

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Образовательный сектор с учебной лабораторией НОЦ ИС

## РАСЧЕТ БРУСА ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

*Методические указания к выполнению практических занятий  
по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов специалитета  
всех форм обучения и направлений подготовки*

© НИУ МГСУ, 2015

Москва 2015

УДК 624.04  
ББК 30.121  
Р24

С о с т а в и т е л и :  
А.В. Коргин, В.А. Ермаков

Р24 **Расчет** бруса при сложном сопротивлении [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению практических занятий по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов специалитета всех форм обучения и направлений подготовки / М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т, образовательный сектор с учебной лабораторией НОЦ ИС ; сост.: А.В. Коргин, В.А. Ермаков. — Электрон. дан. и прогр. (0,5 Мб). — Москва : НИУ МГСУ, 2015. — Учебное сетевое электронное издание — Режим доступа: [http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r\\_91/cgiirbis\\_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS](http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS) — Загл. с титул. экрана.

Даны теоретические сведения и методика, необходимая для расчета элементов конструкций прямоугольного и круглого сечения, работающих на кривой изгиб и изгиб с кручением.

Для студентов специалитета всех форм обучения и направлений подготовки.

*Учебное сетевое электронное издание*

*Отв. за выпуск — образовательный сектор с учебной лабораторией НОЦ ИС*

Подписано к использованию 15.10.2015 г. Уч.-изд. л. 0,19. Объем данных 0,5 Мб

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Московский государственный  
строительный университет» (НИУ МГСУ).  
129337, Москва, Ярославское ш., 26.  
Издательство МИСИ – МГСУ.  
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.  
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

## Сложное сопротивление прямого бруса

При сложном сопротивлении в сечении действуют несколько силовых факторов (рис.1), формирующих следующие виды нагружения:

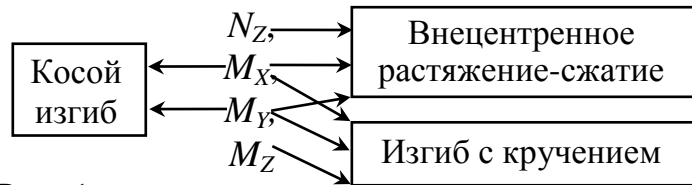
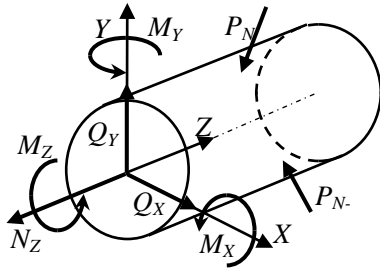
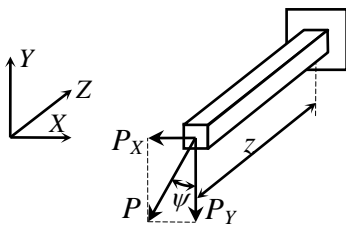


Рис. 1

### 1. Косой изгиб

Чистый косой изгиб  $M_x \neq 0; M_y \neq 0$ .

Поперечный косой изгиб +  $Q_x \neq 0; Q_y \neq 0$  (рис.2).



$\psi$  - угол наклона силовой линии;  
 $\varphi$  - угол наклона нулевой линии;  
 $\gamma$  - угол наклона линии прогибов.

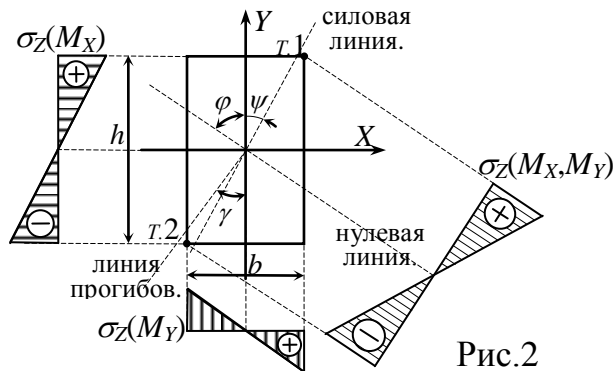


Рис.2

Моменты в сечении:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= P_y \cdot z = P \cdot \cos \psi \cdot z; \\ M_y &= P_x \cdot z = P \cdot \sin \psi \cdot z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Угол наклона силовой линии:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{M_y}{M_x}. \quad (2)$$

Нулевая (нейтральная) линия – геометрическое место точек, где  $\sigma_z = 0$ .

