М.Л. Каган, Т.С. Кузина, Т.А. Мацеевич.

Аналитическая геометрия

Предлагаемый электронный вариант учебного пособия подготовлен на основе книги М.Л. Кагана и М.В. Самохина «Математика в инженерном вузе. Алгебра и геометрия» (М. Стройиздат 2003 и последующие переиздания). Для удобства пользования электронными и бумажными вариантами сохранена нумерация разделов и задач.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Алгебра и геометрия, которые большинство школьников воспринимают как совершенно разные науки, на самом деле очень близки. С помощью метода координат можно было бы изложить весь школьный курс геометрии без единого чертежа, используя только числа и алгебраические операции. Геометрические фигуры при этом описывались бы системами уравнений и неравенств, а все теоремы геометрии превратились бы в алгебраические соотношения.

Установление связи между алгеброй и геометрией было, по существу, революцией в математике. Это позволило воспринимать математику как единую науку и способствовало её быстрому развитию. Создателем метода координат считают Рене Декарта. В последней части большого философского трактата Декарта, вышедшего в 1637 году, давалось описание метода координат и его применение к решению геометрических задач. Развитие идей Декарта привело к возникновению целой ветви математики, которую теперь называют аналитической геометрией. Само это название выражает основную идею теории. Аналитическая геометрия - это та часть математики, которая решает геометрические задачи аналитически.

Таким образом, метод координат переводит геометрические образы и соотношения на язык чисел. Однако чрезвычайно полезна и другая сторона метода - геометрическая интерпретация аналитических соотношений. Последним мы часто будем пользоваться в иллюстративных целях. Метод координат лежит в основе стремительно развивающейся компьютерной графики.

Итак, основная идея аналитической геометрии на плоскости заключается в соответствии между точками на плоскости и парами чисел, а в пространстве - между точками и тройками чисел. При этом можно перейти к аналитическому изучению геометрических объектов.

***Пример* 2.1**. Рассмотрим соотношение $y = x^2$. Это хорошо известная функция, а также уравнение, содержащее x и y. Этой функции, следовательно, и уравнению, на плоскости XOY соответствует вполне определённая линия - график функции. Из определения графика следует, что эта линия состоит из тех и только тех точек плоскости XOY , координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$.

В более общем случае даётся уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{2.1}$$

левая часть которого содержит x и y. В этом случае ***линией, определяемой уравнением* (*2.1*), *назовём геометрическое место точек плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют этому уравнению***.

Это означает, что координаты любой точки линии удовлетворяют уравнению (2.1), и наоборот, координаты любой точки, не принадлежащей линии, этому уравнению не удовлетворяют.

Не следует думать, что любое уравнение вида (2.1) определяет линию. Так, например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет единственную точку O(0, 0), а уравнение $x^2 + y^2 = -2$ вообще ничего геометрически не определяет.

Всё многообразие задач аналитической геометрии на плоскости можно разделить на два типа:

1. Задана линия на плоскости, требуется по её геометрическим свойствам получить её уравнение в виде (2.1).
2. Задано уравнение линии, требуется изучить свойства линии с помощью её уравнения.

***Пример* 2.2**. Выведем уравнение окружности радиусом R с центром в точке $M_o(x_o, y_o)$. Пусть $M(x, y)$- произвольная точка окружности, тогда свойство, определяющее окружность (рис. 2.1), можно записать так :

$$\left|\overline{M_o M}\right| = R .$$

Применив формулу расстояния между двумя точками, получим:

$$\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = R.$$

Возведя в квадрат, приходим к искомому уравнению

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2 .$$

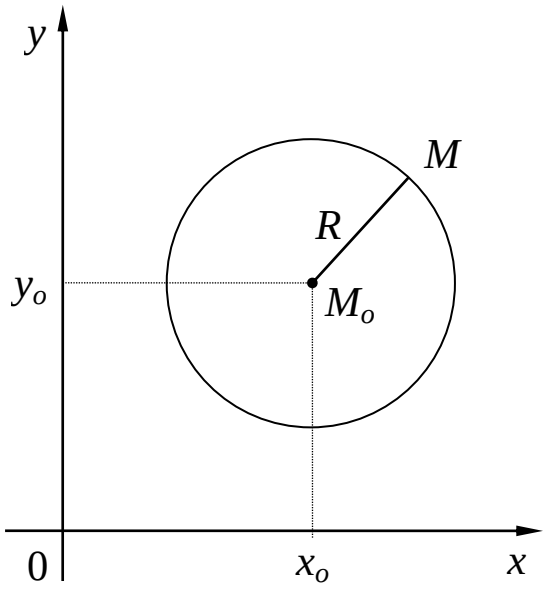

Рис. 2.1

Это и есть уравнение окружности, которому удовлетворяют координаты всех точек данной окружности и только этих точек.

2.2. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Приступим к более подробному изучению прямой линии на плоскости XOY. Вначале займёмся выводом уравнения прямой и, поскольку для приложений целесообразно иметь уравнения прямой в различных равносильных формах, выведем ряд таких уравнений.

1**. Уравнение прямой по заданным точке и угловому коэффициенту**. Требуется составить уравнение прямой L, проходящей через заданную точку $M_o(x_o, y_o)$ с заданным угловым коэффициентом k (рис. 2.2). Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой α к оси OX. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ этой прямой и найдём уравнение, связывающее её координаты. Для его вывода рассмотрим вектор $\overline{M_o M}$, который образует с осью OX в зависимости от взаимного расположения точек M и M_o угол α или $(\alpha - \pi)$. Найдём тангенс этого угла с помощью проекций вектора $\overline{M_o M}$ на оси координат.

$$n\,\text{p}_{ox}\, M_o M = x - x_o = \left|\overline{M_o M}\right| \cdot \cos\alpha, \qquad \Pi\text{p}_{ox} = x - x_o = \left|\overline{M_o M}\right| \cdot \cos(\alpha - \pi),$$

$$n\,\text{p}_{oy}\, M_o M = y - y_o = \left|\overline{M_o M}\right| \cdot \sin\alpha. \quad \text{или} \quad \Pi\text{p}_{oy} = y - y_o = \left|\overline{M_o M}\right| \cdot \sin(\alpha - \pi).$$

Предполагая, что $x - x_o \neq 0$, деля второе нижнее равенство на верхнее и учитывая, что $tg(\alpha - \pi) = tg\alpha$, получаем:

$$tg\alpha = \frac{y - y_o}{x - x_o}.$$

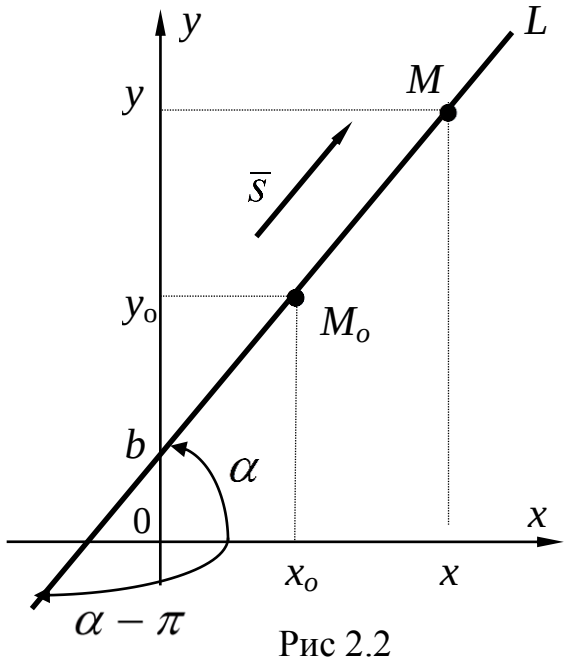

Рис 2.2

Заменяя $tg\alpha$ на k и преобразуя, приходим к искомому уравнению

$$y - y_o = k \cdot (x - x_o) \quad . \qquad (2.2)$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты только точек рассматриваемой прямой и никаких других. Следовательно, (2.2) является уравнением данной прямой. При выводе (2.2) предполагалось, что прямая L не параллельна оси OY $(x \neq x_o)$.

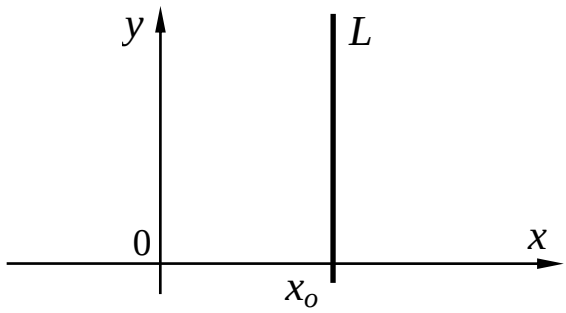

Рис 2.3

Выведем теперь уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o)$ параллельно оси OY . Очевидно, любая точка этой прямой имеет абсциссу, равную x_o, если же точка не лежит на этой прямой, то её абсцисса не будет равна x_o (рис. 2.3). Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид:

$$x=x_0 \qquad (2.3)$$

Поскольку уравнения (2.2) и (2.3) являются уравнениями первой степени относительно x и y, то тем самым доказано, что в декартовой системе координат любой прямой соответствует уравнение, линейное относительно текущих.
координат x и y.

Рассмотрим частные случаи.

Если точка M_o лежит на оси OY, то её координаты (0, y_o). Обозначив $y_o = b$, уравнение (2.2) можно записать в виде

$$y = k \cdot x + b \quad . \qquad (2.4)$$

Отрезок b, отсекаемый прямой L на оси OY, называют начальной ординатой (см. рис. 2.2), а (2.4) - уравнением прямой с заданными угловым коэффициентом и начальной ординатой.

Если прямая параллельна оси OY, то, как уже отмечалось, её уравнение имеет вид (2.3).

Если прямая параллельна оси OX , то $k = tg\alpha = 0$ и уравнение (2.2) упрощается:

$$y = y_o \qquad \text{или} \qquad y = b. \qquad (2.5)$$

При $x_o = 0$ или $y_o = 0$ уравнения (2.3) и (2.5) представляют соответственно уравнения координатных осей OY ($x = 0$) и OX ($y = 0$) .

***Пример* 2.3**. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(2, 1)$ и образующую с осью OX угол 135°, и уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Решение. В первом случае воспользуемся уравнением (2.2), учтя, что $k = tg135^o = -1$:

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 3 \quad .$$

Во втором случае, учитывая, что прямая проходит через начало координат O(0, 0) и образует с осью OX угол 45° $(k = tg45^o = 1)$, получаем $y = x$.

2. **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Составим уравнение прямой, проходящей через точку M_1 с произвольным угловым коэффициентом k. В дальнейшем такое уравнение будем называть уравнением пучка прямых, проходящих через точку M_1:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1). \tag{2.6}$$

Из этого пучка выделим прямую, проходящую через M_2, для чего воспользуемся тем, что координаты M_2 должны удовлетворять (2.6). Из этого условия и найдём неизвестный угловой коэффициент:

$$y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставив найденное k в (2.6), получим искомое уравнение

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \text{или} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.7}$$

Выводя (2.7), мы предполагали, что $x_2 \neq x_1$ и $y_2 \neq y_1$. Геометрически это означает, что прямая, проходящая через точки M_1 и M_2 не параллельна ни одной из координатных осей. Если же $x_2 = x_1$, то прямая параллельна оси OY, если $y_2 = y_1$ - то оси OX. Все эти случаи можно объединить, если условиться при равенстве нулю одного из знаменателей в (2.7) считать равным нулю и соответствующий числитель.

***Пример* 2.4**. Составить уравнения прямых, проходящих через точки $M_1(1, 3)$, $M_2(2, 5)$ и $M_3(2, 3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (2.7):

$$M_1M_2 \quad : \quad \frac{y-3}{5-3} = \frac{x-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 1;$$

$$M_1M_3 \quad : \quad \frac{y-3}{3-3} = \frac{x-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad y = 3;$$

$$M_2M_3 \quad : \quad \frac{y-5}{3-5} = \frac{x-2}{2-2} \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

3. **Уравнение прямой по точке и направляющему вектору**. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o)$ параллельно вектору $\bar{s} = (m, n)$. Очевидно, векторы $\overline{M_oM}$ и $\bar{s}$ коллинеарны (см. рис. 2.2). Воспользовавшись условием коллинеарности векторов (1.13), получим искомое уравнение

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n}. \tag{2.8}$$

Рассматривая в качестве направляющего вектор $\overline{M_1M_2}$, из (2.8) легко можно получить (2.7).

4**. Общее уравнение прямой**. В первом пункте мы показали, что прямой в декартовой системе координат соответствует линейное уравнение относительно x и y.Верно и обратное утверждение: ***любое уравнение первой степени относительно декартовых текущих координат есть уравнение некоторой прямой***. Для доказательства рассмотрим уравнение первой степени относительно декартовых координат

$$Ax + By + C = 0. \tag{2.9}$$

Возможны два случая:

1. $B \neq 0$, тогда уравнение (2.9) равносильно

$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}. \tag{2.10}$$

Но это уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой соответственно равными $k = \frac{A}{B}$ и $b = -\frac{C}{B}$. Следовательно, (2.10) и равносильное ему (2.9) являются уравнениями прямой.

2. $B = 0$,тогда уравнение (2.9) принимает вид

$$Ax + C = 0. \tag{2.11}$$

При этом $A \neq 0$ (в противном случае (2.9) не являлось бы уравнением) и (2.11) можно переписать в виде $x = -\frac{C}{A}$. (2.12)

Но это уравнение прямой, параллельной оси OY и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$. Следовательно, (2.12) и равносильное ему (2.9) и в этом случае являются уравнениями прямой.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $B = 0$, этот случай уже рассматривался, уравнение приводится к виду $x = -\frac{C}{A}$ и определяет прямую, параллельную оси OY ;

б) $A = 0$, уравнение приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$ и определяет прямую, параллельную оси OX ;

в) $C = 0$, уравнение приводится к виду $A \cdot x + B \cdot y = 0$ и, как легко проверить, определяет прямую, проходящую через начало координат ;

г) $A = C = 0$ и $B \neq 0$, уравнение приводится к виду $y = 0$ и определяет прямую, параллельную оси OX и проходящую через начало координат, то есть саму ось OX ;

д) $B = C = 0$ и $A \neq 0$, уравнение приводится к виду $x = 0$ и определяет ось OY .

Некоторые задачи на прямую

1**. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности**. Рассмотрим две прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями $y = k_1 \cdot x + b_1$ и $y = k_2 \cdot x + b_2$. Найдём тангенс угла между этими прямыми, предполагая, что он не равен 90° (в противном случае тангенс этого угла не существует). Пусть прямые L_1 и L_2 образуют с осью OX соответственно углы α_1 и α_2 , тогда $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис 2.4). Определим теперь тангенс φ :

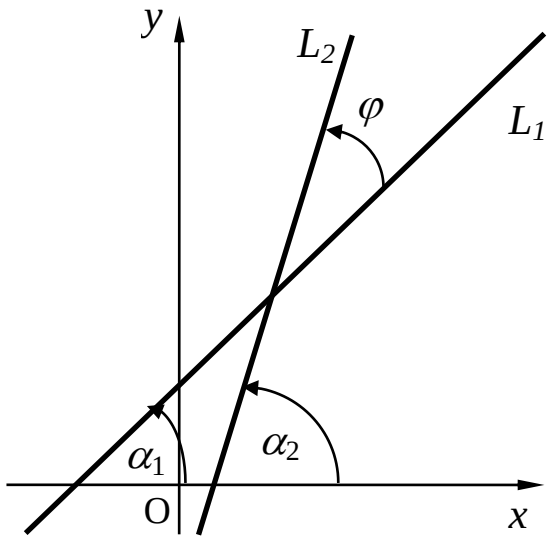

Рис. 2.4

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} .$$

Учитывая, что $tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$, получим

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} . \qquad (2.13)$$

Разберём теперь некоторые частные случаи.

Полученная формула теряет смысл, если хотя бы одна из прямых параллельна оси OY . В этом случае, считая, что оси OY параллельна прямая L_2 , угол между прямыми можно найти по формуле

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 .$$

Для параллельности двух прямых необходимо и достаточно равенство их угловых коэффициентов (***условие параллельности***):

$$k_1 = k_2 .$$

Действительно, если прямые параллельны, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и $k_1 = k_2$. Обратно, если $k_1 = k_2$, то угол между прямыми согласно (2.13) равен нулю и, следовательно, прямые параллельны.

В случае перпендикулярности прямых $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, откуда получим: $tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1$. Последнее можно записать в виде

$tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad k_1 \cdot k_2 = -1$ - ***условие перпендикулярности***.

Это, как легко проверить, есть необходимое и достаточное условие перпенди-

кулярности двух прямых.

Если две прямые заданы в виде (2.8), то угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, а условия параллельности и перпендикулярности прямых вытекают из условий коллинеарности и ортогональности этих векторов. Используя формулы (1.20) , (1.13) и (1.21), получим:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}};$$

$$\left(L_1 \| L_2\right) \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad , \quad \left(L_1 \perp L_2\right) \;\Rightarrow\; m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_2 = 0. \qquad (2.14)$$

Полученные формулы справедливы уже для любого расположения прямых и поэтому в ряде случаев более удобны. Если прямая задана не в виде (2.8), то соответствующее уравнение необходимо привести к этому виду. Пусть, например, прямая задана в виде (2.9). Проведя несложные преобразования, получим

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x - \left(-\dfrac{C}{A}\right)}{B} = \frac{y}{-A},$$

отсюда находим направляющий вектор прямой $\bar{s} = (m, n) = (B, -A)$.

2**. Пересечение двух прямых**. На самом деле мы решим более общую задачу о взаимном расположении двух прямых. Пусть эти прямые заданы в общем виде: L_1: $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и L_2: $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$. Если точка пересечения этих прямых существует, то её координаты должны удовлетворять уравнению каждой прямой, следовательно, для их нахождения надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно x и y, получим:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}, \qquad (2.15)$$

где Δ, Δ_x и Δ_y - определители второго порядка, составленные из коэффициентов системы.

