = 1 - p_6(5 \le m \le 6) =$$
$$= p_6(0) + p_6(1) + p_6(2) + p_6(3) + p_6(4) = 1 - p_6(5) - p_6(6) = 0.959.$$

Во втором случае вычисления проще и эту возможность полезно учитывать при решении задач.

Пример 15.

Вероятность того, что образец бетона выдержит нормативную нагрузку равна 0.9. Найти вероятность того, что из 7 образцов испытания выдержат: ровно пять образцов, не менее пяти образцов.

Решение. Очевидно, имеет место схема Бернулли, поэтому

$$p_7(5) = C_7^5 \cdot 0.9^5 \cdot 0.1^2 = 0.124; \qquad p_7(5 \le m \le 7) = p_7(5) + p_7(6) + p_7(7) = 0.974.$$

1.6. Асимптотические формулы

Применение формулы Бернулли при больших значениях n приводит к произведению очень больших $(n!)$ и очень малых чисел (p^m и q^{n-m}), что плохо с вычислительной точки зрения, поэтому приходится пользоваться приближёнными, асимптотическими формулами.

Формула Пуассона

Рассмотрим ситуацию, в которой число испытаний n в схеме Бернулли неограниченно увеличивается, а вероятность наступления события $p(A) = p$ в каждом испытании стремится к нулю таким образом, что произведение np остаётся величиной постоянной, которую обозначим $a = np$. В этом случае имеет место соотношение:

$$p_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} \cdot \mathrm{e}^{-a}. \qquad (1.19)$$

Доказательство. По формуле Бернулли

$$p_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\cdot p^m\cdot q^{n-m}.$$

Воспользуемся тем, что по условию $a=np$ или $p=\frac{a}{n}$ и $q=1-p=1-\frac{a}{n}$. Формула Бернулли принимает вид:

$$p_n(m)=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-m+1}{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=$$

$$\frac{a^m}{m!}\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-m+1}{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}$$

Так как a и m фиксированы, а n стремится к бесконечности, то множители $\left(1-\frac{1}{n}\right)$; … ; $\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$ и $\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}$ стремятся к единице, а множитель $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^{-a}$ стремится к e^{-a}. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}p_n(m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}.$$

Полученное выражение называется Пуассоновским приближением формулы Бернулли. Эта формула даёт хорошее приближение при достаточно большом n и малом p (например, $n>100$ и $a=np<10$).

Вероятность события, заключающегося в том, что A появится не более k раз, очевидно, вычисляется по формуле

$$p(m\le k)\approx e^{-a}\cdot\sum_{m=0}^{k}\frac{a^m}{m!}. \tag{1.20}$$

При проведении расчётов можно пользоваться тем, что обе формулы табулированы (Таблицы 1 и 2).

Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа

При достаточно большом n и не слишком малых p и q формула Пуассона уже даёт значительную погрешность и применяется другое приближение – формула Муавра-Лапласа, которую можно получить из формулы Бернулли, совершая предельный переход и применяя формулу Стирлинга для вычисления $n!$

$$p_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \text{где}\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \ \text{и}\ \ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.21)$$

Эта формула также табулирована (Таблица 3), причём в силу чётности функции $\varphi(x)=\varphi(-x)$, таблица её значений составлена только для $x\geq 0$.

Если при сохранении условий предыдущего пункта нас интересует вероятность того, что при n испытаниях событие A появляется не менее m_1 и не более m_2 раз, то формула (1.18) с учётом предельного перехода превращается в интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$p_n\left(m_1\leq m\leq m_2\right)\approx\Phi\left(x_2\right)-\Phi\left(x_1\right),$$

где

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}};\quad x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}};\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

и сумма превращается в интеграл. Функция $\Phi(x)$ – интеграл от $\varphi(x)$– называется функцией Лапласа и представляет собой не выражающийся через элементарные функции интеграл. Поскольку функция Лапласа нечётная ($\Phi(-x)=-\Phi(x)$) и быстро приближается к своему асимптотическому значению 0.5, то таблица её значений (Таблица 4) составлена для $0\leq x\leq 5$. Для больших значений аргумента с большой точностью можно принять $\Phi(x)=0.5$.

Пример 16.

При установившемся технологическом процессе 80% всех изделий, которые выпускает ЖБК, − изделия первого сорта. Найти вероятность того, что: из 100 поставленных изделий первосортных будет ровно 75, не менее 75.