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x = P \cdot z \cdot \left( \frac{y}{J_x} \cdot \cos \psi + \frac{x}{J_y} \sin \psi \right) = 0.$$

где  $x, y$  – координаты текущей точки в сечении.

$$\sigma_z = 0, \text{ если } \frac{y}{J_x} \cdot \cos \psi + \frac{x}{J_y} \sin \psi = 0, \text{ откуда:}$$

Уравнение нулевой линии: 
$$y = -x \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \psi.$$

Угол наклона нулевой линии: 
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{y} = -\frac{J_y}{J_x \cdot \operatorname{tg} \psi} \quad (3)$$

$\varphi + \psi = \pm 90^\circ$ , когда  $J_x = J_y$  (круг, квадрат, восьмигранник и т.д.).

Условие прочности: 
$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_1^{\max} + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_1^{\max} \leq [\sigma]. \quad (4)$$

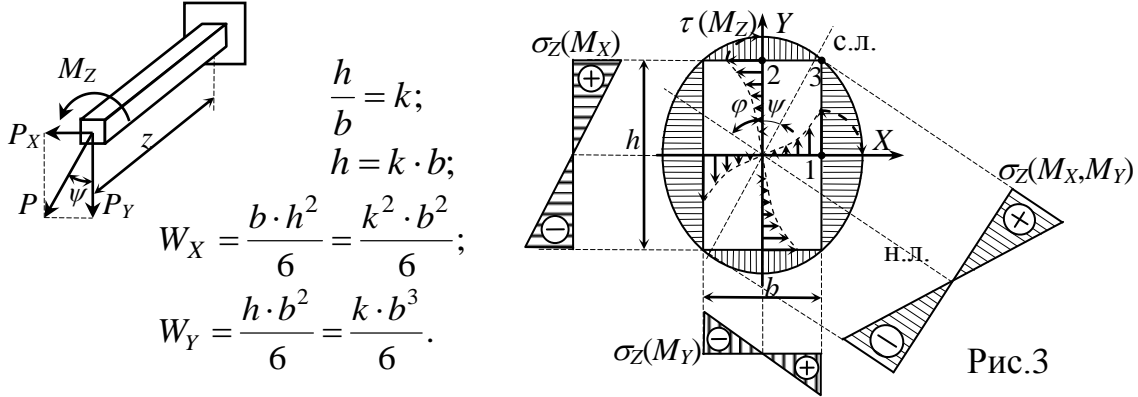
Прямоугольное сечение: 
$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (\text{т.1} \llcorner + \llcorner, \text{т.2} \llcorner - \llcorner). \quad (5)$$

## 2. Изгиб с кручением

Вид нагружения, при котором  $M_X \neq 0$ ; ( $M_Y \neq 0$ );  $M_Z \neq 0$ .

Нормальные напряжения  $\sigma$  и касательные напряжения  $\tau$  действуют в разных плоскостях и не могут суммироваться, как при поперечном изгибе.

### 1. Прямоугольное сечение: (рис.3).



$$\frac{h}{b} = k;$$

$$h = k \cdot b;$$

$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{k^2 \cdot b^2}{6};$$

$$W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{k \cdot b^3}{6}.$$

Точка 1: условие прочности по 3-й теории  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]$ .

$$\sigma_{Z1}^{\max}(M_Y) = \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{6 \cdot M_Y}{k \cdot b^3}; \quad \tau_1 = \frac{M_Z}{\alpha \cdot h \cdot b^2} = \frac{M_Z}{\alpha \cdot k \cdot b^3};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{\frac{36 \cdot M_Y^2}{k^2 \cdot b^6} + \frac{4 \cdot M_Z^2}{\alpha^2 \cdot k^2 \cdot b^6}} = \frac{2}{k \cdot b^3} \sqrt{9 \cdot M_Y^2 + \frac{M_Z^2}{\alpha^2}} \leq [\sigma];$$

$$b_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]} \cdot \sqrt{9 \cdot M_Y^2 + \frac{M_Z^2}{\alpha^2}}}. \quad (6)$$