Возможны три случая:

а) $\Delta \neq 0$, тогда существует единственное решение: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ определяющее координаты точки пересечения прямых. Раскрыв определитель Δ и проведя некоторые преобразования, получим:

$$\Delta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{A_1}{B_1} \neq -\frac{A_2}{B_2} \quad \Rightarrow \quad k_1 \neq k_2 \ ,$$

откуда следует, что прямые не параллельны;

б) $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, в этом случае система (2.15) не совместна, решения нет, прямые не пересекаются. Проведя выкладки, аналогичные предыдущим, можно показать, что прямые параллельны;

в) $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$, в этом случае и $\Delta_y = 0$. Действительно, из условия $\Delta = 0$ вытекает, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, а из $\Delta_x = 0$ следует, что $A_1 \cdot C_2 = A_2 \cdot C_1$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}$, следовательно, $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ или $\Delta_y = 0$. Система (2.15) имеет бесчисленное множество решений, любая точка одной прямой имеет координаты, удовлетворяющие уравнению другой прямой. Следовательно, прямые совпадают.

Используем полученные результаты для построения прямой, заданной общим уравнением (2.9). Случаи, когда некоторые коэффициенты A, B или C равны нулю, были рассмотрены ранее. Найдём точки пересечения прямой с осями координат, учитывая, что все коэффициенты не равны нулю, решив для этого две системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 0 \quad , \\ A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = -\dfrac{C}{A} \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad , \\ A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -\dfrac{C}{B} \end{cases} .$$

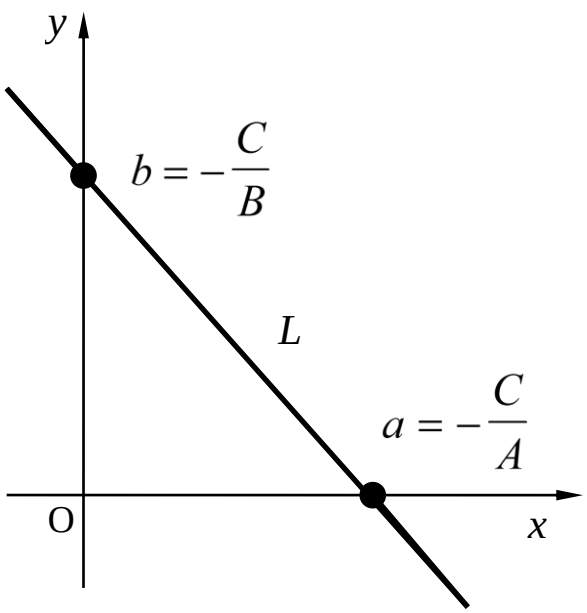

Рис. 2.5

По найденным точкам строим прямую L (рис 2.5). Если разделить обе части уравнения на C и обозначить $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, то уравнение прямой можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Здесь a и b - отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях. Поэтому полученное уравнение называется уравнением прямой в отрезках.

3. **Расстояние d от точки $M(x_o, y_o)$ до прямой** $L: \quad A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ определяется формулой

$$d = \frac{\left|A \cdot x_o + B \cdot y_o + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

которая будет обоснована далее.

***Пример* 2.5**. Найти длину высоты AE треугольника с вершинами в точках $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ и $C(2, 3)$.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки B и C (рис. 2.6).

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-2}{-2-2} \quad \Rightarrow \quad x - 2 \cdot y + 4 = 0.$$

Длину высоты AE находим как расстояние от точки A до прямой BC:

$$|AE| = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

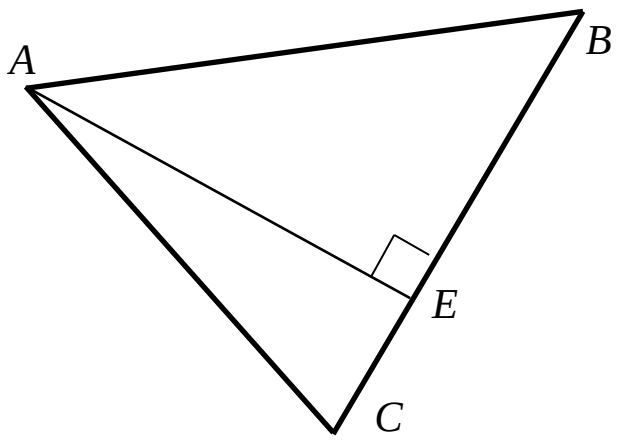

Рис. 2.6

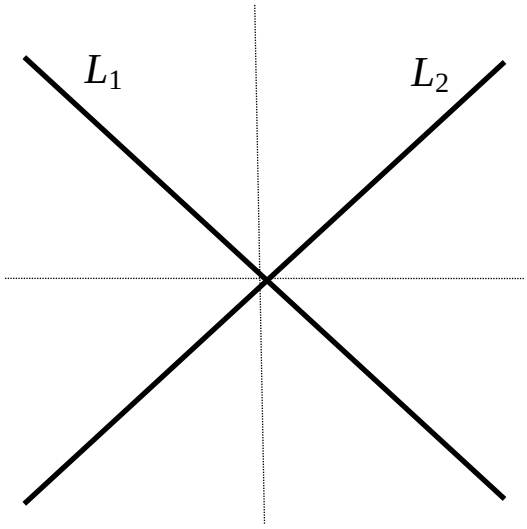

Рис. 2.7

***Пример* 2.6**. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $L_1: \quad 3 \cdot x - 4 \cdot y - 2 = 0$ и $L_2: \quad 5 \cdot x + 12 \cdot y - 1 = 0$ (рис. 2.7).

Решение. Воспользуемся тем, что биссектриса угла есть геометрическое множество точек, равноудалённых от сторон угла. Пусть точка M искомой биссектрисы имеет координаты x_o и y_o. Находим расстояния от этой точки до первой и второй прямых:

$$d_1 = \frac{\left|3 \cdot x_o - 4 \cdot y_o - 2\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\left|3 \cdot x_o - 4 \cdot y_o - 2\right|}{5}, \quad d_2 = \frac{\left|5 \cdot x_o + 12 \cdot y_o - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{\left|5 \cdot x_o + 12 \cdot y_o - 1\right|}{13}.$$

Приравняв найденные величины, получим:

$$\frac{\left|3 \cdot x_o - 4 \cdot y_o - 2\right|}{5} = \frac{\left|5 \cdot x_o + 12 \cdot y_o - 1\right|}{13}.$$

Это уравнение, содержащее модули, эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{3\cdot x_o-4\cdot y_o-2}{5}=\frac{5\cdot x_o+12\cdot y_o-1}{13} \quad \text{и} \quad \frac{3\cdot x_o-4\cdot y_o-2}{5}=-\frac{5\cdot x_o+12\cdot y_o-1}{13}.$$

Упростив последние выражения и опуская индекс $_o$, получим уравнения искомых биссектрис: $2\cdot x-16\cdot y-3=0$ и $64\cdot x+8\cdot y-31=0$.

2.3. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. **Геометрический смысл уравнения с тремя переменными**. Подобно тому, как на плоскости XOY уравнение $F(x, y) = 0$, вообще говоря, определяет некоторую линию, так и уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \tag{2.16}$$

как правило, определяет в пространстве OXYZ некоторую поверхность как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (2.16). Уравнение (2.16) в дальнейшем будем называть уравнением поверхности, а x, y и z - текущими координатами. Заметим, что не каждое уравнение на самом деле определяет поверхность. В качестве примера приведём уравнение $(x-1)^2+(y-1)^2=0$. Легко заметить, что этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, проходящей через точку $M_o(1, 1, 0)$ параллельно оси OZ, и не удовлетворяют координаты любых других точек.

В аналитической геометрии в пространстве, так же, как и на плоскости, можно выделить две основные задачи:

1. Поверхность задана как геометрическое место точек, обладающих определённым (геометрическим) свойством. Требуется получить уравнение этой поверхности.

2. Поверхность задана уравнением, с помощью которого требуется изучить свойства поверхности.

В качестве примера первой задачи рассмотрим вывод уравнения сферы радиусом R с центром в точке $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Как известно, сфера есть геометрическое место точек, равноудалённых от её центра. Вычисляя расстояние от произвольной точки $M(x, y, z)$ до центра M_o, воспользовавшись соответствующей формулой, и возводя в квадрат обе части полученного выражения, приходим к уравнению

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2 \quad . \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) является уравнением сферы, так как ему удовлетворяют координаты любой точки сферы и, как легко показать, не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной сфере.

Характерной особенностью сферы, как и окружности на плоскости, является отсутствие в их уравнениях членов, содержащих произведения текущих координат.

II. **Уравнение плоскости**. В этом пункте мы выведем различные равносильные уравнения плоскости, каждое из которых имеет свою область приме-

нения.

1. **Уравнение плоскости по заданным точке и нормальному вектору**. Рассмотрим плоскость Q в пространстве OXYZ. Её положение вполне определяется заданием вектора $\overline{N}$, перпендикулярного этой плоскости, и некоторой фиксированной точкой $M_o(x_o, y_o, z_o)$, лежащей в этой плоскости. Будем считать, что $\overline{N}$, который в дальнейшем будем называть вектором-нормалью к плоскости, задан в координатной форме $\overline{N} = (A, B, C)$. Для вывода уравнения плоскости рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ плоскости Q и заметим, что Q есть геометрическое место точек, удовлетворяющих следующему условию: вектор $\overline{M_o M}$ ортогонален вектору-нормали $\overline{N}$ плоскости Q. Используя условие ортогональности векторов $\overline{N} \cdot \overline{M_o M} = 0$ и переходя к его координатной форме, получаем уравнение плоскости с заданной нормалью $\overline{N}$, проходящей через точку M_o:

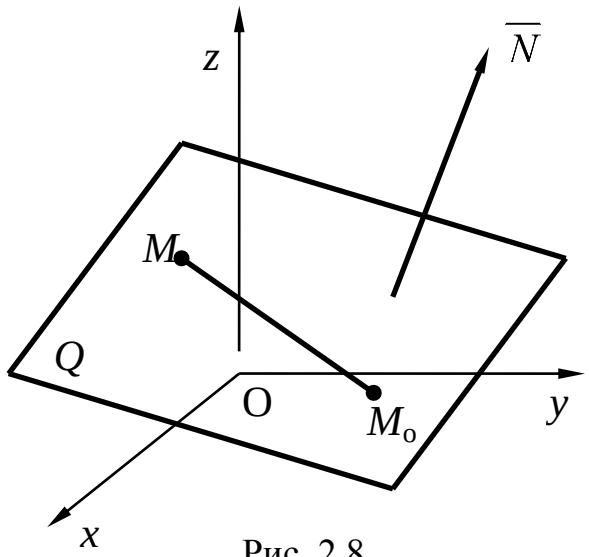

Рис. 2.8

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \qquad (2.18)$$

Тем самым показано, что координаты любой точки плоскости удовлетворяют уравнению (2.18). Координаты же любой точки M, не принадлежащей Q, этому уравнению не удовлетворяют, так как в этом случае $\overline{N} \cdot \overline{M_o M} \neq 0$. Следовательно, (2.18) является уравнением плоскости Q. Это уравнение первой степени относительно текущих координат x, y, z. Тем самым доказано, что ***любой плоскости соответствует уравнение первой степени относительно декартовых текущих координат***.

Придавая коэффициентам A, B и C в уравнении (2.18) различные значения, то есть рассматривая различные нормальные векторы $\overline{N}$, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_o. ***Совокупность плоскостей, проходящих через точку M_o, называется связкой плоскостей, а уравнение (2.18), где коэффициенты A, B, C могут принимать любые значения, называется уравнением связки плоскостей***.

2.**Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки**. Как известно, плоскость Q вполне определяется тремя точками, принадлежащими этой плоскости, но не лежащими на одной прямой. Пусть даны три точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, удовлетворяющие этому условию. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ плоскости Q и введём три вектора:

$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Поскольку точки M_1, M_2 , M_3 и M лежат в одной плоскости, то эти векторы компланарны и, следовательно, их смешанное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} (x - x_1) & (y - y_1) & (z - z_1) \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \end{vmatrix} = 0 \quad . \tag{2.19}$$

Если точка M не принадлежит плоскости Q , то векторы не компланарны и равенство (2.19) не выполняется. Следовательно, (2.19) есть уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Если бы точки M_1, M_2 и M_3 лежали на одной прямой, то векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M}$ были бы компланары для любой точки M пространства OXYZ. Но в этом случае определитель равнялся бы нулю тождественно и уравнение (2.19) не определяло бы плоскость.

3**. Общее уравнение плоскости**. Выше мы показали, что любой плоскости соответствует уравнение первой степени (линейное) относительно текущих декартовых координат. Покажем, что верно и обратное: ***любому уравнению первой степени относительно x, y и z соответствует некоторая плоскость***. Для доказательства рассмотрим уравнение

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0. \tag{2.20}$$

Хотя бы один из коэффициентов A , B или C не равен нулю, так как в противном случае (2.20) уже не будет являться уравнением. Предположим для определённости, что $A \neq 0$ и преобразуем (2.20) следующим образом:

$$A \cdot \left(x - \frac{-D}{A}\right) + B \cdot (y - 0) + C \cdot (z - 0) = 0 \quad .$$

Полученное уравнение, равносильное (2.20), имеет тот же вид, что и (2.18), и, следовательно, является уравнением плоскости, проходящей через точку $M\left(\frac{-D}{A}, 0, 0\right)$ с нормальным вектором $\overline{N} = (A, B, C)$. Это и доказывает наше утверждение. Уравнение (2.20) будем называть общим уравнением плос-

кости.

Кратко, опуская несложные выкладки, рассмотрим частные случаи:

а) $D = 0$ - плоскость Q проходит через начало координат;

б) Один из коэффициентов A , B или C равен нулю - плоскость Q параллельна той оси, текущая координата которой отсутствует в уравнении;

в) Один из коэффициентов A , B или C и свободный член D равны нулю - плоскость Q проходит через ось, соответствующую отсутствующей в уравнении координате;

г) Два из трёх коэффициентов A , B или C равны нулю - плоскость Q параллельна соответствующей координатной плоскости;

д) Два из трёх коэффициентов A , B или C и свободный член D равны нулю - плоскость Q совпадает с соответствующей координатной плоскостью.

Некоторые задачи на плоскость

1. **Угол между плоскостями**.

Пусть даны две плоскости

$$Q_1 : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \quad ,$$

$$Q_2 : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \quad .$$

Как известно, под углом между двумя плоскостями понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол φ между нормальными векторами $\overline{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ равен одному из этих углов (рис. 2.9), поэтому

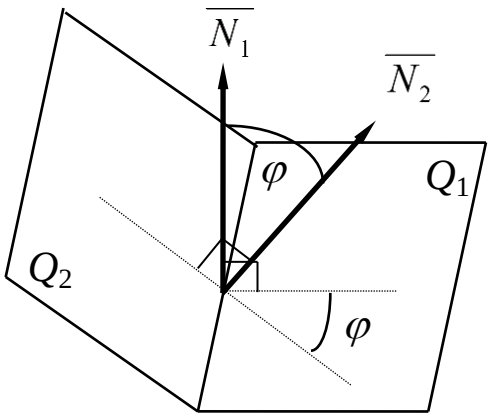

Рис. 2.9

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей можно легко получить из условий коллинеарности и ортогональности их нормальных векторов.

Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их нормальные векторы. Таким образом, ***для параллельности двух плоскостей необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при соответствующих текущих координатах были пропорциональны***:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad . \tag{2.21}$$

Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их нормальные векторы. Таким образом, ***для перпендикулярности двух плоскостей необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений коэффициентов при одноименных текущих координатах равнялась нулю***:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

***Пример* 2.7**. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(-2, 1, 4) параллельно плоскости $3x+2y-7z+8=0$.

Решение. Воспользуемся уравнением (2.18) связки плоскостей, проходящих через точку M. Неизвестные коэффициенты определим из условия параллельности плоскостей: $\frac{A}{3}=\frac{B}{2}=\frac{C}{-7}$. Это условие будет выполнено, если положить, например, A = 3, B = 2 и C = -7 (конечно, возможны и другие варианты). Подставив найденные коэффициенты в уравнение связки, получим искомый результат: $3(x+2)+2(y-1)-7(z-4)=0$ или $3x+2y-7z+32=0$.

2. **Расстояние от точки до плоскости**. Рассмотрим точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и плоскость Q, заданную уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Найдём расстояние d от точки M_o до плоскости Q (рис. 2.10). Для этого рассмотрим вектор-нормаль $\overline{N}=(A,B,C)$ к плоскости Q и вектор $\overline{M\,M_o}=(x_o-x, y_o-y, z_o-z)$, где $M(x, y, z)$ - некоторая точка плоскости Q. Очевидно, расстояние от точки M_o до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{MM_o}$ на направление нормали: $d=\left|\Pi\text{р}_{\overline{N}}\,\overline{MM_o}\right|=\frac{\left|\overline{N}\cdot\overline{MM_o}\right|}{\left|\overline{N}\right|}$. Перейдя к координатам, получим

$$d=\frac{\left|A\cdot(x_o-x)+B\cdot(y_o-y)+C\cdot(z_o-z)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|A\cdot x_o+B\cdot y_o+C\cdot z_o-(A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

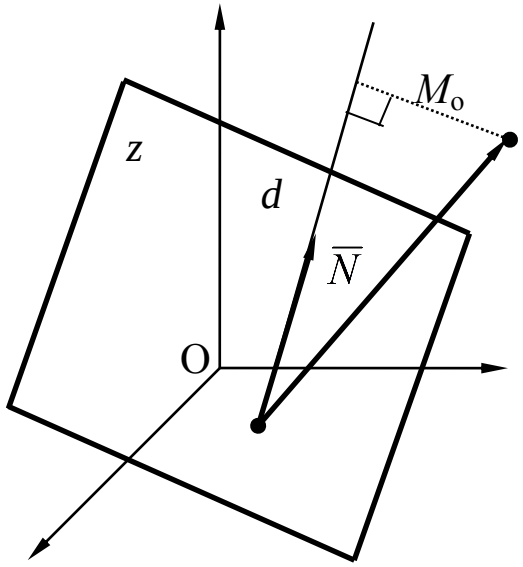

Рис. 2.10

Учитывая, что точка M принадлежит Q и её координаты удовлетворяют уравнению плоскости, заменим $-(A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z)$ на D, что даёт

$$d=\frac{\left|A\cdot x_o+B\cdot y_o+C\cdot z_o+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (2.22)$$

Замечание 1. Из формулы (2.22) можно извлечь дополнительную информацию, если обратить внимание на то, что знак выражения $Ax_o+By_o+Cz_o+D$ совпадает со знаком проекции вектора $\overline{M\,M_o}$ на направление нормали $\overline{N}$. Последнее позволяет судить о расположении двух (и более) точек M_1 и M_2 относительно плоскости Q. Если обе точки находятся по одну сторону от Q, то выражения $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ и $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ будут иметь один и

тот же знак, в противном случае их знаки будут различны.