Решение. Поскольку n = 100 велико, p = 0.8 и q = 0.2 не малы, применяем локальную и затем интегральную формулы Муавра-Лапласа

$$p_{100}(75 \le m \le 100) = \Phi\left(\frac{100-100\cdot 0.8}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right) - \Phi\left(\frac{75-100\cdot 0.8}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right) =$$
$$= \Phi(5) - \Phi(-1.2) = \Phi(5) + \Phi(1.2) = 0.5 + 0.385 = 0.885$$

Пример 17.

Известно, что при транспортировке и разгрузке керамической отделочной плитки повреждается 2.5% товара. Найти вероятность того, что в партии из 200 плиток повреждёнными окажутся ровно 4; не более 6.

Решение. Поскольку вероятность $p = 0.025$ повреждения плитки мала, $n = 200$ велико и $a = np = 5 < 10$, можно воспользоваться формулами Пуассона (1.19); (1.20), применяя таблицы 1 и 2:

$$p_{200}(4) = \frac{a^m}{m!}\cdot \mathrm{e}^{-m} = \frac{5^4}{4!}\cdot \mathrm{e}^{-5} = 0.1755;$$

$$p_{200}(m \le 6) \approx \mathrm{e}^{-a} \cdot \sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} = \mathrm{e}^{-5} \cdot \sum_{m=0}^{6} \frac{5^m}{m!} = 0.7622.$$

Пример 18.

Известно, что 30% призывников имеют 27 размер обуви. Сколько пар обуви надо иметь на складе воинской части, чтобы с вероятностью p_{o} = 0,9 были обеспечены все такие призывники, если в часть прибыло 200 новобранцев?

Решение. Очевидно, что имеет место схема Бернулли: подбор пары обуви каждому призывнику − одно из 200 испытаний, причём вероятность того, что ему потребуется обувь 27 размера равна $p = 0.3$ ($q = 0.7$). Пусто на складе имеется k пар обуви, где k пока не известно. Требуется подобрать такое k, чтобы $p_{200}(0 \le m \le k) \ge p_0$. Поскольку $n = 200$ велико, а p и q не малы, применяем интегральную формул Муавра-Лапласа

$$p_{200}(0\le m\le k)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{0-np}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{k-200\cdot 0.3}{\sqrt{200\cdot 0.3\cdot 0.7}}\right)-\Phi\left(\frac{0-200\cdot 0.3}{\sqrt{200\cdot 0.3\cdot 0.7}}\right)=\Phi\left(\frac{k-60}{6.48}\right)-\Phi\left(\frac{-60}{6.48}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{k-60}{6.48}\right)+\Phi(9.26)=\Phi\left(\frac{k-60}{6.48}\right)+0.5\ge 0.9.$$

Отсюда

$$\Phi\left(\frac{k-60}{6.48}\right)\ge 0.4;\qquad \frac{k-60}{6.48}\ge 1.28;\qquad k\ge 68.294.$$

То есть на складе достаточно иметь 69 пар обуви такого размера, чтобы с вероятностью 0.9 обеспечить спрос.

Пример 19.

Вероятность того, что зашедший в ресторан посетитель сделает заказ равна 0.8. Определить вероятность того, что из 100 зашедших посетителей ровно 75 сделают заказ; не менее 75 посетителей сделают заказ.

Решение. Поскольку $n=100$ велико, $p=0.8$ и $q=0.2$ не малы, применяем локальную и затем интегральную формулы Муавра-Лапласа

$$p_{100}(75)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\cdot\varphi\left(\frac{75-100\cdot 0.8}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right)=$$

$$=0.25\cdot\varphi(-1.25)=0.25\cdot\varphi(1.25)=0.23\cdot 0.1826=0.0457;$$

$$p_{100}(m \geq 75) = p_{100}(75 \leq m \leq 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) =$$

$$= \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) =$$

$$= \Phi(5) - \Phi(-1.2) = \Phi(5) + \Phi(1.2) = 0.5 + 0.385 = 0.885.$$

Простейший стационарный (Пуассоновский) поток событий

Пусть на некоторой прямой расположены точки так, что в среднем на единицу длины приходится μ точек. Последнее не следует понимать так, что на любой единичный отрезок приходится ровно μ точек, но если взять достаточно большой по длине отрезок $L >> 1$ и разделить число точек n, оказавшихся в нём, на его длину, то отношение $\frac{n}{L}$ при неограниченном увеличении L будет как угодно мало отличаться от μ, то есть μ играет роль средней плотности.

Вероятность того, что одна точка окажется на отрезке длины l, зависит только от его длины и не зависит от его расположения на прямой. Точки распределяются на прямой независимо друг от друга.