Точка 2: условие прочности по 3-й теории  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]$ .

$$\sigma_{Z2}^{\max}(M_X) = \frac{M_X}{W_X} = \frac{6 \cdot M_X}{k^2 \cdot b^3}; \quad \tau_2 = \eta \cdot \tau_1 = \eta \cdot \frac{M_Z}{\alpha \cdot k \cdot b^3};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{\frac{36 \cdot M_X^2}{k^4 \cdot b^6} + \frac{4 \cdot M_Z^2 \cdot \eta^2}{\alpha^2 \cdot k^2 \cdot b^6}} = \frac{2}{k \cdot b^3} \sqrt{\frac{9 \cdot M_X^2}{k^2} + \frac{M_Z^2 \cdot \eta^2}{\alpha^2}} \leq [\sigma];$$

$$b_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot M_X^2}{k^2} + \frac{M_Z^2 \cdot \eta^2}{\alpha^2}}}. \quad (7)$$

$\alpha, \eta = f\left(\frac{h}{b}\right)$  – табулировано (см. ниже).

Точка 3: условие прочности косоуго изгиба  $\sigma_Z^{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]$ .

$$\sigma_{Z3}^{\max} = \frac{|M_X|}{W_X} + \frac{|M_Y|}{W_Y} = \frac{6 \cdot |M_X|}{k^2 \cdot b^3} + \frac{6 \cdot |M_Y|}{k \cdot b^3} = \frac{6}{k \cdot b^3} \cdot \left(\frac{|M_X|}{k} + |M_Y|\right) \leq [\sigma];$$

$$b_3 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]} \cdot 3 \cdot \left(\frac{|M_X|}{k} + |M_Y|\right)}. \quad (8)$$

Выбирается наибольшее из вычисленных для 3-х условий сечение.

**2. Круглое сечение:** (рис.4).

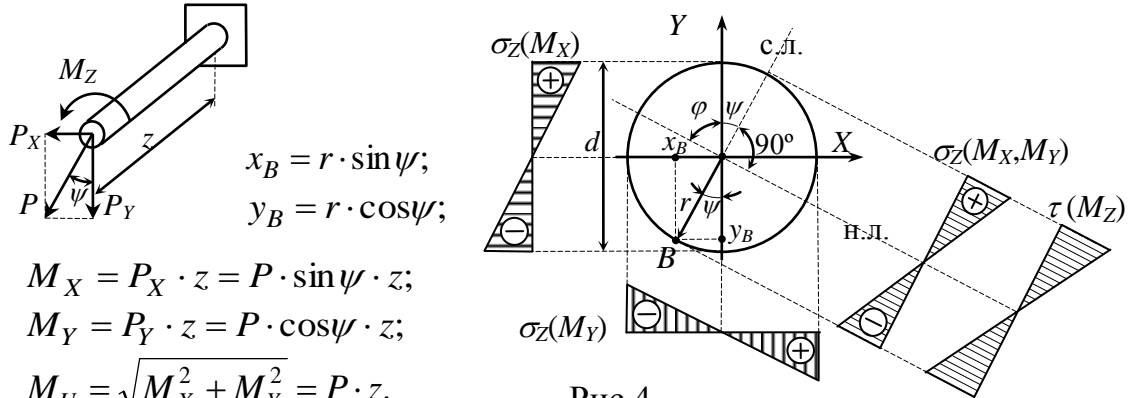


Рис.4

$$J_X = J_Y = W_X \cdot \frac{d}{2} = W_X \cdot r; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{J_Y}{J_X \cdot \operatorname{tg} \psi} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \Rightarrow \varphi + \psi = 90^\circ;$$

$$\sigma_Z^{\max}(B) = \frac{M_X}{J_X} \cdot y_B + \frac{M_Y}{J_Y} \cdot x_B = \frac{P \cdot z}{W_X} \cdot (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = \frac{M_U}{W_X};$$

$$\tau^{\max}(B) = \frac{M_Z}{W_\rho} = \frac{M_Z}{2 \cdot W_X}.$$

**Точка В:** условие прочности по 3-й теории:  $\sigma_{\text{ЭKB}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma];$