Замечание 2. Найдём расстояние от точки $M_o(x_o, y_o, 0)$ до плоскости Q : $A \cdot x + B \cdot y + D = 0$. Согласно (2.22) оно равно $d = \dfrac{|A \cdot x_o + B \cdot y_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Поскольку в уравнении плоскости Q отсутствует переменная z, то эта плоскость параллельна оси OZ и, следовательно, перпендикулярна координатной плоскости XOY. В этой же плоскости лежит точка M_o (рис. 2.11). Но в этом случае d равно расстоянию от точки M_o до прямой L - линии пересечения плоскостей Q и XOY. Тем самым обоснована формула (2.14) для определения расстояния от точки $M_o(x_o, y_o)$ до прямой L : $Ax + By + D = 0$ на плоскости XOY (замена буквы C на D не принципиальна).

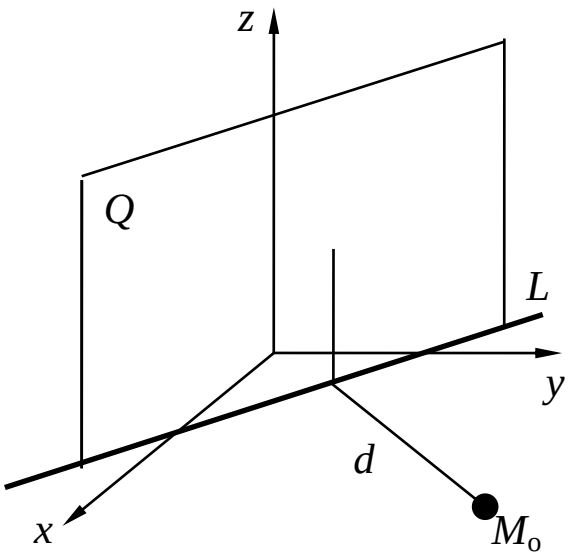

Рис.2.11

Пример 2.8. Найти расстояния от точек $M(1, 1, 1)$ и O(0, 0, 0) до плоскости $2x + 2y + z - 2 = 0$, а также определить их взаимное расположение относительно этой плоскости.

Решение. Находим искомые расстояния по формуле (2.22):

$$d(M) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|3|}{3} = 1, \quad d(O) = \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3}.$$

Поскольку выражения, стоящие под знаком модуля, имеют разные знаки, то точки M и O находятся по разные стороны от плоскости.

3. **Пучок плоскостей**. Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую L, назовём пучком плоскостей, а прямую L - осью пучка. Пусть ось пучка задана как пересечение двух плоскостей (рис.2.12) Q_1 и Q_2 :

$$Q_1 : \; A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0,$$

$$Q_2 : \; A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0.$$

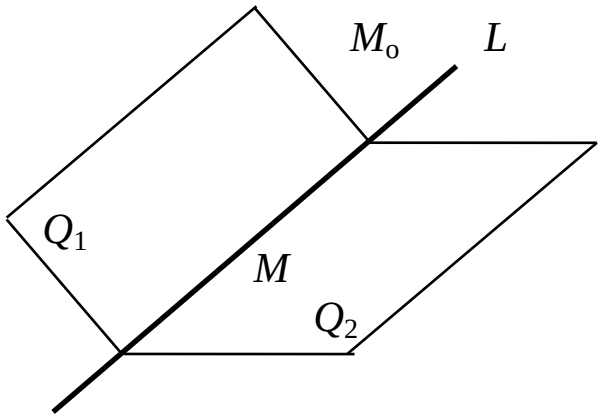

Рис. 2.12

Умножим первое уравнение на λ, а второе - на μ и сложим полученные выражения. Полученное соотношение при любых λ и μ линейно относительно декартовых координат и, следовательно, определяет некоторую плоскость. Так как полученное уравнение

$$\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \qquad (2.23)$$

является линейной комбинацией уравнений плоскостей Q_1 и Q_2, то координаты любой точки M, принадлежащей одновременно Q_1 и Q_2, то есть прямой L, удовлетворяют и уравнению (2.23). Следовательно, (2.23) при любых λ и μ определяет плоскость, проходящую через ось пучка L. Остаётся показать, что уравнение любой плоскости, проходящей ось пучка L и произвольную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, не лежащую на оси пучка, можно представить в виде (2.23). Для этого подставим в (2.23) координаты точки M_o:

$$\lambda\left(A_1x_o+B_1y_o+C_1z_o+D_1\right)+\mu\left(A_2x_o+B_2y_o+C_2z_o+D_2\right)=0.$$

Так как M_o не принадлежит одновременно Q_1 и Q_2, то одна из скобок не равна нулю, например, множитель при μ. Положим $\lambda = 1$ и определим μ. Подставив найденные λ и μ в (2.23), получим уравнение плоскости, проходящей через ось пучка L и точку M_o.

***Пример* 2.9**. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 1, -1)$ и прямую, заданную пересечением плоскостей $x+y-z=0$ и $x-y+z-1=0$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей (2.23)

$$\lambda\left(x+y-z\right)+\mu\left(x-y+z-1\right)=0.$$

Подставляя в него координаты точки M_o и полагая λ равным 1, определяем μ:

$$1\cdot\left(1+1+1\right)+\mu\left(1-1-1-1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \mu=1{,}5.$$

Подставив найденные λ и μ в уравнение пучка и упростив, получим требуемое уравнение: $5x-y+z-3=0$.

2.4. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Линию, в том числе и прямую, можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Если эти поверхности заданы в виде $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, то линия их пересечения определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, z\right)=0, \\ F_2\left(x, y, z\right)=0. \end{cases}$$

то есть линия определяется как геометрическое место точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнению каждой поверхности.

***Пример* 2.10**. Рассмотрим линию, определяемую системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 , \\ z = 0 . \end{cases}$$

Первое из них определяет сферу радиусом 5 с центром в начале координат, второе - плоскость XOY. Линия их пересечения - окружность, точки которой имеют координаты, удовлетворяющие и первому, и второму уравнениям.

Наряду с описанным способом широкое применение, особенно в теоретической механике, физике и других дисциплинах, находит параметрическое задание линии, при котором текущие декартовы координаты задаются как некоторые функции параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t) , \\ y = y(t) , \\ z = z(t) . \end{cases} \tag{2.24}$$

В механике роль такого параметра обычно играет время. Уравнения (2.24) в этом случае называют законом движения точки, а саму линию - траекторией движения.

Перейдём теперь к различным способам задания прямой.

1. **Прямая как пересечение плоскостей**. Рассмотрим две плоскости Q_1 и Q_2, заданные уравнениями

$$\begin{cases} Q_1 : \ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ Q_2 : \ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Если в уравнениях системы (2.25) коэффициенты при текущих координатах не пропорциональны, то есть плоскости не параллельны, то система (2.25) определяет прямую L как пересечение плоскостей Q_1 и Q_2. Уравнения (2.25) будем называть общим уравнением прямой.

Другие, более удобные для приложений формы уравнений прямой выведем с помощью векторной алгебры.

2. **Векторное уравнение прямой**. Положение прямой L в пространстве вполне определяется одной её фиксированной точкой $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и вектором $\bar{s} = (m, n, p)$, параллельным этой прямой (рис. 2.13). Вектор $\bar{s}$, как и ранее, будем называть направляющим вектором данной прямой. Рассмотрим теперь произвольную точку $M(x, y, z)$ прямой L и введём три вектора:

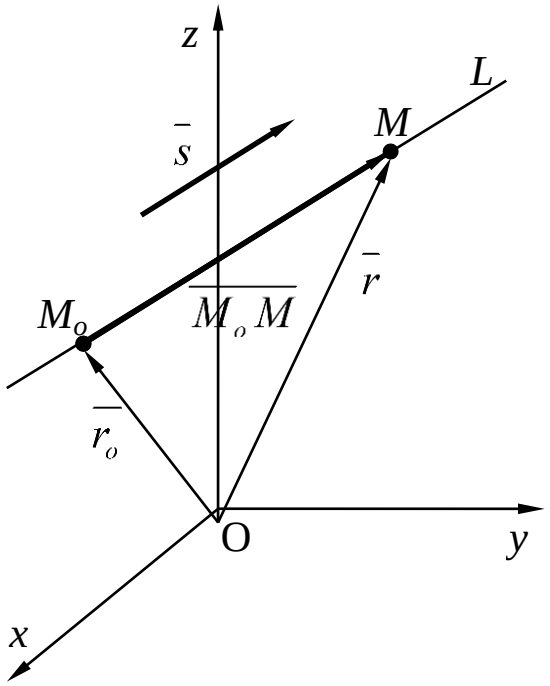

Рис. 2.13

$$\overline{r_o} = \overline{OM_o} = (x_o, y_o, z_o),$$

$$\bar{r} = \overline{OM} = (x, y, z),$$

$$\overline{M_oM} = (x - x_o, y - y_o, z - z_o),$$

где первые два являются соответственно радиусами векторами точек M_o и M. Эти векторы связаны соотношением $\bar{r} = \overline{r_o} + \overline{M_oM}$. Так как вектор $\overline{M_oM}$ лежит на прямой L, то он коллинеарен вектору $\bar{s}$, и поэтому $\overline{M_oM} = t \cdot \bar{s}$, где скалярный множитель t (параметр) может принимать любое значение в зависимости от положения точки на прямой. Учитывая это, получаем

$$\bar{r} = \overline{r_o} + \bar{s} \cdot t. \qquad (2.26)$$

Это уравнение назовём векторным уравнением прямой.

Если в качестве направляющего вектора взять единичный вектор $\bar{s}^o$, то $\overline{M_oM} = \bar{s}^o \cdot t$. В этом случае, как легко убедиться, абсолютная величина параметра t равна длине вектора $\overline{M_oM}$ и параметр t положителен, если векторы $\bar{s}^o$ и $\overline{M_oM}$ направлены в одну сторону, и отрицателен в противном случае. Как известно, $\bar{s}^o(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β и γ - направляющие углы вектора $\bar{s}^o$. В этом случае (2.26) принимает вид

$$\bar{r} = \overline{r_o} + \overline{s^o} \cdot t. \qquad (2.27)$$

3. **Параметрические уравнения прямой**. Перейдём в векторных уравнениях (2.26) и (2.27) к координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_o + m \cdot t, \\ y = y_o + n \cdot t, \\ z = z_o + p \cdot t. \end{cases} \qquad (2.28) \qquad\qquad \begin{cases} x = x_o + \cos\alpha \cdot t, \\ y = y_o + \cos\beta \cdot t, \\ z = z_o + \cos\gamma \cdot t. \end{cases} \qquad (2.29)$$

Это и есть параметрические уравнения прямой. В качестве направляющего может быть взят вектор произвольной длины, параллельный прямой L. Учитывая связь между произвольным вектором и его ортом $\bar{s}^o = \dfrac{\bar{s}}{|\bar{s}|}$, всегда можно перейти от уравнений (2.26) и (2.28) к уравнениям (2.27) и (2.29).

4. **Канонические уравнения прямой**. Исключим из уравнений (2.28) и (2.29) параметр t, в результате получим

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p}, \qquad (2.30)$$

$$\frac{x - x_o}{\cos\alpha} = \frac{y - y_o}{\cos\beta} = \frac{z - z_o}{\cos\gamma}. \qquad (2.31)$$

Эти уравнения и назовём каноническими уравнениями прямой. Все три знаменателя в этих уравнениях не равны нулю одновременно, поскольку в противном случае направляющим будет нуль-вектор, что невозможно. Если же какой-либо из знаменателей окажется равным нулю, то, как и ранее, условимся считать равным нулю и соответствующий числитель.

***Пример* 2.11**. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 0, 0)$ и образующей с координатными осями углы $\alpha = 45^o$, $\beta = 60^o$, $\gamma > 90^o$.

Решение. Находим направляющие косинусы вектора $\bar{s}^o$: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$. Косинус угла γ найдём, воспользовавшись известным тождеством $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, что даёт $0{,}5 + 0{,}25 + \cos^2\gamma = 1$, откуда $\cos\gamma = \pm 0{,}5$. Учитывая, что угол γ тупой, получаем: $\cos\gamma = -0{,}5$. Подставив найденные величины в (2.31), получим искомое уравнение $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

5. **Уравнение прямой по двум заданным точкам**. Пусть прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Запишем каноническое уравнение прямой, взяв в качестве направляющего вектор $\overline{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$. Тогда (2.30) примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Это и есть искомый результат.

6. **Переход от одних уравнений к другим**. Переход от векторной формы уравнения прямой к параметрическому и каноническому видам в общем виде разобран в предыдущих пунктах. Проводя рассуждения в обратном направлении, можно перейти от прямой, заданной двумя точками, к канонической и векторной формам.

Покажем теперь, как можно перейти от канонической формы прямой к прямой, определяемой пересечением двух плоскостей, и наоборот.

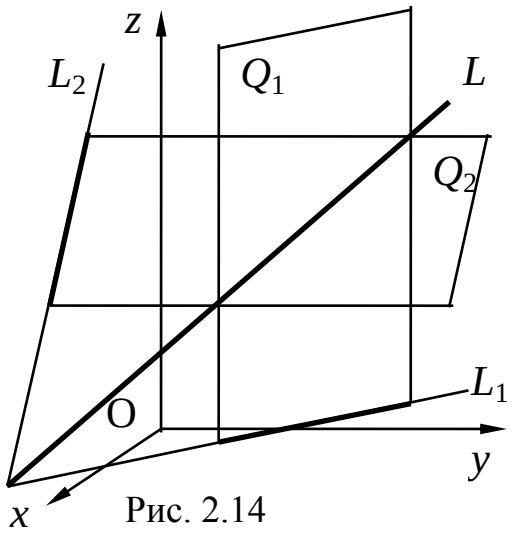

Рис. 2.14

Пусть прямая L задана в канонической форме:

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_o}{p}.$$

Это соотношение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_o}{m}=\dfrac{y-y_o}{n},\\[2mm] \dfrac{x-x_o}{m}=\dfrac{z-z_o}{p}.\end{cases} \qquad (2.32)$$

Каждое из этих уравнений определяет плоскость: первое - Q_1, параллельную оси OZ, второе - Q_2, параллельную оси OY (рис. 2.14.). Эти плоскости проектируют прямую L на координатные плоскости XOY и XOZ и называются проецирующими плоскостями.

Итак, система (2.32) определяет прямую L как пересечение проецирующих плоскостей.

Пусть теперь прямая задана как пересечение непараллельных плоскостей Q_1 и Q_2. По уравнениям этих плоскостей

$$\begin{cases}Q_1 : \ A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0,\\ Q_2 : \ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0.\end{cases} \qquad (2.33)$$

требуется составить канонические уравнения прямой L . Для этого необходимо знать координаты какой-либо точки прямой $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и её направляющий вектор $\bar{s}$ (рис. 2.15).

Координаты точки M_o можно получить из решения системы (2.33), придав одной из переменных произвольное значение (например, 0). Поскольку прямая L - пересечение плоскостей Q_1 и Q_2 , то она перпендикулярна их нормалям $\overline{N_1} = \left(A_1, B_1, C_1\right)$ и $\overline{N_2} = \left(A_2, B_2, C_2\right)$, поэтому в качестве направляющего вектора прямой можно взять $\bar{s} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$.

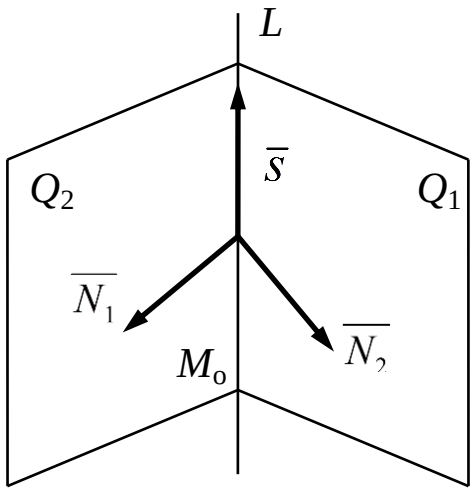

Рис. 2.15

***Пример* 2.12**. Прямая задана как пересечение двух плоскостей: $x - 2 \cdot y + z + 3 = 0$ и $2 \cdot x - y + z = 0$. Требуется перейти к каноническому уравнению.

Решение. Находим координаты точки M_o , положив для этого $z = 0$ и решая систему $\begin{cases} x - 2 \cdot y + 3 = 0 \\ 2 \cdot x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M_o\left(1, 2, 0\right)$.

Находим направляющий вектор:

$$\bar{s} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = \left(-1, 1, 3\right).$$

Отсюда получаем искомое уравнение: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{3}$.

2.5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТИ

1. **Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности**. Рассмотрим две прямые L_1 и L_2 , определяемые соответственно точками M_1 и M_2 и направляющими векторами $\bar{s}_1 = \left(m_1, n_1, p_1\right)$ и $\bar{s}_2 = \left(m_2, n_2, p_2\right)$. Очевидно, один из двух смежных углов, образованных прямыми, равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{\left|\bar{s}_1\right| \cdot \left|\bar{s}_2\right|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} .$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых равносильны соответствующим условиям для направляющих векторов:

$$L_1 \| L_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

$$L_1 \perp L_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0.$$

***Пример* 2.13**. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(1, 2, 3)$ параллельно прямой $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{1}$.