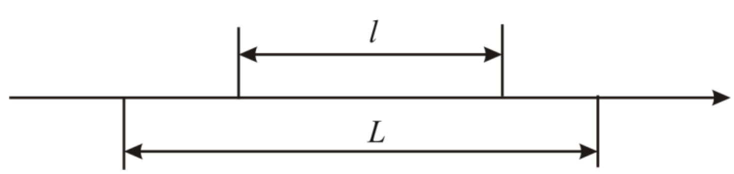

Рис.1.7

Определим теперь вероятность того, что ровно m точек окажется на отрезке длиной l. Для этого введём в рассмотрение отрезок L, целиком включающий в себя отрезок l, причём, $L >> 1$ (Рис.1.7). Согласно принятым допущениям на отрезке L расположено $n = \mu \cdot L$ точек, причём каждая из них может оказаться в любом месте отрезка L и все эти положения равновозможны. Вероятность того, что одна из этих точек окажется на отрезке l, согласно справедливой в этом случае геометрической схеме, равна $p = \frac{l}{L}$ и не зависит от того, какая из этих точек первая, вторая и т.д.

В результате мы пришли к схеме Бернулли (производится n испытаний, в каждом из которых мы следим за одной точкой, и любая из них с вероятностью p может оказаться на отрезке l). Поэтому вероятность того, что ровно m точек из n окажется на отрезке l, определяется по формуле Бернулли $p_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$, где $n=\mu\cdot L$; $p=\dfrac{l}{L}$. При неограниченном увеличении L, длина отрезка стремится к бесконечности, а p к нулю, но при этом величина $a=n\cdot p=\mu\cdot L\cdot\dfrac{l}{L}=\mu\cdot l$ остаётся постоянной. Следовательно, можно применять формулу Пуассона, которая в данном случае является точной, а не асимптотической:

$$p(m)=\frac{(\mu\cdot l)^m}{m!}\cdot \mathrm{e}^{-\mu\cdot l}=\frac{a^m}{m!}\cdot \mathrm{e}^{-a}. \tag{1.22}$$

Если нас интересует вероятность того, что на отрезке l окажется не менее k точек, то применяется формула

$$p(m\le k)=\mathrm{e}^{-a}\cdot\sum_{m=0}^{k}\frac{a^m}{m!}. \tag{1.23}$$

Разумеется, вместо отрезка на прямой можно рассматривать плоскость и некоторую её область, трёхмерный случай или вообще случай любого числа измерений, а также временной отрезок. В каждом из этих случаев a – среднее число элементов, приходящихся на рассматриваемую область.

Напомним, что формулы (1.22) и (1.23) табулированы (таблицы 1 и 2).

Пример 20.

На факультете учатся 500 студентов. Найти вероятность того, что первое сентября является днём рождения: трёх студентов, не менее трёх.

Решение. Пусть событие A − случайно выбранный студент родился первого сентября, тогда $p(A)=p=\dfrac{1}{365}$. В результате мы пришли к схеме Бернулли, где число испытаний n = 500 велико, а p мало (события редкие) и np = 1,37 < 10. Поэтому применяем формулы Пуассона

$$p_{500}(3)\approx\frac{1.37^3}{3!}\cdot \mathrm{e}^{-1.37}=0.11;\qquad p_{500}(m\ge 3)=1-p_{500}(m\le 2)\approx 1-0.84=0.16.$$

Здесь мы воспользовались таблицами 1 и 2 и во втором случае для этого перешли к противоположному событию.

Пример 21.

Известно, что в среднем за месяц (30 суток) в районной сети водоснабжения возникает 90 ситуаций, требующих оперативного вмешательства аварийной службы. На сколько вызовов в сутки должна быть рассчитана эта служба, чтобы с вероятностью $p_0 = 0.9$ она могла удовлетворить все поступающие за эти сутки заявки?

Решение. Предположим, что аварийная служба рассчитана на k заявок в сутки, где k пока не известно. Пусть m − число поступивших за сутки заявок. Тогда k найдём из условия $p(m \le k) \ge p_0$. Поскольку поток заявок представляет собой простейший стационарный (Пуассоновский) поток событий, то можно применить формулу Пуассона $p(m \le k) = e^{-a} \cdot \sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!}$, где $a = \frac{90}{30} = 3$ − среднее число заявок за сутки. Для определения k воспользуемся таблицей 2 при $a = 3$, подбирая k таким образом, чтобы искомая вероятность была не меньше, чем $p_0 = 0.9$. В результате получим $k = 5$, то есть аварийная служба должна быть рассчитана на 5 заявок в сутки.