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = \frac{\sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}}{W_X} = \frac{M_{\text{ЭKB}}^{\text{III}}}{W_X} \leq [\sigma]. \quad (9)$$

Условие прочности по 4-й теории:  $\sigma_{\text{ЭKB}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma];$

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = \frac{\sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + 0,75 \cdot M_Z^2}}{W_X} = \frac{M_{\text{ЭKB}}^{\text{IV}}}{W_X} \leq [\sigma]; \quad (10)$$

Теория Мора:  $\sigma_{\text{ЭKB}} = \frac{1-K}{2} \cdot \sigma + \frac{1+K}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad K = \frac{[\sigma]_{\text{ПACT}}}{[\sigma]_{\text{СЖАТ}}}$

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = \frac{\frac{1-K}{2} \cdot M_U + \frac{1+K}{2} \cdot \sqrt{M_U^2 + M_Z^2}}{W_X} = \frac{M_{\text{ЭKB}}^{\text{M}}}{W_X} \leq [\sigma]. \quad (11)$$

**Общее условие прочности:**  $\sigma_{\text{ЭKB}} = \frac{M_{\text{ЭKB}}^{\text{III(IV,M)}}}{W_X} \leq [\sigma] \Rightarrow W_X \geq \frac{M_{\text{ЭKB}}^{\text{III(IV,M)}}}{[\sigma]}$

$$W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭKB}}^{\text{III(IV,M)}}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (12)$$

Расчет по касательным напряжениям:  $d_0 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_Z}{\pi \cdot [\tau]}}$

При типичном соотношении  $[\tau] \approx 0,6 \cdot [\sigma] \Rightarrow d \approx 1,06 \cdot d_0$  – расчет на сложное сопротивление по формуле (12) идет в запас прочности.

## Пример 1. Расчет пространственного бруса

Найти размеры прямоугольной и круглой формы сечений участков пространственного бруса и вертикальное перемещение точки  $A$  (рис.5),  $[\sigma]=160$  мПа,  $E=2,1 \cdot 10^5$  мПа,  $h/b=2$ . Расчеты произвести в соответствии с 3-й теорией прочности.