Решение. Условие параллельности будет выполнено, если координаты направляющего вектора взять равными $m = 2, \quad n = -3, \quad p = 1$. Отсюда уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

2. **Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости**. Рассмотрим прямую L и плоскость Q, заданные уравнениями

$$L: \quad \frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p},$$

$$Q: \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0.$$

Напомним, что углом φ между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на эту плоскость (рис. 2.16). Легко заметить, что угол между $\bar{s} = (m, n, p)$ - направляющим вектором прямой L и $\overline{N} = (A, B, C)$ нормалью к плоскости Q равен $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$, отсюда

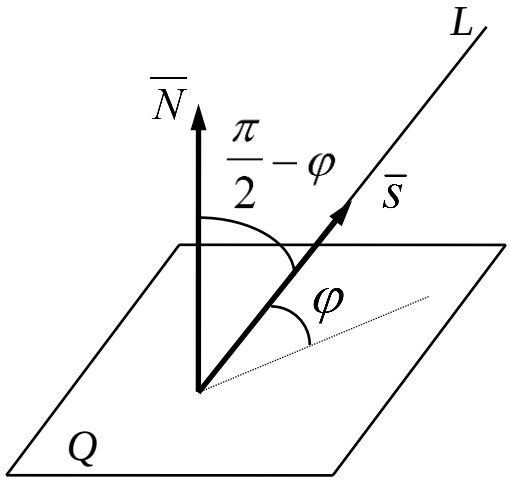

Рис.2.16

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)\right| = |\cos(\overline{N}\,\bar{s})| = \frac{|\overline{N} \cdot \bar{s}|}{|\overline{N}| \cdot |\bar{s}|}.$$

Перейдя к координатам, получим

$$\sin\varphi = \frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой L и плоскости Q равносильны соответственно условиям ортого-

нальности и коллинеарности векторов $\overline{s}$ и $\overline{N}$:

$$L \| Q \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0;$$

$$L \perp Q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

3. **Пересечение прямой и плоскости**. Пусть прямая и плоскость заданы так же, как и в предыдущем пункте. Для того, чтобы найти точку M пересечения прямой и плоскости, нужно решить совместно систему уравнений, их определяющих. Это удобнее сделать, перейдя к параметрическому заданию прямой: $x = x_o + mt$, $y = y_o + nt$, $z = z_o + pt$. Подставив эти выражения в уравнение плоскости, получим уравнение для определения параметра t, соответствующего точке пересечения:

$$A \cdot \left(x_o + m \cdot t\right) + B \cdot \left(y_o + n \cdot t\right) + C \cdot \left(z_o + p \cdot t\right) + D = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p\right) \cdot t = -\left(A \cdot x_o + B \cdot y_o + C \cdot z_o + D\right). \qquad (2.34)$$

Возможны три варианта.

1. $\left(A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p\right) \neq 0$, тогда существует единственное решение: $t = -\dfrac{\left(A \cdot x_o + B \cdot y_o + C \cdot z_o + D\right)}{\left(A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p\right)}$. По найденному t легко определяются координаты точки M. Легко заметить, что в этом случае прямая L и плоскость Q не параллельны.

2. $\left(A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p\right) = 0$ и $\left(A \cdot x_o + B \cdot y_o + C \cdot z_o + D\right) \neq 0$, в этом случае (2.34) решения не имеет, то есть прямая не пересекает плоскость. Этот же вывод следует из геометрических соображений: из первого условия вытекает параллельность прямой и плоскости, второе же говорит о том, что точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$ прямой L не принадлежит плоскости Q.

3. $\left(A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p\right) = 0$ и $\left(A \cdot x_o + B \cdot y_o + C \cdot z_o + D\right) = 0$, в этом случае (2.34) принимает вид $0 \cdot t = 0$ и удовлетворяется при любом значении t, то есть любая точка прямой принадлежит плоскости. Следовательно, плоскости Q принадлежит и сама прямая L. Тот же вывод следует из геометрического смысла записанных условий.

4. **Условие расположения двух прямых в одной плоскости** (если прямые не параллельны, то это условие пересечения двух прямых в пространстве). Пусть прямые L_1 и L_2 определяются соответственно точками и направляющими векторами: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Рассмотрим векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Если прямые расположены в одной плоскости, то эти векторы компланарны. Верно и обратное. Следовательно, условие расположения двух прямых в одной плоскости равносильно условию компланарности векторов:

$$\left(\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2\right) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2.35)$$

***Пример* 2.14**. Выяснить, расположены ли в одной плоскости две прямые:

$$L_1: \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{2} \quad ; \quad L_2: \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3} .$$

Решение. Используем условие (2.35), учитывая, что $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(0, 2, 2)$, $\bar{s}_1 = (4, 3, 2)$, $\bar{s}_2 = (2, 1, 3)$,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 0 - 4 + 6 + 2 - 0 = -5 \neq 0 .$$

Следовательно, прямые не лежат в одной плоскости.

2.6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как было показано выше, алгебраическому уравнению первой степени (линейному) относительно текущих декартовых координат на плоскости соответствует прямая. Рассмотрим теперь уравнение второй степени относительно двух декартовых координат x и y:

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{10} \cdot x + 2 \cdot a_{20} \cdot y + a_{00} = 0 . \qquad (2.36)$$

Соответствующую этому уравнению линию на плоскости XOY (предполагая, что хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} не равен нулю) будем называть линией второго порядка.

Примером линии второго порядка является окружность радиусом R с центром в точке $M_o(x_o, y_o)$, уравнение которой было получено ранее :

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-$$
$$-2\cdot x_0\cdot x+y^2+x_0^2+y_0^2-R^2=0 .$$

Переходя к новым координатам (рис. 2.17) по формулам (параллельный перенос) $x_1=x-x_0$, $y_1=y-y_0$, уравнение окружности можно записать в виде

$$x_1^2+y_1^2=R^2 .$$

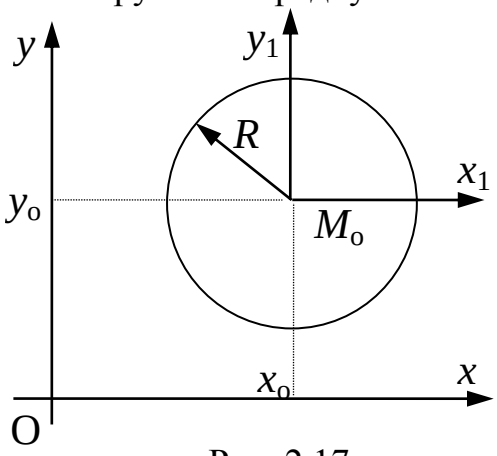

Рис. 2.17

Уже этот простой пример показывает, что в различных системах координат одна и та же линия может иметь разные уравнения. В связи с этим замечанием возникает задача нахождения такой системы координат, в которой уравнение (2.36) приняло бы наиболее простой вид. Для этого вначале получим формулы перехода от одной системы координат к другой (рис. 2.18). Пусть точка M имеет координаты (x, y) в "старой" XOY и (x_1, y_1) в "новой" $X_1O_1Y_1$ системах координат. Очевидно

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{r}_1 , \qquad (2.37)$$

где $\bar{r}$, $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$ - соответствующие радиусы-векторы. Проектируя (2.37) на оси OX и OY , получим:

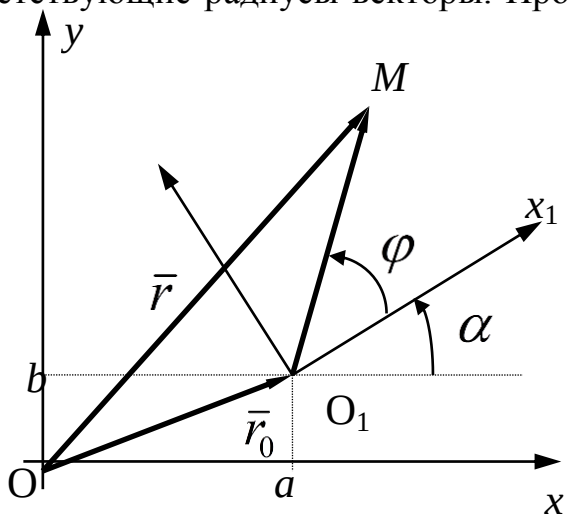

Рис. 2.18

$$\Pi\mathrm{p}_x\bar{r}=\Pi\mathrm{p}_x\bar{r}_0+\Pi\mathrm{p}_x\bar{r}_1=a+\left|\bar{r}_1\right|\cdot\cos\left(\alpha+\varphi\right)=$$
$$=a+\left|\bar{r}_1\right|\cdot\left(\cos\alpha\cdot\cos\varphi-\sin\alpha\cdot\sin\varphi\right) ,$$
$$\Pi\mathrm{p}_y\bar{r}=\Pi\mathrm{p}_y\bar{r}_0+\Pi\mathrm{p}_y\bar{r}_1=b+\left|\bar{r}_1\right|\cdot\sin\left(\alpha+\varphi\right)=$$
$$=b+\left|\bar{r}\right|\cdot\left(\sin\alpha\cdot\cos\varphi+\cos\alpha\cdot\sin\varphi\right) .$$

Учитывая, что $\Pi\text{р}_x \bar{r} = x$, $\Pi\text{р}_y \bar{r} = y$, $\left|\bar{r}_1\right| \cdot \cos\varphi = x_1$, $\left|\bar{r}_1\right| \cdot \sin\varphi = y_1$, получаем формулы перехода от (x_1, y_1) к (x, y):

$$\begin{cases} x = a + x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha \ , \\ y = b + x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha \ . \end{cases} \qquad (2.38)$$

Разрешая (2.38) относительно x_1 и y_1, получаем формулы перехода от (x, y) к (x_1, y_1):

$$\begin{cases} x_1 = (x - a) \cdot \cos\alpha - (y - b) \cdot \sin\alpha \ , \\ y_1 = -(x - a) \cdot \sin\alpha + (y - b) \cdot \cos\alpha \ . \end{cases} \qquad (2.39)$$

Отметим, что в (2.38) и (2.39) x, y и x_1, y_1 входят линейным образом, поэтому, перейдя к новым переменным в уравнении (2.36), получим уравнение степени не выше второй, так как линейная замена вообще не может повысить степень уравнения. Покажем, что и меньше второй она не может быть, для чего предположим противное: преобразованное уравнение оказалось первой степени относительно новых координат. Переходя на этот раз от новых координат к старым. в силу линейности замены степень уравнения мы повысить не можем и, следовательно, получим уравнение первой степени, что противоречит условию. В результате доказано, что при таком переходе от одной декартовой системы координат к другой порядок уравнения (и линии) сохраняется.

Перейдём к отысканию такой декартовой системы координат, в которой уравнение (2.36) примет наиболее простой вид. Эту задачу решим в два этапа: вначале перейдём к новой системе координат $X_1O_1Y_1$, повёрнутой на угол α относительно старой XOY и имеющей с ней общее начало (рис. 2.19), а затем перейдём к $X_2O_2Y_2$ с помощью параллельного переноса в точку O_2.

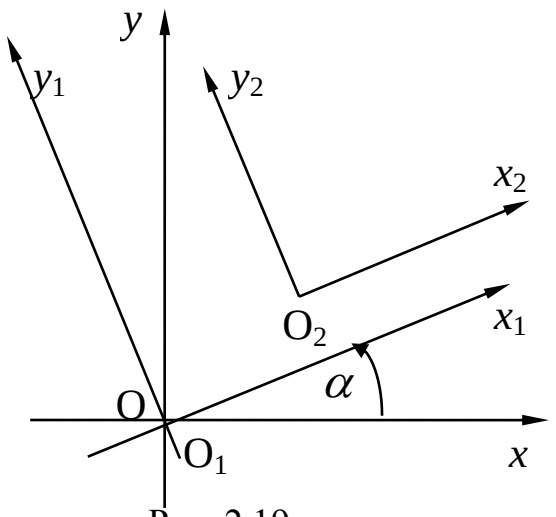

Рис. 2.19

На первом этапе подберём такой угол α, чтобы преобразованное уравнение (2.36) не содержало член с произведением $x_1 \cdot y_1$. В новых координатах (2.36) принимает вид

$$a_{11} \cdot \left(x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha\right)^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot \left(x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha\right) +$$
$$+ a_{22} \cdot \left(x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha\right)^2 + \ldots = 0 \, .$$

Здесь многоточием обозначены члены первой степени и свободный член, которые не делают вклад в коэффициент при $x_1 \cdot y_1$. Выпишем этот коэффициент в

преобразованном уравнении

$$a_{12}^{*} = -2 \cdot a_{11} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2 \cdot a_{12} \cdot \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 2 \cdot a_{22} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$= 2 \cdot a_{12} \cdot \cos 2\alpha - \left(a_{11} - a_{22}\right) \cdot \sin 2\alpha .$$

Предположив, что $a_{12} \neq 0$ (в противном случае незачем поворачивать систему координат), из равенства нулю a_{12}^{*} получим уравнение для определения неизвестного угла α :

$$2 \cdot a_{12} \cdot \cos 2\alpha - \left(a_{11} - a_{22}\right) \cdot \sin 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad ctg 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}} . \qquad (2.40)$$

Для нас важно, что хотя бы один такой угол существует. После поворота системы координат уравнение (2.36) преобразуется в следующее:

$$a_{11}^{*} \cdot x_1^2 + a_{22}^{*} \cdot y_1^2 + 2 \cdot a_{10}^{*} \cdot x_1 + 2 \cdot a_{20}^{*} \cdot y_1 + a_{00}^{*} = 0 . \qquad (2.41)$$

Коэффициенты этого уравнения легко вычисляются.

Теперь, для того, чтобы исключить линейные члены, перейдём к новой системе координат $X_2O_2Y_2$, полученной из $X_1O_1Y_1$ параллельным переносом. Для этого преобразуем (2.41) , предполагая, что $a_{11}^{*} \neq 0$ и $a_{22}^{*} \neq 0$, и выделим полные квадраты:

$$a_{11}^{*} \cdot \left(x_1 + \frac{a_{10}^{*}}{a_{11}^{*}} \right)^2 + a_{22}^{*} \cdot \left(y_1 + \frac{a_{20}^{*}}{a_{22}^{*}} \right)^2 + a_{00}^{*} - \frac{\left(a_{10}^{*}\right)^2}{a_{11}^{*}} - \frac{\left(a_{20}^{*}\right)^2}{a_{22}^{*}} = 0.$$

Перейдя к координатной системе $X_2O_2Y_2$ по формулам

$$x_2 = x_1 + \frac{a_{10}^{*}}{a_{11}^{*}} \quad , \quad y_2 = y_1 + \frac{a_{20}^{*}}{a_{22}^{*}} ,$$

получим уравнение

$$a_{11}^{*} \cdot x_2^2 + a_{22}^{*} \cdot y_2^2 + a_{00}^{**} = 0 .$$

Если в (2.41) $a_{22}^{*} = 0$ или $a_{11}^{*} = 0$, то удаётся выделить только один полный квадрат и привести это уравнение к виду

$$a_{11}^{*} \cdot x_2^2 + 2 \cdot a_{20}^{*} \cdot y_2 + a_{00}^{**} = 0 \quad , \quad \text{где} \quad x_2 = x_1 + \frac{a_{10}^{*}}{a_{11}^{*}} \quad , \quad y_2 = y_1 ,$$

или $$a_{22}^{*} \cdot y_2^2 + 2 \cdot a_{10}^{*} \cdot x_2 + a_{00}^{**} = 0 \quad , \quad \text{где} \quad x_2 = x_1 \quad , \quad y_2 = y_1 + + \frac{a_{20}^{*}}{a_{22}^{*}} .$$

Таким образом, в зависимости от величины и знаков коэффициентов после несложных преобразований коэффициентов и замены x_2 и y_2 на более привычные x и y уравнение (2.36) приводится к одному из следующих видов:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \tag{2.42}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\,, \tag{2.43}$$

$$y^2=2\cdot p\cdot x \quad \text{или} \quad x^2=2\cdot p\cdot y\,, \tag{2.44}$$

$$a^2\cdot x^2-b^2\cdot y^2=0\,, \tag{2.45}$$

$$a^2\cdot x^2+b^2\cdot y^2=0\,, \tag{2.46}$$

$$y^2-b^2=0 \quad \text{или} \quad x^2-a^2=0\,, \tag{2.47}$$

$$a^2\cdot x^2+b^2\cdot y^2+c^2=0\,, \tag{2.48}$$

Говорят, что уравнения (2.42) , (2.43) и (2.44) соответственно определяют эллипс, гиперболу и параболу. Уравнение (2.45) при $a\neq 0$ и $b\neq 0$ определяет две пересекающиеся в начале координат прямые: $a\cdot x+b\cdot y=0$ и $a\cdot x-b\cdot y=0$. Уравнение (2.46) , при $a\neq 0$ и $b\neq 0$ определяет единственную точку O(0, 0). Уравнения (2.47) определяют пары параллельных (или совпадающих) прямых, а (2.48) при $c\neq 0$ не удовлетворяет ни одна точка.

Разберём теперь геометрические свойства первых трёх типов линий (остальные были изучены ранее).

1. **Эллипс**. ***Изначально под эллипсом понимали геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная***.

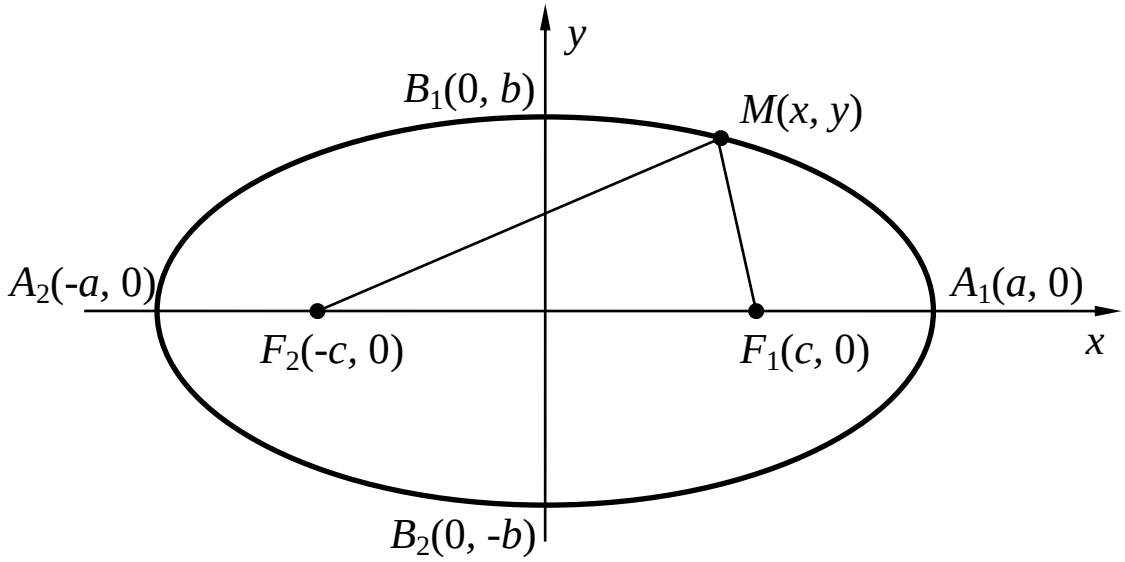

Рис.2.20

Чтобы составить уравнение, соответствующее этому геометрическому

определению, выберем систему координат XOY, причём расположим оси так, чтобы F_1 и F_2 (фокусы эллипса) лежали на оси OX симметрично относительно начала координат (рис. 2.20). Согласно определению $|F_1M|+|F_2M|=2a$, где $2a$ есть сумма расстояний от M до F_1 и F_2. Очевидно $a>c$. Переходя к координатам и пользуясь формулой расстояния между двумя точками, последнее соотношение можно записать в виде

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2\cdot a\,.$$

Освобождаясь от иррациональности, после несложных преобразований приходим к уравнению

$$\left(a^2-c^2\right)\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot\left(a^2-c^2\right).$$

Учитывая, что $a^2-c^2>0$, обозначая эту разность $b^2=a^2-c^2$ и деля на правую часть, получаем уравнение, которое принято называть каноническим уравнением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Полученное уравнение полностью совпадает с (2.42), что оправдывает название соответствующей ему линии.