Эпюры внутренних усилий  $Q_X, Q_Y, N_Z, M_X, M_Y, M_Z$

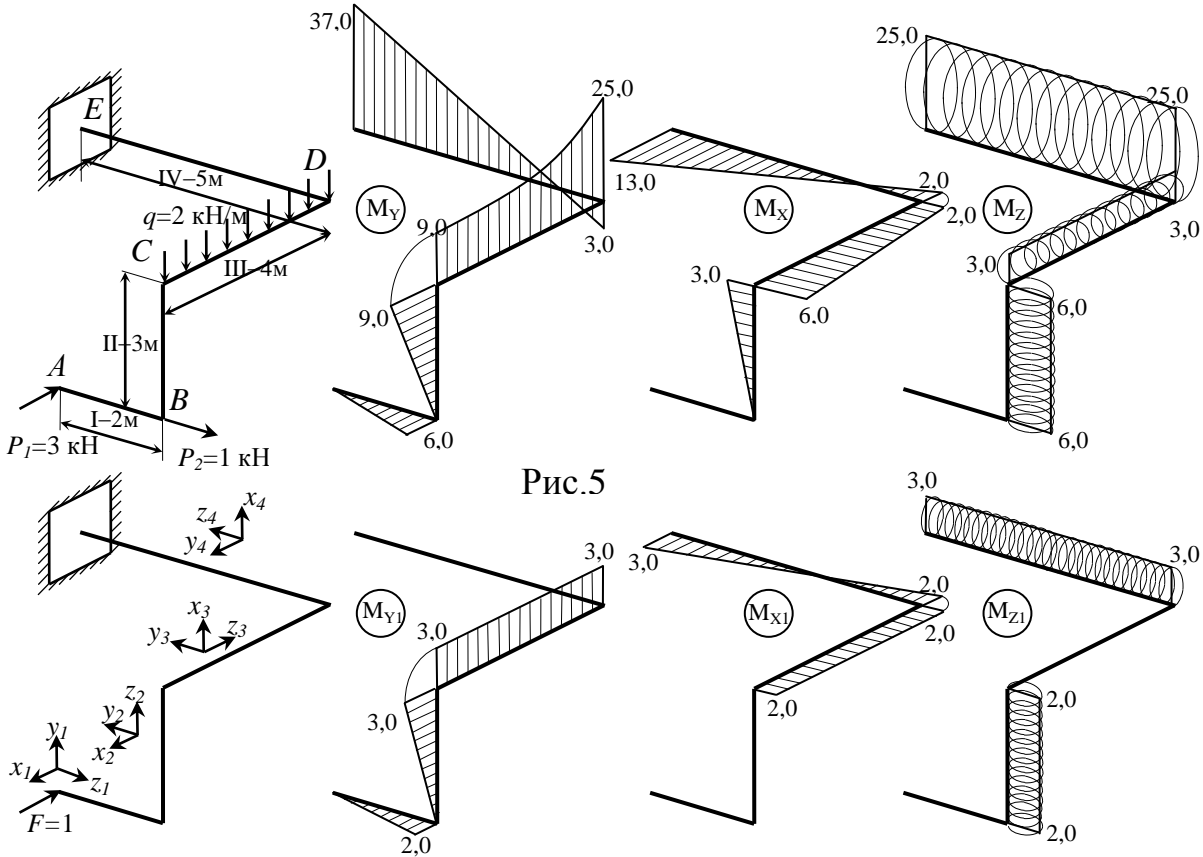
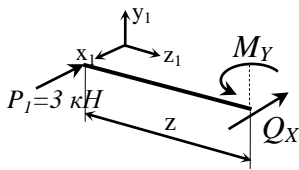


Рис.5

Вычисление ординат эпюр по участкам:



Участок I  $0 \leq z < 2$  м.

$$Q_X = -P_1 = -3,0 \text{ кН};$$

$$M_Y = P_1 \cdot z = 3,0 \cdot z;$$

$$z=0 \Rightarrow M_Y=0; \quad z=2 \Rightarrow M_Y=6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II  $0 \leq z < 3$  м.  $M_{Y1} \leftrightarrow M_{Z2}$

$$Q_X = -Q_{X1} = -3,0 \text{ кН};$$

$$M_Y = -Q_{X1} \cdot z = 3,0 \cdot z;$$

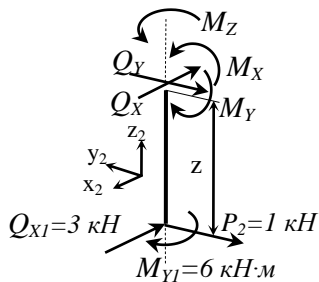
$$z=0 \Rightarrow M_Y=0; \quad z=3 \Rightarrow M_Y=9,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

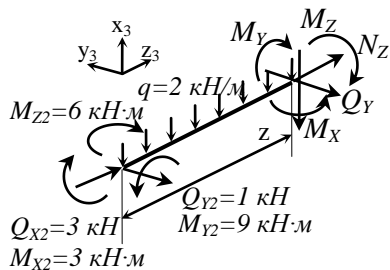
$$Q_Y = -P_2 = -1,0 \text{ кН};$$

$$M_Y = -P_2 \cdot z = -1,0 \cdot z;$$

$$z=0 \Rightarrow M_Y=0; \quad z=3 \Rightarrow M_Y=-3,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_Z = M_{Y1} = 6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$





Здесь примем  $+N_Z$ ,  
совпадающей с  $+$  оси  $Z$ :  
 $N_Z = -Q_{X_2} = -3,0 \text{ кН}$ ;

Участок III  $0 \leq z < 4 \text{ м}$ .  $M_{Z2} \Leftrightarrow M_{X3}$ ;  $M_{X2} \Leftrightarrow M_{Z3}$ ;  $Q_{X2} \Leftrightarrow N_{Z3}$ ;

$$Q_X = -q \cdot z = -2 \cdot z;$$

$$z=0 \Rightarrow Q_X=0; \quad z=4 \Rightarrow Q_X=-8,0 \text{ кН};$$

$$M_Y = -M_{Y_2} - \frac{q \cdot z^2}{2} = -9 - z^2;$$

$$z=0 \Rightarrow M_Y=-9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad z=4 \Rightarrow M_Y=-25,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

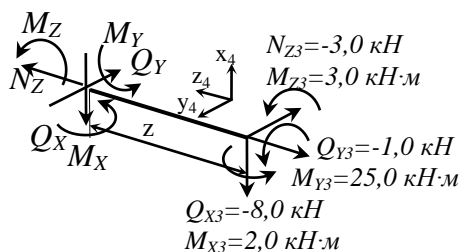
$$Q_Y = -Q_{Y_2} = -1,0 \text{ кН};$$

$$M_X = M_{Z_2} - Q_{Y_2} \cdot z = 6,0 - 1 \cdot z;$$

$$z=0 \Rightarrow M_X=6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad z=4 \Rightarrow M_X=2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_Z = -M_{X_2} = -3,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок IV  $0 \leq z < 5 \text{ м}$ .



$M_{Z3} \Leftrightarrow M_{Y4}$ ;  $M_{Y3} \Leftrightarrow M_{Z4}$ ;  $N_{Z3} \Leftrightarrow Q_{Y4}$ ;  $Q_{X3} \Leftrightarrow N_{Z4}$ ;

$$Q_Y = -N_{Z_3} = -3,0 \text{ кН};$$

$$M_X = M_{X_3} - N_{Z_3} \cdot z = 2,0 - 3,0 \cdot z;$$

$$z=0 \Rightarrow M_X=2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad z=5 \Rightarrow M_X=-13,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_X = -Q_{X_3} = -8,0 \text{ кН};$$

$$M_Y = -M_{Z_3} + Q_{Y_3} \cdot z = -3,0 + 8,0 \cdot z;$$

$$z=0 \Rightarrow M_Y=-3,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad z=5 \Rightarrow M_Y=37,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$N_Z = Q_{X_3} = 1,0 \text{ кН}; \quad M_Z = -M_{Y_3} = -25,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

1. Определение положения расчетных сечений по участкам:

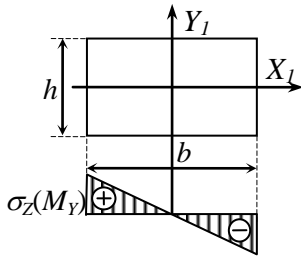
$$M_{ЭКВ}^{III} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}.$$

№уч.	Сечение	$M_X$ [кН·м]	$M_Y$ [кН·м]	$M_Z$ [кН·м]	$M_{ЭКВ}$ [кН·м]
I	A	0	0	0	0
	B	0	6,0	0	<b>6,0</b>
II	B	0	0	6,0	6,0
	C	-3,0	9,0	6,0	<b>11,22</b>
III	C	6,0	9,0	3,0	11,22
	D	2,0	25,0	3,0	<b>25,26</b>
IV	D	2,0	-3,0	25,0	25,26
	E	-13,0	37,0	25,0	<b>46,51</b>

Таблица коэффициентов для расчета напряжений в прямоугольном сечении

<b>h/b</b>	<b>0</b>	<b>0,05</b>	<b>0,1</b>	<b>0,125</b>	<b>0,167</b>	<b>0,25</b>	<b>0,333</b>	<b>0,4</b>	<b>0,5</b>	<b>0,571</b>	<b>0,667</b>
$\alpha$	0	0,022	0,042	0,052	0,067	0,095	0,118	0,135	0,155	0,167	0,179
$\eta$	1,348	1,348	1,348	1,347	1,346	1,342	1,328	1,305	1,258	1,220	1,164
$\beta$	0	0,001	0,003	0,005	0,008	0,018	0,029	0,040	0,057	0,070	0,087
<b>h/b</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>	<b>2</b>	<b>2,5</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b><math>\infty</math></b>
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\eta$	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333





2. **Участок I:**  $M_Y=6,0$  кН·м;  $k=h/b=0,5$ ;  $h=k \cdot b$ .