Перейдём к исследованию формы эллипса. Поскольку при замене x и y соответственно на $-x$ и $-y$ уравнение не изменяется, то оси координат являются осями симметрии эллипса. Ось симметрии, на которой расположены фокусы, называется фокальной осью (в нашем случае ось OX). Точка пересечения

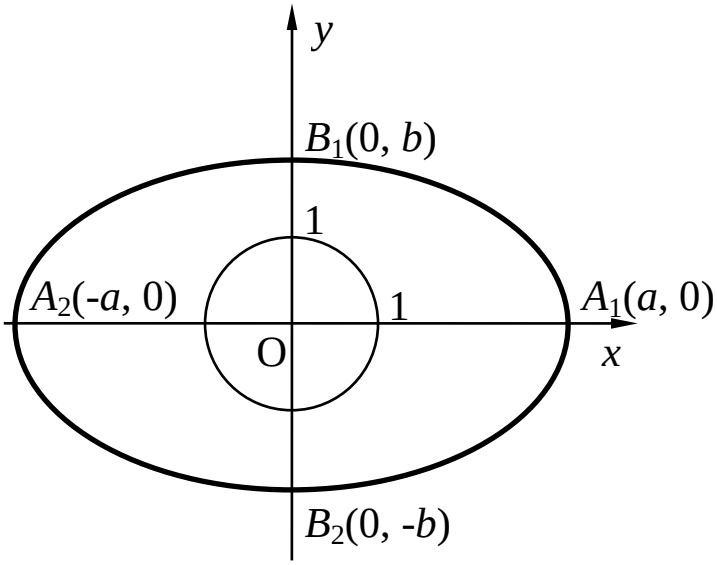

Рис. 2.21

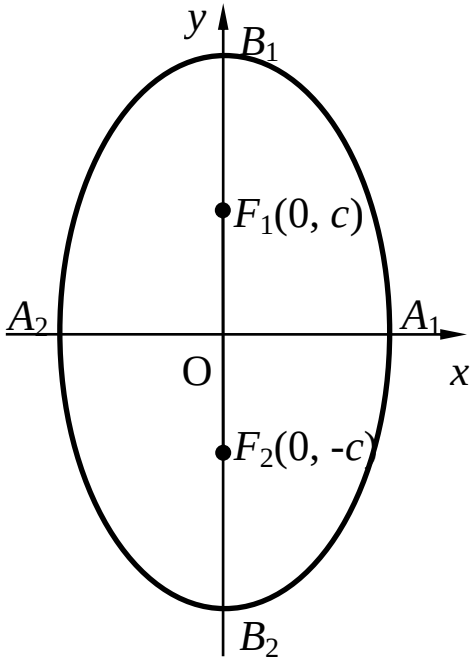

Рис. 2.22

осей симметрии называется центром эллипса. Полагая последовательно $y=0$ и $x=0$, находим точки пересечения эллипса с осями координат - его вершины

A_1, A_2, B_1, B_2. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины эллипса, и их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно большой и малой осями эллипса (a и b - соответственно полуосями). Чтобы исследовать форму эллипса, рассмотрим вначале окружность радиусом 1 с центром в начале координат. Её уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$. Перейдя к новым координатам по формулам $x_1 = a \cdot x$, $y_1 = b \cdot y$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{x_1}{a}$, $y = \dfrac{y_1}{b}$, получим новое уравнение, с точностью до индексов совпадающее с уравнением эллипса. Учитывая, что предложенное преобразование сводится к "растяжению" в a раз по оси OX и в b раз по оси OY, можно утверждать, что эллипс получается из единичной окружности "растяжением" в a и b раз по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 2.21).

Замечание. В рассмотренном случае мы положили $b^2 = a^2 - c^2$, откуда следует, что $b < a$. Если в уравнении (2.42) b окажется больше a, то, как легко показать, фокальной осью будет OY (рис. 2.22) и фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(0, c)$ и $F_2(0, -c)$, где $c^2 = b^2 - a^2$.

Геометрическим определением эллипса можно воспользоваться при механическом построении этой кривой, для чего надо взять отрезок нити длиной $2a$, закрепив два её конца в точках F_1 и F_2 и придав ей форму ломаной F_1MF_2 (см. рис. 2.20), описать точкой M (острием карандаша) эллипс.

2. **Гипербола**. Подобно эллипсу, ***гиперболу можно определить как геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемыми фокусами, есть величина постоянная***.

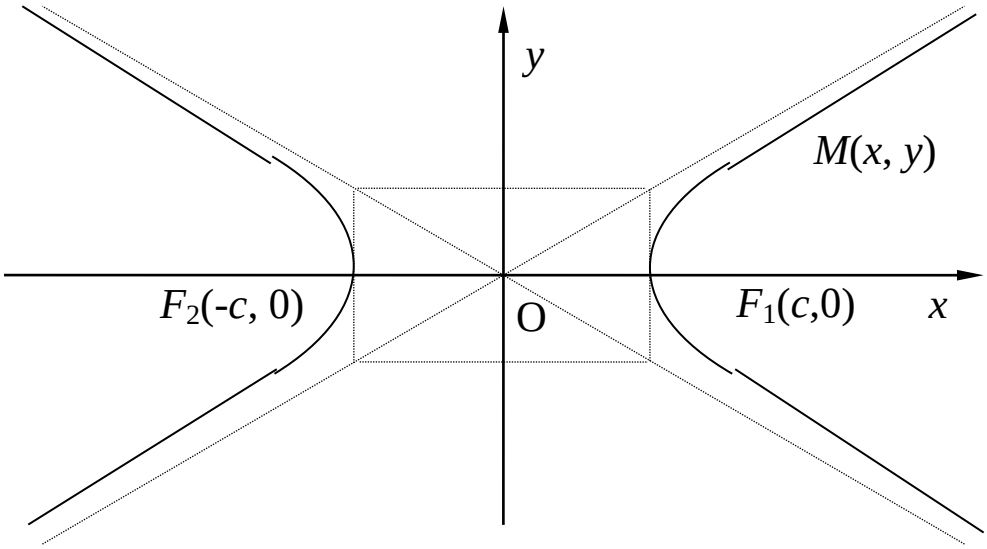

Рис. 2.23

Поступая, как и в предыдущем случае, из условия $\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2 \cdot a$ можно получить каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2 \quad (a < c)$. Это уравнение вида (2.43).

Как и эллипс, гипербола имеет две оси и центр симметрии (в нашем случае OX, OY и O). Ось симметрии гиперболы, на которой находятся фокусы, называется фокальной осью. Полагая $y = 0$, находим точки пересечения гиперболы с осью OX - вершины $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$. Ось OY гиперболу не пересекает, поэтому ось симметрии, пересекающая гиперболу, называется действительной, а ось симметрии, не пересекающая гиперболу, - мнимой.

Для исследования формы гиперболы рассмотрим первый квадрант координатной плоскости ($x \geq 0$, $y \geq 0$). Из уравнения (2.43) в этом случае следует, что $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad y = b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad , \quad x \geq a$. При неограниченном увеличении абсциссы x ордината y будет мало отличаться от $y^* = \frac{b}{a} \cdot x$. В математическом анализе такую прямую принято называть наклонной асимптотой. Учитывая результаты проведенного анализа, строим гиперболу (рис. 2.24).

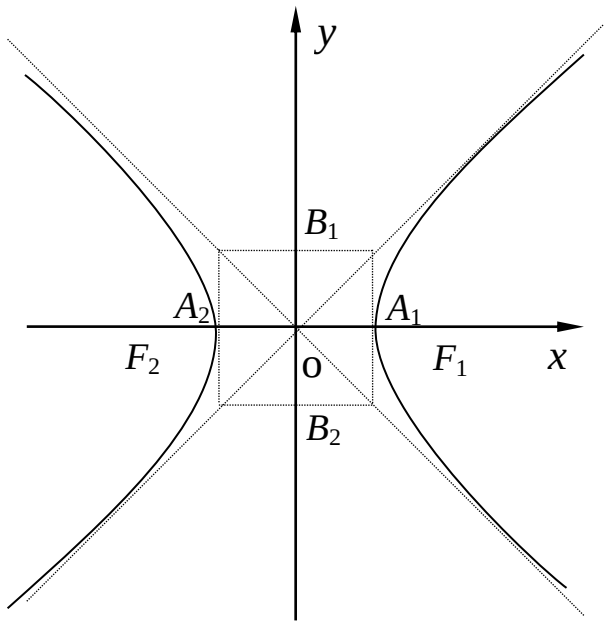

Рис. 2.24

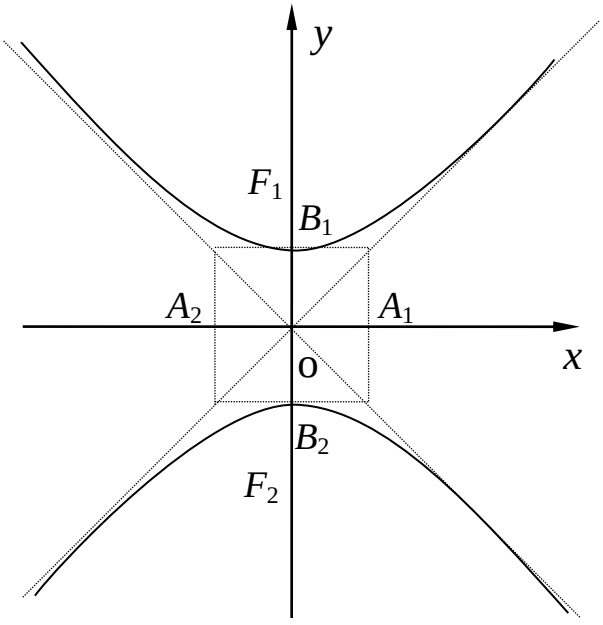

Рис. 2.25

Замечание. Если в правой части уравнения (2.43) будет стоять -1, то действительной осью будет являться ось OY, и гипербола будет располагаться, как показано на рис. 2.25.

3. **Парабола**. Параболу можно определить как ***геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой, называемой директрисой (направляющей), и данной точки, называемой фокусом***.

Выбирая оси координат, как показано на рис. 2.26 (директриса нанесена пунктиром), и поступая, как и в предыдущих случаях, из условия

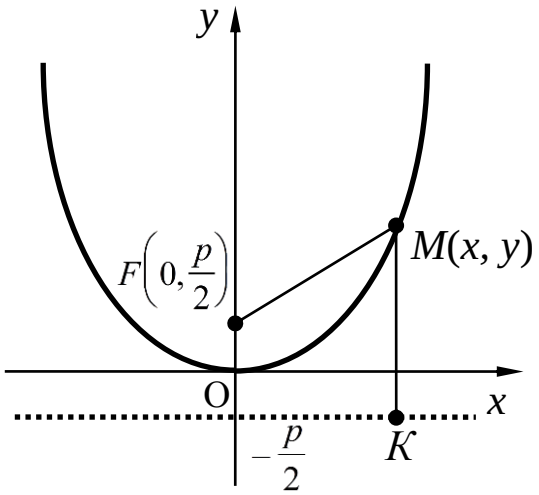

Рис. 2.26

$$FM = MK \quad \Rightarrow \quad FM^2 = MK^2$$

можно получить уравнение параболы

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

или в каноническом виде

$$x^2 = 2 \cdot p \cdot y\ .$$

Полученное уравнение вида (2.44) определяет, как известно из школьного курса алгебры, параболу с осью симметрии OY и вершиной в начале координат (рис. 2.27). Как нетрудно проверить, уравнению $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ соответствует парабола, изображённая на рис. 2.28.

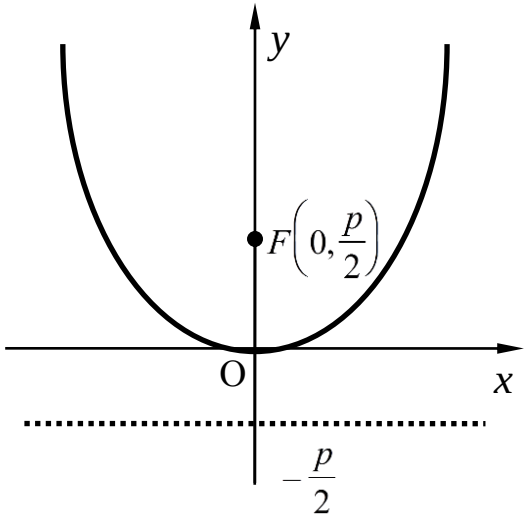

Рис. 2.27

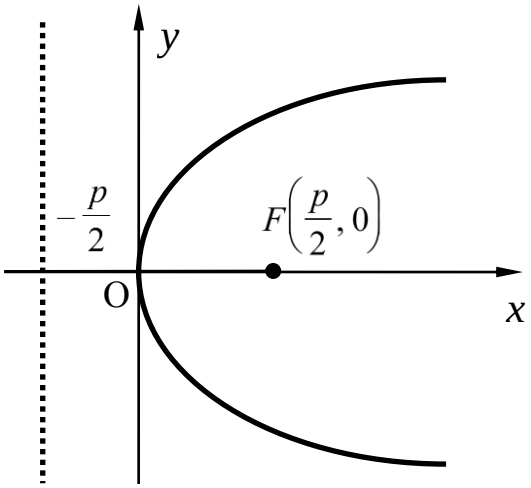

Рис. 2.28

Эти линии (эллипс, гипербола и парабола) имеют ряд очень интересных и важных в прикладном плане свойств. Так, И. Кеплер, анализируя многолетние астрономические наблюдения, открыл, а И. Ньютон обосновал теоретически закон, согласно которому траектории движения планет в солнечной системе являются эллипсами, один из фокусов которых совпадает с центром Солнца.

***Пример* 2.15**. Рассмотрим хорошо известную из школьного курса функцию

$y = \dfrac{1}{x}$ - обратно пропорциональную зависимость, график которой назывался равнобочной гиперболой. Обоснуем правомочность этого названия, для чего рассмотрим эквивалентное задание этой линии уравнением $x \cdot y = 1$. Преобразуем это уравнение к каноническому виду, для чего повернём систему координат на угол α, величину которого определим по формуле (2.40)

$ctg2\alpha = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}}$. В нашем случае $a_{11} = a_{22} = 0$, $2a_{12} = 1$, отсюда

$$ctg2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \quad \left(\text{или } \alpha_2 = -\frac{\pi}{4}\right).$$

Перейдя к новым координатам по формулам

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} - y_1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_1 - y_1), \\ y = x_1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} + y_1 \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_1 + y_1). \end{cases}$$

получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_1 - y_1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_1 + y_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{y_1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Но это уравнение гиперболы с действительной осью - OX_1 (рис. 2.29), что оправдывает название графика рассматриваемой функции. Если использовать $\alpha_2 = -\dfrac{\pi}{4}$, то в результате получим уравнение, в правой части которого будет стоять -1.

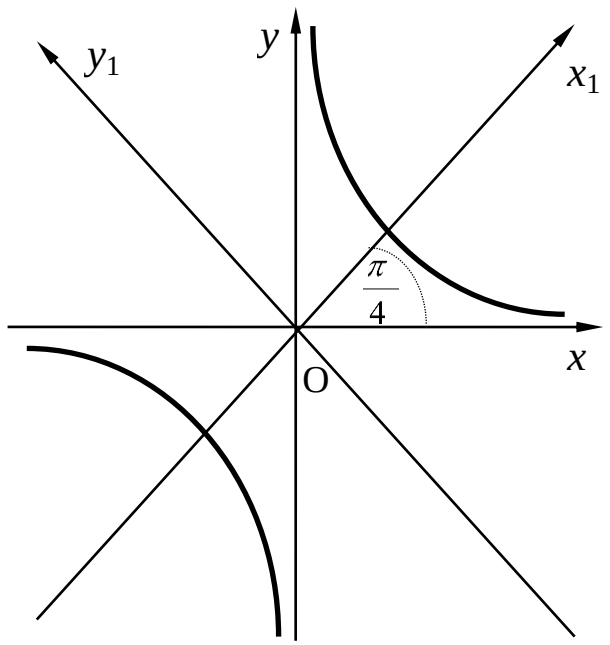

Рис. 2.29

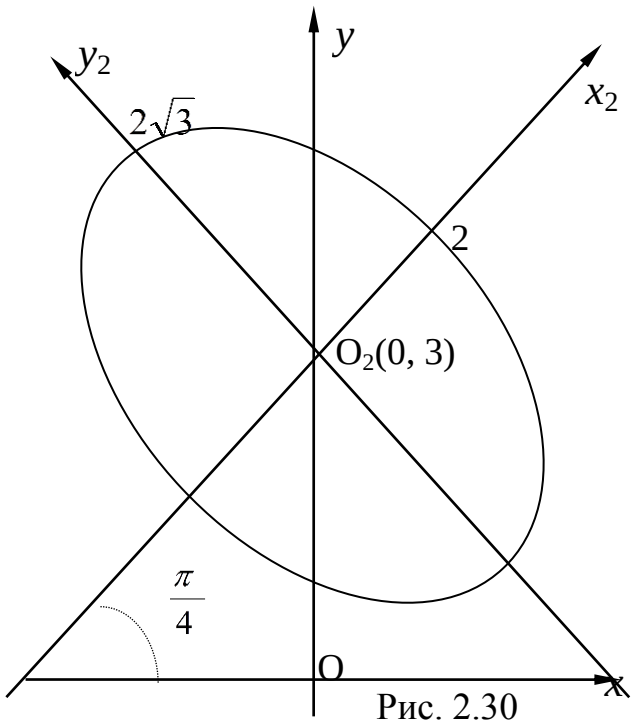

Рис. 2.30

***Пример* 2.16**. Установить вид и построить линию, заданную уравнением $x^2 + x \cdot y + y^2 - 3 \cdot x - 6 \cdot y + 3 = 0$.

Решение. Повернём оси координат на угол на угол α, величину которого определим по формуле (2.40) :

$$ctg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}} = \frac{1-1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \quad \left(\text{или } \alpha_2 = -\frac{\pi}{4}\right).$$

Формулы перехода к новым координатам примут вид

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} - y_1 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_1 - y_1), \\ y = x_1 \cdot \sin\frac{\pi}{4} + y_1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_1 + y_1). \end{cases}$$

Подставив эти выражения в уравнение и упростив, получим:

$$\left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} - 6 \cdot \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} + 3 = 0,$$

$$3 \cdot x_1^2 + y_1^2 - 9\sqrt{2} \cdot x_1 - 3\sqrt{2} \cdot y_1 + 6 = 0.$$

Выделив полные квадраты и перейдя к новым переменным x_2, y_2, получим в результате каноническое уравнение

$$3 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} + \frac{\left(y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{12} = 1,$$

$$\frac{x_2^2}{2^2} + \frac{y_2^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 1 \quad , \quad \text{где} \quad x_2 = x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, исходное уравнение определяет эллипс с полуосями 2 и $2\sqrt{3}$, оси которого повёрнуты относительно системы координат XOY на 45^0, с центром в точке O_2 (рис. 2.30), координаты которой в старой системе координат определяются следующим образом:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3. \end{cases}$$

В классификации линий по степеням соответствующих им уравнений весьма существенным является то, что в основу положена прямоугольная декартова система координат. Для других координатных систем эта классификация теряет смысл. В качестве примера рассмотрим важную и в теоретическом, и прикладном плане полярную систему координат. Начало отсчёта (его называют полюсом) совместим с началом декартовой системы координат XOY , а полярную ось - с осью OX (рис. 2.31). Положение точки M в декартовых координатах

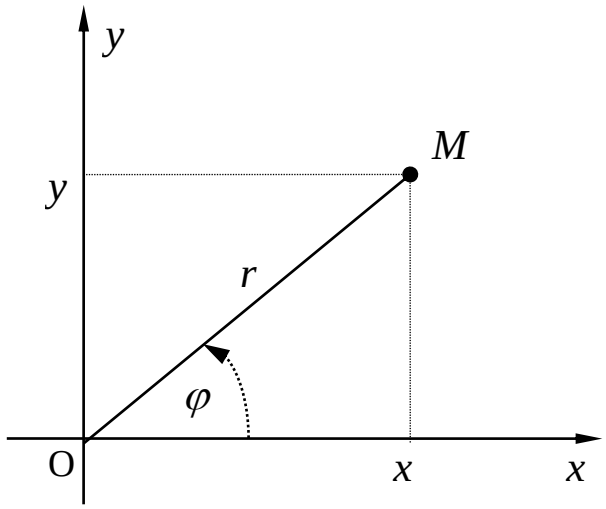

Рис. 2.31

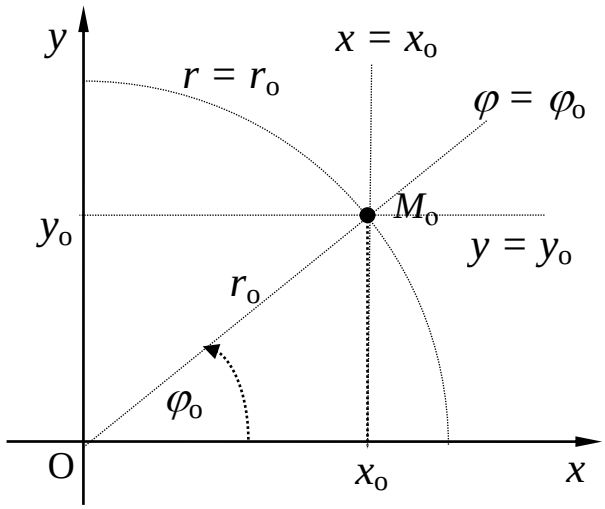

Рис. 2.32

определяется двумя числами - абсциссой x и ординатой y , а в полярной - полярным радиусом r и полярным углом φ . Обычно φ берут в пределах [0, 2π) или (-π, π]. Очевидно, любой точке плоскости (кроме полюса O, для которой полярный угол не определён) соответствует единственная пара чисел (r , φ) и обратно - каждой паре чисел (r, φ) (где $r \neq 0$) соответствует единственная точка плоскости (для полюса $r = 0$, а угол φ произволен). Величины r и φ называются полярными координатами точки. Связь между декартовыми и полярными координатами определяется формулами

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \quad , \\ y = r \cdot \sin\varphi \quad . \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \ . \end{cases}$$

В последнем случае из двух получающихся значений φ следует выбрать то, для которого $cos\varphi$ имеет тот же знак, что и x .

В декартовой системе координат уравнения $x = x_0$ и $y = y_0$ определяют координатные линии (в данном случае прямые, параллельные соответственно осям OY и OX), на пересечении которых расположена точка $M_0(x_0, y_0)$.

Поскольку эти координатные линии пересекаются под прямым углом (рис. 2.32), то иногда говорят о прямоугольной декартовой системе координат. В полярной системе координат уравнение $r = r_o$ определяет окружность радиусом r_o с центром в начале координат, а $\varphi = \varphi_o$ - луч, образующий с полярной осью угол φ. Поскольку окружность и радиус перпендикулярны, то полярная система координат представляет (одну из важнейших) криволинейную ортогональную систему координат.

Рассмотрим теперь окружность радиусом R с центром в начале координат. Её уравнения в декартовой и полярной системах координат имеют соответственно вид

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{и} \quad r = R\,.$$

Та же окружность с центром в точке $(R,\ 0)$ будет иметь в декартовых координатах уравнение

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2\,.$$

Соответствующее уравнение в полярных координатах получим, перейдя в последнем уравнении к полярным координатам:

$$\left(r\cdot\cos\varphi - R\right)^2 + r^2\cdot\sin^2\varphi = R^2 \Rightarrow \quad r\cdot\left(r - 2\cdot R\cdot\cos\varphi\right) \Rightarrow \quad r = 2\cdot R\cdot\cos\varphi\,.$$

Если в декартовой системе координат и в первом, и во втором случаях степень уравнения вторая, то в полярной в первом случае уравнение ($r = R$) первой степени (линейное) относительно полярных координат, а во втором случае ($r = 2\cdot R\cdot\cos\varphi$) - трансцендентное.

***Пример* 2.17**. Построить область D, ограниченную линиями:

$r = 2\cdot R\cdot\cos\varphi$, $r = 2\cdot R\cdot\sin\varphi$,

$\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

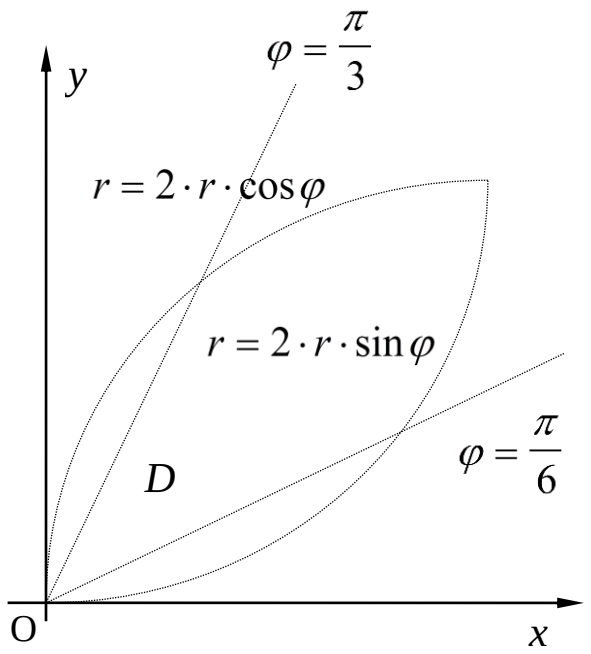

Рис. 2.33

Решение. Первое уравнение, как было показано выше, определяет окружность радиусом R с центром в точке $(R,\ 0)$. Аналогичным образом можно показать, что второе уравнение определяет окружность радиусом R с центром в точке $(0,\ R)$. Третье и четвёртое уравнения определяют лучи, образующие с полярной осью углы $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{\pi}{3}$. Используя эту информацию, строим об-

ласть D (рис. 2.33).

3. Существует нулевой вектор $\overline{0}$, такой, что для любого $\overline{a}$ справедливо $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$. Очевидно: $\overline{0}=(0,\ldots,0)$.

4. Для любого вектора $\overline{a}$ существует противоположный элемент $-\overline{a}$, такой, что $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$. Очевидно $-\overline{a}=(-a_1,\ldots,-a_n)$.

5. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$ для любого $\overline{a}$.

6. $\lambda\cdot(\gamma\cdot\overline{a})=(\lambda\cdot\gamma)\cdot\overline{a}$ - сочетательное свойство произведения относительно скалярного множителя.

7. $(\lambda+\gamma)\cdot\overline{a}=\lambda\cdot\overline{a}+\gamma\cdot\overline{a}$ - распределительное свойство произведения относительно суммы скалярных множителей.

8. $\lambda\cdot(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\cdot\overline{a}+\lambda\cdot\overline{b}$ - - распределительное свойство произведения относительно суммы векторов.

На основании этих свойств легко определяется разность векторов :

$$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}=(a_1-b_1,\ldots,a_n-b_n).$$

Множество элементов любой природы, а не только векторов, для которых определены операции сложения и умножения на число таким образом, что в результате мы получаем элемент, принадлежащий этому множеству, и выполняются перечисленные выше свойства, называют линейным пространством. Поэтому множество n-мерных векторов является линейным пространством, которое мы в дальнейшем будем обозначать R_n.

Выражение $\lambda_1\cdot\overline{a}_1+\lambda_2\cdot\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\cdot\overline{a}_n$, где $\lambda\in R$, будем называть линейной комбинацией векторов. Если некоторый вектор можно представить в виде линейной комбинации других, будем говорить, что он выражается через них линейным образом.

Обобщим теперь понятие скалярного произведения двух векторов трёхмерного пространства на случай n - мерного векторного пространства R_n, используя известную формулу для скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме. ***Назовём скалярным произведением векторов*** $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ ***число, равное сумме произведений одноимённых координат***. Как и в векторной алгебре, будем обозначать скалярное произведение

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{a},\overline{b})=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i.$$

2.7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение второй степени относительно трёх декартовых координат x, y и z:

$$a_{11}\cdot x^2 + a_{22}\cdot y^2 + a_{33}\cdot x^2 + 2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y + 2\cdot a_{13}\cdot x\cdot z +$$
$$+ 2\cdot a_{23}\cdot y\cdot z + 2\cdot a_1\cdot x + 2\cdot a_{20}\cdot y + 2\cdot a_{30}\cdot z + a_{00} = 0 \quad . \tag{2.49}$$

Соответствующую этому уравнению поверхность в пространстве (предполагая, что хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не равен нулю) назовём поверхностью второго порядка.

Примером поверхности второго порядка может служить сфера радиусом R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, уравнение которой было получено ранее:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 = R^2 \quad .$$

Как и на плоскости, переходя к новой системе координат, можно упростить уравнение (2.49), но геометрический путь, использованный в предыдущем пункте, в пространственном случае приводит к неоправданным трудностям. Поэтому пока ограничимся исследованием основных канонических уравнений, а к задаче приведения уравнения (2.49) к каноническому виду вернёмся после изучения линейной алгебры.

Вначале рассмотрим три важных в дальнейшем вопроса.

1. Цилиндрические поверхности с образующей, параллельной одной из координатных осей. Пусть, например, на плоскости XOY уравнением $F(x, y) = 0$ задана линия Γ, которую будем называть направляющей. Проведём (рис. 2.34) через произвольную точку этой линии $M_1(x, y, 0)$ прямую L, которую назовём образующей, перпендикулярно плоскости XOY (параллельно оси OZ). При перемещении точки M_1 вдоль направляющей Γ образующая L опишет поверхность, которую назовём цилиндрической поверхностью, построенной на плоской кривой с образующей, параллельной оси OZ. Поскольку уравнение Γ не содержит z, то в трёхмерном пространстве этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки образующей

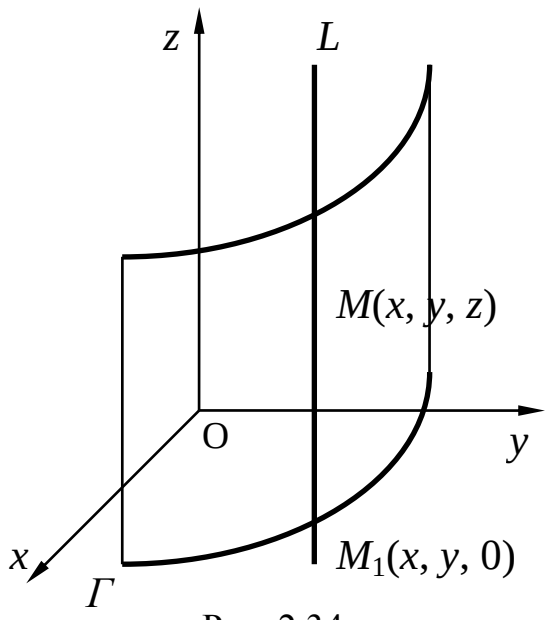

Рис. 2.34

L и, следовательно, полученной таким образом цилиндрической поверхности. Следовательно, уравнение этой поверхности имеет вид $F(x, y) = 0$.

Аналогичным образом можно получить уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой лежит в другой координатной плоскости, а образующая ей перпендикулярна.

Таким образом, приходим к выводу: ***если в уравнении относительно декартовых координат отсутствует одна из переменных, то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси "отсутствующей координаты".***

2. Поверхности вращения. Пусть в плоскости XOZ уравнением $F(x,z) = 0$ задана линия Γ (рис. 2.35). Найдём уравнение поверхности, образованной вращением линии Γ вокруг оси OZ. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ нашей поверхности и проведём через неё плоскость перпендикулярно оси OZ. Очевидно, пересечение этой плоскости и нашей поверхности есть окружность с центром в точке $N(0, 0, z)$ радиусом $NM = NM_1 = \quad = \sqrt{x^2 + y^2} = |x_1|$, откуда следует, что $x_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Подставив $z_1 = z$ и найденное x_1 в уравнение линии Γ, получим искомое уравнение поверхности вращения

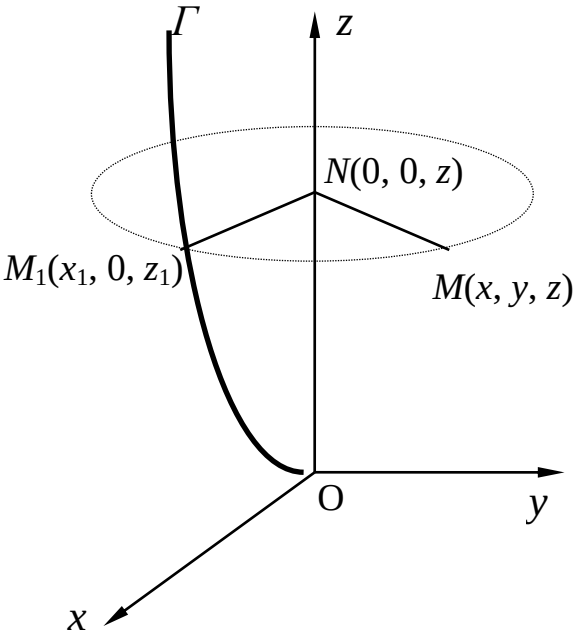

Рис. 2.35

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \qquad (2.50)$$

В результате приходим к правилу: ***чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии Γ, лежащей в плоскости XOZ, вокруг оси OZ, нужно в уравнении этой линии заменить x на*** $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Аналогичным образом решается задача о поверхностях, полученных вращением плоских линий относительно других координатных осей.

***Пример* 2.18**. Рассмотрим окружность радиусом R с центром в начале координат, лежащую в плоскости XOZ. Как известно, её уравнение имеет вид $x^2 + z^2 = R^2$. Уравнение поверхности, полученное вращением этой линии вокруг оси (например, OZ), найдём, применив сформулированное выше правило:

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2=R^2 .$$

Мы получили уже известное уравнение сферы.

3. Метод сечений. Рассмотрим уравнение $F(x,y,z)=0$, определяющее некоторую поверхность (рис. 2.36). Для того, чтобы исследовать эту поверхность, рассмотрим линии её пересечения с плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, плоскость Q, параллельная XOY, имеет уравнение $z=h$, где h - некоторая константа. В этой плоскости x и y - декартовы координаты. Уравнение линии пересечения поверхности и плоскости Q получается при подстановке $z=h$ в уравнение поверхности. Проведя эту процедуру для различных значений h, получим семейство линий, по виду которых уже достаточно хорошо можно представить себе вид искомой поверхности.

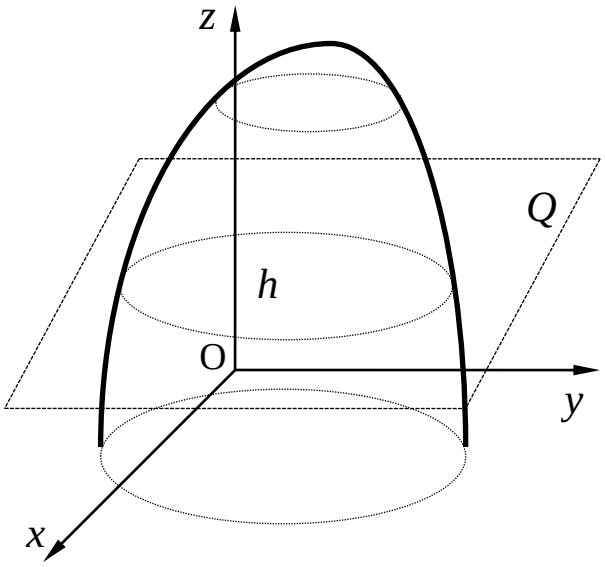

Рис. 2.36

Описанная методика широко используется в топографии при построении карт, где h - высота, а соответствующие линии называются линиями равных высот.

Естественно, сечения можно проводить плоскостями, параллельными XOZ и YOZ.

Рассмотрим теперь основные виды уравнений второго порядка в канонической форме и соответствующие им поверхности.

1. **Эллипсоид**. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(2.51) и назовём соответствующую ему поверхность трёхосным эллипсоидом. Эту поверхность можно получить из сферы радиусом 1 с центром в начале координат (рис. 2.37) $x^2+y^2+z^2=1$ растяжением в направлении оси OX в a раз, OY - в b раз, OZ - в c раз. Сечения трёхосного эллипсоида плоскостями,

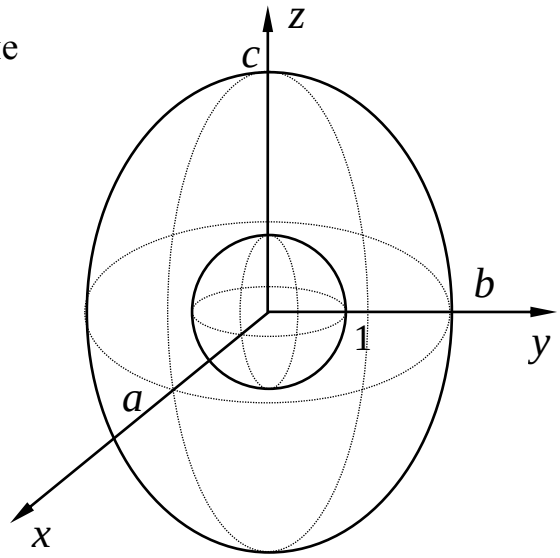

Рис. 2.37

параллельными координат-
ным плоскостям, либо представляют собой эллипсы, либо состоят из одной точки (при $x = \pm a$, или $y = \pm b$, или $z = \pm c$), либо пусто. При $a = b$ ($a = c$, $b = c$) трёхосный эллипсоид превращается в эллипсоид вращения вокруг оси OZ (OY , OX). При $a = b = c$ получается сфера радиусом $R = a = b = c$.

2. **Двуполостный гиперболоид**. Рассмотрим в плоскости XOZ гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ и будем её вращать вокруг действительной оси OZ (рис. 2.38). В результате получим двуполостный гиперболоид вращения, уравнение которого согласно (2.50) будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 .$$

(2.52)

Если полученную поверхность растянуть в направлении оси OY в $\frac{a}{b}$ раз, то получим двуполостный гиперболоид общего вида, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 .$$

(2.53)

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $z = h$ $(|h| > c)$ представляют собой эллипсы, а плоскостями $x = \alpha$ и $y = \beta$ - гиперболы.

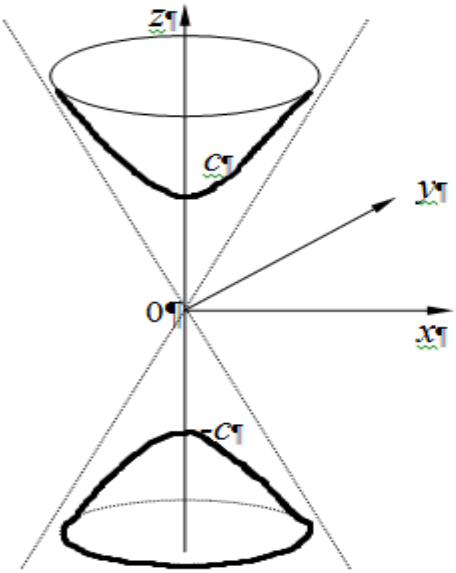

Рис. 2.38

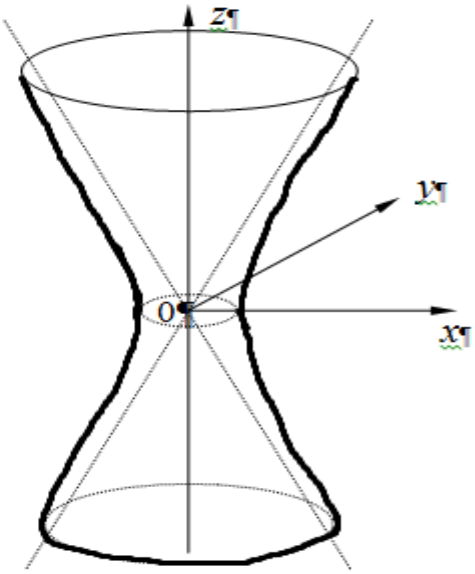

Рис. 2.39

3. **Однополостный гиперболоид**. Рассмотрим в плоскости XOZ гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и будем её вращать вокруг мнимой оси OZ (рис. 2.39). В результате получим однополостный гиперболоид вращения, уравнение кото-

рого согласно (2.50) будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,. \qquad (2.54)$$

Растягивая, как и в предыдущем случае, эту поверхность в направлении оси OY в $\frac{a}{b}$ раз, получаем однополостный гиперболоид общего вида, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,. \qquad (2.55)$$

Сечения однополостного гиперболоида плоскостями $z=h$ представляют собой эллипсы, а плоскостями $x=\alpha$ $(|\alpha|>a)$ и $y=\beta$ $(|\beta|>b)$ - гиперболы (превращающиеся при $\alpha=\pm a$ и $\beta=\pm b$ в пару пересекающихся прямых).

4. **Эллиптический параболоид**. Рассмотрим в плоскости XOZ параболу $x^2=a^2\cdot z$ и будем её вращать вокруг оси симметрии - OZ (рис. 2.40). В результате получим параболоид вращения, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z\,. \qquad (2.56)$$

Растягивая, как и ранее, параболоид вращения в направлении оси OY в $\frac{a}{b}$ раз, получаем эллиптический параболоид, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\,.$$

(2.57)

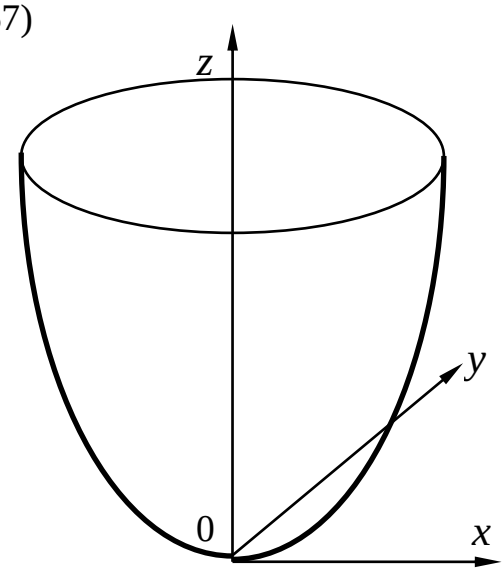

Рис. 2.40

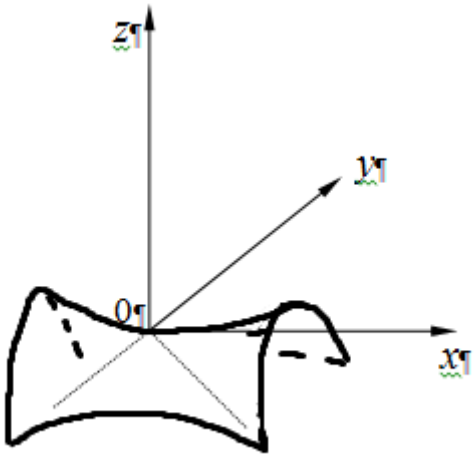

Рис. 2.41

Сечения эллиптического параболоида плоскостями $z=h>0$ представляют собой эллипсы, а плоскостями $x=\alpha$ и $y=\beta$ - параболы.

5. **Гиперболический параболоид** (**седло**). Эта поверхность определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

(2.58)

и не может быть получена растяжением из какой-либо поверхности вращения. Сечения гиперболического параболоида (рис. 2.41) плоскостями $z = h \ (h \neq 0)$ являются гиперболами (при $h = 0$ - две пересекающиеся прямые), а плоскостями $x = \alpha$ и $y = \beta$ - параболами.

6. **Конус**. Рассмотрим в плоскости XOZ прямую $a \cdot z = c \cdot x$ и будем её вращать вокруг оси OZ (рис. 2.42). В результате получим конус вращения или прямой круговой конус, уравнение которого имеет вид

$$a \cdot z = \pm c \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 .$$

(2.59)

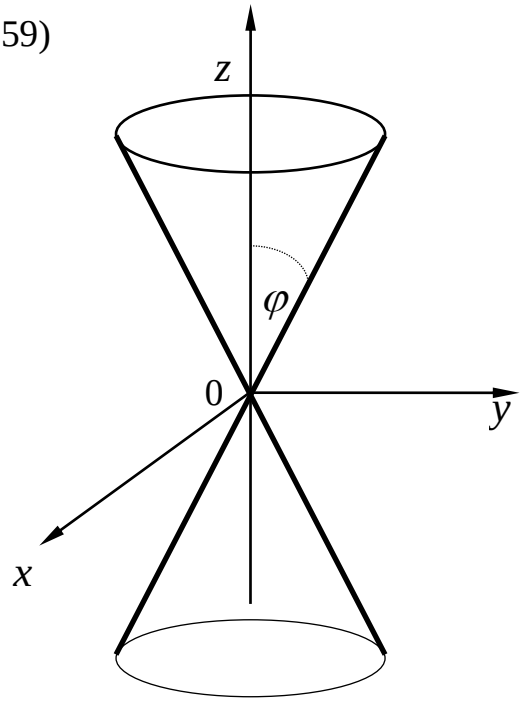

Рис. 2.42

Растягивая эту поверхность в направлении оси OY в $\frac{a}{b}$ раз, получаем эллиптический конус, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 .$$

(2.60)

Сечения эллиптического конуса плоскостями $z = h$ представляют собой эллипсы, а плоскостями $x = \alpha$ и $y = \beta$ - гиперболы (при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ - пара пересекающихся прямых).

Отметим без доказательства, что любое сечение кругового конуса плоскостью представляет собой: эллипс, если эта плоскость образует с осью конуса угол больше угла полураствора конуса - φ ; гиперболу, если этот угол меньше φ ; параболу, если этот угол равен φ ; пару пересекающихся прямых, если этот угол меньше φ и плоскость проходит через вершину конуса - О. Поэтому линии второго порядка иногда называют коническими сечениями - "кониками".

7. **Цилиндры**. Как было уже показано выше, если в уравнении поверхности отсутствует одна из координат, например z , то эта поверхность есть цилиндр с образующей, параллельной оси, чья координата отсутствует (в нашем случае OZ). В силу этого линиям второго порядка на плоскости XOY в пространстве соответствуют цилиндры второго порядка с образующей, параллельной оси OZ (рис. 2.43) : эллиптический, гиперболический, параболический.

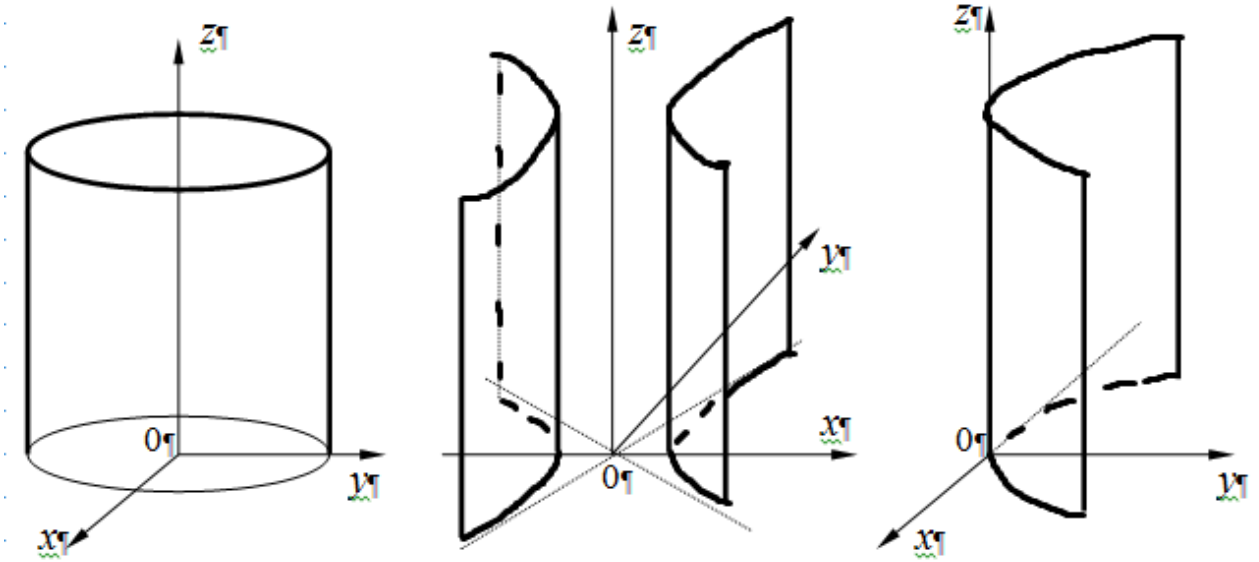

Рис. 2.43

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad x^2=2\cdot p\cdot y. \tag{2.61}$$

Замечание 1. Если в уравнениях (2.51) - (2.61) заменить одни переменные на другие, то, очевидно, вид поверхности не изменится, а соответствующим образом изменится её ориентация относительно координатной системы. Так, например, уравнения $x^2+y^2=z$ и $y^2+z^2=x$ представляют параболоид вращения, в первом случае с осью OZ, во втором - с осью OX.

Замечание 2. Если в уравнении поверхности второго порядка (2.49) отсутствуют члены с произведением координат $\left(a_{12}=a_{13}=a_{23}=0\right)$,то, поступив так же, как в 2.6, уравнение можно привести к каноническому выделением полных квадратов, а сама поверхность будет отличаться от рассмотренных только параллельным переносом.

Замечание 3. Оказывается, что приведёнными выше примерами поверхностей второго порядка исчерпываются все возможные случаи (за исключением, как и на плоскости, вырожденных).

Замечание 4. Поверхности второго порядка имеют замечательное "зеркальное" свойство. Так, если в фокус параболического зеркала (параболоида вращения) поместить точечный источник света, то на выходе получится па-

раллельный пучок световых лучей, и, наоборот, параллельный пучок света такое зеркало соберёт в одной точке - фокусе. Это свойство используется в оптике при конструировании зеркальных телескопов - рефлекторов, фотообъективов и прожекторов. Если же зеркало имеет форму эллипсоида, то лучи, испускаемые точечным источником света, помещенным в одном из фокусов, собираются в другом фокусе. Это свойство нашло применение к квантовой оптике и металлургии сверхчистых материалов. Эти же свойства широко используются в акустике. В строительстве широко применяются тонкие оболочки, имеющие форму поверхностей второго порядка.

Пример. **2.19**. Построить фигуру, ограниченную поверхностями $z = 0$,

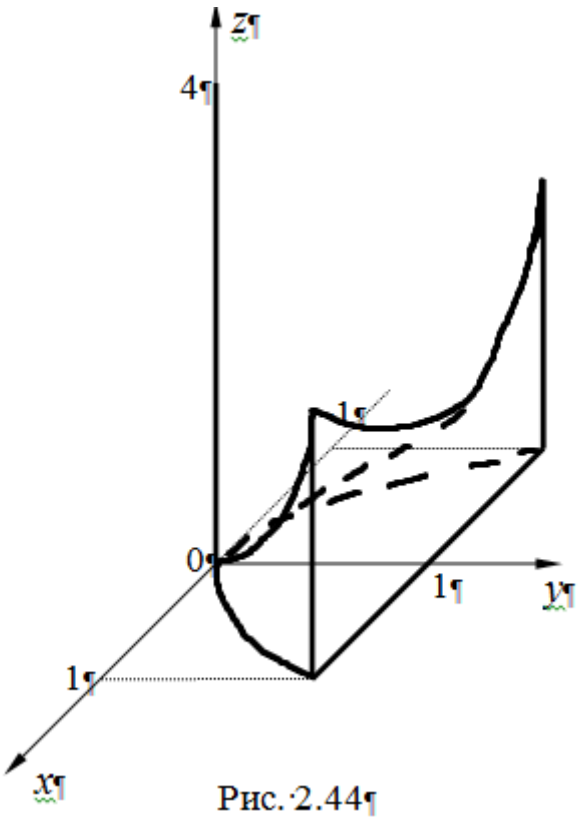

Рис. 2.44

$y = 1$, $y = x^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.

Решение. По уравнению выясняем вид каждой поверхности и строим её: $z = 4 - x^2 - y^2$ - параболоид вращения с осью OZ, смещённый на 4 в положительном направлении и направленный вниз; $y = x^2$ - отсутствует переменная z, следовательно, это цилиндр с образующей, параллельной оси OZ, построенный на параболе $y = x^2$; $y = 1$ - плоскость, параллельная XOZ; $z = 0$ - плоскость XOY. Таким образом, фигура на рис. 2.44 ограничена сверху параболоидом вращения: $z = 4 - x^2 - y^2$ (крыша), снизу плоскос-тью: $z = 0$ (дно), а сбоку параболическим цилиндром $y = x^2$ и плоскостью $y = 1$. Учитывая всё это, строим фигуру.

Рис. 2.44

Контрольные вопросы к главе II.

Что надо знать для задания прямой на плоскости? Какой геометрический смысл имеют начальная ордината и угловой коэффициент прямой на плоскос-ти? Запишите уравнения прямой по заданным: начальной ординате и угловому коэффициенту; точке и угловому коэффициенту; по двум точкам.

Запишите общее уравнения прямой на плоскости. Как с его помощью определить угловой коэффициент?

Как определяются угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности, если известны: угловые коэффициенты; направляющие векторы; коэффициенты общего уравнения A и B? Выпишите соответствующие условия.

Как определить: лежит ли точка на прямой; расстояние от точки до прямой?

Что надо знать для задания плоскости?

Запишите уравнение плоскости по заданным: точке и нормальному вектору; по трём точкам.

Запишите общее уравнение плоскости. Какой геометрический смысл имеют его коэффициенты A, B и C?

Как определяются угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности, если известны коэффициенты общего уравнения? Приведите соответствующие формулы.

Как определить: расстояние от точки до плоскости: взаимное расположение двух точек относительно одной плоскости?

Как определяется прямая в пространстве?

Запишите уравнения прямой в пространстве по заданным: точке и направляющему вектору; по двум точкам.

Запишите уравнения прямой в пространстве в канонической и параметрической формах.

Как перейти от уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей, к другим видам уравнений?

Как определяются: угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве? Приведите соответствующие формулы.

Как определяются угол между прямой и плоскостью в пространстве, условия их параллельности и перпендикулярности? Приведите соответствующие формулы.

Как определить координаты точки пересечения прямой и плоскости в пространстве?

Сформулируйте условие расположения двух прямых в одной плоскости.

Как определяются алгебраические линии второго порядка?

Дайте геометрические определения эллипса, гиперболы, параболы и запишите их канонические уравнения.

Как приводится уравнение линии второго порядка к каноническому виду? Дайте геометрическую интерпретацию.

Дайте определение полярной системы координат и приведите формулы перехода от полярной системы координат к декартовой и наоборот.

Как можно построить линию, заданную в полярной системе координат?

Как определяются алгебраические поверхности второго порядка?

Запишите канонические уравнения эллипсоида, двуполостного гиперболоида, однополостного гиперболоида, эллиптического параболоида, гиперболического параболоида (седла), конуса, цилиндров - эллиптического, гиперболического, параболического.

Как изменится расположение кривой или поверхности второго порядка, если в её уравнении взаимно заменить одну декартову координату на другую?

70. Найти точку A, симметричную точке $B(1, -2)$, относительно прямой $L: 2x - 3y + 1 = 0$.

Ответ. $A\left(-\frac{23}{13}, \frac{28}{13}\right)$.

71. Даны середины сторон треугольника : $A(2, 1)$, $B(5, 3)$ и $C(3, -4)$. Составить уравнения его сторон.

Ответ. $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$.

72. Определить угол между прямыми $L_1: 3x - 2y + 7 = 0$ и $L_2: 2x + 5y + 1 = 0$.

Ответ. $tg\varphi = \frac{19}{4}$ или $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}}$.

73. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2, 1)$ под углом 45° к прямой $L: 2x + 3y + 4 = 0$.

Ответ. $L_1: 5x + y - 11 = 0$ и $L_2: x - 5y + 3 = 0$.

74. Известны две вершины $A(3, -1)$ и $B(5, 7)$ треугольника ABC и точка $E(4, -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения его сторон.

Ответ. $AB: 4x - y - 13 = 0$; $BC: x = 5$; $AC: x + 8y + 5 = 0$.

75. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если дана одна вершина $A(1, 3)$ и уравнения двух медиан - $CD: x - 2y + 1 = 0$ и $BE: y - 1 = 0$.

Ответ. $AB: x + 2y - 7 = 0$; $BC: x - 4y - 1 = 0$; $AC: x - y + 2 = 0$.

76. Найти проекцию точки $A(-6, 4)$ на прямую $L: 4x - 5y + 3 = 0$.

Ответ. $(-2, -1)$.

77. Даны вершины треугольника: $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$ и $C(3, 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану BE.

Ответ. $4x + y - 3 = 0$.

78. Даны две противоположные вершины квадрата: $A(-1, 3)$ и $C(6, 2)$. Составить уравнения его сторон.

Ответ. $AB: 3x - 4y + 15 = 0$; $AD: 4x + 3y - 5 = 0$;
$CB: 4x + 3y - 30 = 0$; $CD: 3x - 4y - 10 = 0$.

79. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны

координаты вершины $B(-4, -5)$ и уравнения двух высот AD: $5x+3y-4=0$ и CE: $3x+8y+13=0$.

Ответ. AC: $5x+2y-1=0$; AB: $8x-3y+17=0$; BC: $3x-5y-13=0$.

80. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны координаты вершины $C(4, -1)$ и уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из вершины A.

Ответ. AC: $3x+7y-5=0$; AB: $9x+11y+5=0$; BC: $3x+2y-10=0$.

81. Найти площадь квадрата, если две его стороны лежат на прямых $L_1: 5x-12y-65=0$ и L_2: $5x-12y+26=0$.

Ответ. $S = 49$.

82. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2, 7)$, так, чтобы расстояния от точки $B(2, -1)$ до этих прямых были равны 4.

Ответ. L_1: $\sqrt{3}x-y+7-2\sqrt{3}=0$ и L_2: $\sqrt{3}x+y-7-2\sqrt{3}=0$.

83. Составить уравнение геометрического места точек, расстояние от которых до прямой $8x-15y-25=0$ равно 2.

Ответ. L_1 $: 8x-15y-59=0$ и L_2 $: 8x-15y+9=0$.

84. Найти длину высоты AE треугольника с вершинами $A(5, -3)$, $B(0, -1)$ и $C(3, 3)$.

Ответ. $h = 5{,}2$.

85. Найти расстояние между параллельными прямыми L_1: $5x-12y+28=0$ и L_2: $5x-12y+15=0$.

Ответ. $d = 1$.

86. В равнобочной трапеции $ABCD$ известны координаты трёх вер шин : $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ и $C(7, 1)$. Найти координаты вершины D и величину острого угла, если стороны BC и AD параллельны.

Ответ. $D(4, -1)$, $tg\varphi = 5$.

87. В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения двух сторон AD $: x-y+1=0$, AB $: x-5y+17=0$ и координаты точки пересечения диагоналей $E(-1, 2)$. Составить уравнения двух других сторон и диагоналей параллелограмма.

Ответ. CD: $x-5y+5=0$; AC: $x-2y+5=0$;
BC: $x-y+5=0$; BD: $x+y-1=0$.

88. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x-4y-10=0$

и отстоящих от неё на расстоянии $d = 2$.

Ответ. $L_1 \quad : 3x - 4y - 20 = 0$ и $L_2 \quad : 3x - 4y = 0$.

89. Показать, что четырёхугольник с вершинами в точках $A(4\,,4)$, $B(6\,,0)$, $C(0\,,-5)$ и $D(-4\,,3)$ является трапецией, и найти её площадь.

Ответ. $k_{AB} = k_{CD} = -2$, $S = 51$.

90. Даны координаты двух смежных вершин квадрата $A(2\,,0)$ и $B(-1\,,4)$. Составить уравнения его сторон. Сколько решений имеет задача ?

Ответ. $AB:\ 4x + 3y - 8 = 0$; $AD:\ 3x - 4y - 6 = 0$; $BC:\ 3x - 4y + 19 = 0$; $CD:\ 4x + 3y - 33 = 0$ или $4x + 3y + 17 = 0$.

91. На прямой $L \quad : 4x + 3y - 14 = 0$ найти точку C , равноудалённую от точек $A(-2\,,0)$, $B(0\,,6)$, и величину угла ACB .

Ответ. $C(2\,,2)$, $\varphi = 90^o$.

92. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $C(-2\,,3)$ и равноудалённых от точек $A(5\,,-1)$ и $B(3\,,7)$.

Ответ. $L_1 \quad : y - 3 = 0$ и $L_2 \quad : 4x + y + 5 = 0$.

93. В квадрате известны : уравнение стороны $AD \quad : y - 2x = 0$ и координаты точки пересечения диагоналей $E(4\,,2)$. Составить уравнения других его сторон.

Ответ. $CD:\ x + 2y - 2 = 0$; $AB:\ x + 2y - 14 = 0$; $BC:\ 2x - y - 12 = 0$.

94. Проверить, проходит ли плоскость $Q \quad : 3x - 5y + 2z - 17 = 0$ через точки : а) $A(3\,,1\,,-1)$; б) $B(2\,,-1\,,3)$; в) $C(6\,,0\,,2)$; г) $D(1,-2,2)$.

Ответ. а) нет ; б) да ; в) нет ; г) да .

95. Составить уравнение плоскости, если известно, что точка $A(2\,,9\,,-6)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Ответ. $2x + 9y - 6z - 121 = 0$.

96. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку А , перпендикулярно вектору $\overline{AB}$, если $A(3\,,-1\,,2)$ и $B(4\,,-2\,,-1)$.

Ответ. $x - y - 3z + 2 = 0$.

97. Определить координаты точек пересечения с осями координат плоскости $2x - y + 8z - 8 = 0$.

Ответ. $A(4\,,0\,,0)$, $B(0\,,-8\,,0)$, $C(0\,,0\,,1)$.

98. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1\,,2\,,3)$ параллельно векторам $\overline{a}=(3\,,1\,,-1)$ и $\overline{b}=(1\,,-2\,,1)$.

Ответ. $x+4y+7z-30=0$.

99. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки : $A(0\,,3\,,2)$, $B(1\,,0\,,-1)$, $C(1\,,6\,,2)$.

Ответ. $3x-y+2z-1=0$.

100. Составить уравнения плоскостей, проходящей через точки $A(0\,,1\,,1)$, $B(-2\,,1\,,8)$ перпендикулярно плоскостям $XOY\,;YOZ\,;\,XOZ$.

Ответ. $y-1=0\,;\,y-1=0\,;\,7x+2z-2=0$.

101. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0\,,1\,,1)$, $B(2\,,1\,,-1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+z+2=0$.

Ответ. $x-2y+z+1=0$.

102. Через точку $A(0\,,1\,,1)$ провести плоскость параллельно прямым $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ и $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Ответ. $x-2y-3z+5=0$.

103. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3\,,-2\,,-7)$ параллельно плоскости $2x-3y+5=0$.

Ответ. $2x-3y-12=0$.

104. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2\,,-1\,,1)$ перпендикулярно двум плоскостям: $2x-z+1=0$ и $y=0$.

Ответ. $x+2z-4=0$.

105. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1\,,-2\,,4)$ параллельно плоскости XOZ.

Ответ. $y+2=0$.

106. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3,-4,7)$ и ось OZ.

Ответ. $4x+3y=0$.

107. Найти координаты точек пересечения с осями координат плоскости $2x-3y-4z-12=0$.

Ответ. $A(6,0,0)$, $B(0,-4,0)$, $C(0,0,-3)$.

108. Найти точку пересечения плоскостей : $Q_1{:}7x-5y-31=0$,

$Q_2: 4x+11z+43=0$ и $Q_3: 2x+3y+4z+20=0$.

Ответ. $M(3, -2, -5)$.

109. Определить расстояние от точки $A(1, 2, 1)$ до плоскости $x+2y+2z-10=0$.

Ответ. $d=1$.

110. На оси OY найти точки, отстоящие на расстоянии $d=4$ от плоскости $x+2y-2z-2=0$.

Ответ. $M_1(0, 7, 0)$, $M_2(0, -5, 0)$.

111. Составить уравнение геометрического места точек, расстояние от которых до плоскости $4x-4y-2z+3=0$ равно 2.

Ответ. $Q_1: 4x-4y-2z+15=0$, $Q_2: 4x-4y-2z-9=0$.

112. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 0, -3)$ параллельно прямой $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

Ответ. $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{2}$.

113. Составить канонические уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 3, 2)$ параллельно координатным осям.

Ответ. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{0}$; $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0}$; $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$.

114. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, -3, 3)$ параллельно вектору $\overline{a}=(-3, 2, 3)$.

Ответ. $x=1-3t$; $y=-3+2t$; $z=3+3t$.

115. Составить уравнения проекций прямой, заданной как пересечение плоскостей $Q_1: 3x+2y-4z-5=0$ и $Q_2: 6x-y-2z+4=0$, на координатные плоскости.

Ответ. $\frac{x+\frac{1}{5}}{8}=\frac{y-\frac{14}{5}}{18}=\frac{z}{0}$; $\frac{x+\frac{13}{9}}{8}=\frac{y}{0}=\frac{z+\frac{7}{3}}{15}$; $\frac{x}{0}=\frac{y-\frac{13}{4}}{18}=\frac{z-\frac{3}{8}}{15}$.

116. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, 2, -1)$ параллельно прямой $x=3t$; $y=4-2t$; $z=4t-1$.

Ответ. $x=1+3t$; $y=2-2t$; $z=4t-1$.

117. Составить каноническое уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей $Q_1: x-2y+3z+1=0$ и

$Q_2: -x+3y+4z+6=0$.

Ответ. $\dfrac{x+15}{-17}=\dfrac{y+7}{-7}=\dfrac{z}{1}$.

118. Найти координаты точки пересечения плоскости XOY и прямой, проходящей через точки $A(1,2,3)$ и $B(-11,8,-3)$.

Ответ. $M(-5,5,0)$.

119. Найти угол между прямыми $L_1: \begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$ и

$L_2: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$.

Ответ. $\varphi = 90^o$.

120. Составить уравнение медианы AD треугольника с вершинами $A(-1,2,2)$, $B(3,7,0)$ и $C(1,3,-2)$.

Ответ. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

121. Найти координаты точки пересечения прямой $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}$ и плоскости $x-2y+z-15=0$.

Ответ. Прямая и плоскость не имеют общих точек (параллельны).

122. При каком значении D прямая $\begin{cases} 4x-y+2z+D=0, \\ 3x+2y-z+6=0 \end{cases}$ пересекает ось OZ ?

Ответ. D = -12.

123. При каком значении α прямая $\begin{cases} x-y-z-3=0, \\ \alpha\cdot x-y+2\alpha\cdot z=0 \end{cases}$ параллельна плоскости XOY ?

Ответ. $\alpha = 1$.

124. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3,-5)$ перпендикулярно плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

Ответ. $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$.

125. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

$A(1,-1,-1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

Ответ. $2x-3y+4z-1=0$.

126. Найти проекцию точки $A(2,-1,3)$ на прямую, заданную параметрически : $x=3t$; $y=5t-7$; $z=2t+2$.

Ответ. $M(3,-2,4)$.

127. Найти координаты точки B , симметричной точке $A(4,1,6)$ относительно прямой $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

Ответ. $B(2,-3,2)$.

128. Найти проекцию точки $A(5,2,1)$ на плоскость $2x-y+3z+17=0$.

Ответ. $B(1,4,-5)$.

129. Найти координаты точки B , симметричной точке $A(1,3,-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Ответ. $B(-5,1,0)$.

130. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2t+1$; $y=-3t+2$; $z=2t-3$ и точку $A(2,-2,1)$.

Ответ. $4x+6y+5z-1=0$.

131. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$ параллельно прямой $x=y=z$.

Ответ. $x-3y+2z-4=0$.

132. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

Ответ. $6x-20y-11z+1=0$.

133. Найти координаты точки B , симметричной точке $A(3,-4,-6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $C(-6,1,-5)$, $D(7,-2,-1)$ и $E(10,-7,1)$.

Ответ. $B(1,-2,2)$.

134. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины $D(5,2,8)$ треугольной пирамиды $ABCD$ на основание ABC, если $A(1,1,6)$, $B(1,2,7)$ и $C(3,3,6)$.

Ответ. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-8}{1}$.

135. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Ответ. $x-8y-13z+9=0$.

136. Определить кратчайшее расстояние между точками двух прямых $L_1:\ \dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ и $L_2:\ x=6t+9;\ y=-2t;\ z=2-t$.

Ответ. $d = 7$.

137. При каком значении коэффициента p прямая $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-8}=\dfrac{z-2}{p}$ параллельна плоскости $3x-4y+7z-33=0$?

Ответ. $p = -5$.

В задачах 138 - 145 с помощью преобразования параллельного переноса привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду, указать вид линии и изобразить её на чертеже.

138. $9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$.

Ответ. Эллипс: $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$.

139. $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$.

Ответ. Эллипс: $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{1}=1$.

140. $9x^2-16y^2+18x+32y-151=0$.

Ответ. Гипербола: $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$.

141. $25x^2-16y^2+100x-32y-316=0$.

Ответ. Гипербола: $\dfrac{(x+2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{25}=1$.

142. $2x^2-4x-y+3=0$.

Ответ. Парабола : $2(x-1)^2 = y-1$.

143. $2y^2 - x + 4y = 0$.

Ответ. Парабола : $2(y+1)^2 = x+2$.

144. $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 7 = 0$.

Ответ. Пара пересекающихся прямых : $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 0$.

145. $x^2 + 4x = 0$.

Ответ. Пара параллельных прямых : $(x+2)^2 = 4 \Rightarrow x+2 = \pm 2 \Rightarrow \left[\frac{x=0}{x=-4} \right.$.

В задачах 151 - 158 изобразить линии, заданные уравнениями в полярных координатах.

151. $r = a \cdot \varphi$ - спираль Архимеда.

152. $r = \frac{a}{\varphi}$ - гиперболическая спираль.

153. $r = a^{\varphi}$ логарифмическая спираль.

154. $r^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\varphi$ - лемниската Бернулли.

155. $r = 2a \cdot \cos\varphi \pm b$ - улитка Паскаля.

156. $r = a \cdot \cos\varphi$, $r = a \cdot \sin\varphi$ - окружность.

157. $r = a \cdot \cos 2\varphi$ - двух лепестковая роза.

158. $r = a \cdot |\cos 2\varphi|$ - четырёх лепестковая роза.

В задачах 159 - 169 изобразить плоскую область D , ограниченную линиями, заданными уравнениями в полярных и декартовых координатах, имеющих общее начало и полярную ось, совпадающую с положительным направлением оси OX.

159. $r = 2 \cdot \cos\varphi$, $r = 2 \cdot \sin\varphi$.

160. $r = 2 \cdot \cos\varphi$, $y = x^2$.

161. $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y = x^2$.

162. $3x + 2y - 5 = 0$, $y = x^2$.

163. $y = x^2 + 2x$, $y = 2 + 2x - x^2$.

164. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$.

165. $r = 2 \cdot \sin\varphi$, $tg\varphi = 1$, $tg\varphi = \sqrt{3}$.

166. $x^2 + y^2 = 1$, $x - y^2 = 0$.

167. $r = \sqrt{5}$, $xy = 2$.

168. $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $y = 0{,}5x$.

169. $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $y + x^2 - 2x - 1 = 0$.

В задачах 170 - 176 перейти к декартовым координатам, составить канонические уравнения и определить вид линии, заданной в полярных координатах.

170. $r \cdot \cos\varphi = 2$. Ответ. Прямая $x = 2$.

171. $r \cdot \sin\varphi = 1$. Ответ. Прямая $y = 1$.

172. $r \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Ответ. Прямая $x + y = 2$.

173. $r = 2\cos\varphi + 2\sin\varphi$. Ответ. Окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

174. $r = \frac{9}{5 - 4 \cdot \cos\varphi}$.Ответ. Эллипс $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

175. $r = \frac{9}{4 - 5 \cdot \cos\varphi}$.Ответ. Гипербола $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

176. $r = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$ Ответ. Парабола $y^2 = 6x + 9$.

В задачах 177 - 186 построить фигуру, ограниченную поверхностями первого и второго порядков.

177. $\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

178. $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2\sqrt{x}, \\ z = 0, x + z = 6. \end{cases}$

179. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 4 \ (\le 4), \\ z = 0 \ (z \ge 0). \end{cases}$

180. $\begin{cases} z = 4 - x^2, \\ 2x + y = 4, \\ z = 0, y = 0 \ (y \ge 0). \end{cases}$

181. $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \ (\le 0), \\ z = 0 \ (\ge 0). \end{cases}$

182. $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ x + y = 1, \\ z = 0, x = 0, y = 0. \end{cases}$

183. $\begin{cases} z = 4 - y^2 , \\ y = x^2 , \\ z = 0 . \end{cases}$

184. $\begin{cases} y = 1 - x^2 , \\ y = x^2 - 1 , \\ z = 0 , \ y + z = 2 . \end{cases}$

185. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x , \\ x^2 + y^2 = z^2 , \\ z = 0 \ \ (z \geq 0) . \end{cases}$

186. $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 , \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} , \\ y = \sqrt{3} \cdot x , \ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot x \ . \end{cases}$