Прямоугольное сечение – условие прочности:

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{M_Y \cdot 6}{b \cdot h^2} = \frac{M_Y \cdot 6}{k \cdot b^3} = \frac{12M_Y}{b^3} \leq [\sigma];$$

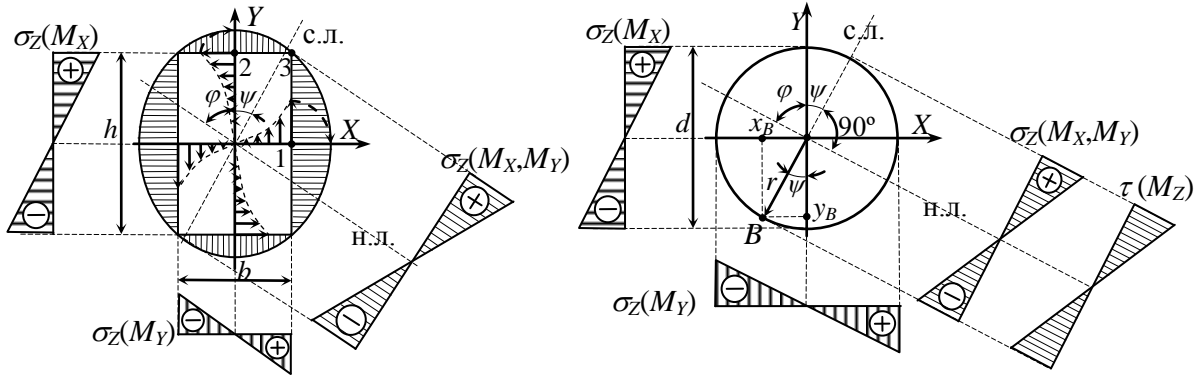
$$b = \sqrt[3]{\frac{12M_Y}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 7,66 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad h = 3,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Площадь сечения  $A = b \cdot h = 7,66 \cdot 10^{-2} \cdot 3,83 \cdot 10^{-2} = 29,34 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

Круглое сечение:  $d = \sqrt[3]{\frac{32M_Y}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 7,26 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Площадь сечения  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (7,26 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 41,35 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

Участки II-IV:  $M_X \neq 0$ ;  $M_Y \neq 0$ ;  $M_Z \neq 0$  – косоу изгиб с кручением.



3. **Участок II**  $M_X=-3,0$  кН·м;  $M_Y=9,0$  кН·м;  $M_Z=6,0$  кН·м;  $M_{\text{ЭКВ}}=11,22$  кН·м;

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M_Y}{M_X} = -\frac{9}{3} = -3,0; \quad \psi = -71,57^\circ.$$

Прямоугольное сечение:  $k=h/b=0,5$ ;  $\alpha=0,155$ ;  $\eta=1,258$ ;

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{J_Y}{J_X} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = -\frac{h \cdot b^3}{b \cdot k^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = -\frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = -\frac{1}{k^2 \cdot \operatorname{tg} \psi} = \frac{1}{0,25 \cdot 3} = 1,333; \quad \varphi = 53,13^\circ;$$

$$\gamma = \mp \varphi \pm 90^\circ = 53,13 - 90 = -36,87^\circ.$$

Точки 1-2: условие прочности:  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]$ .

$$b_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[6]{9 \cdot M_Y^2 + \frac{M_Z^2}{\alpha^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6}} \cdot \sqrt[6]{9 \cdot 9^2 + \frac{6^2}{0,155^2}} = 1,06 \cdot 10^{-1} \text{ м};$$

$$b_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[6]{\frac{9 \cdot M_X^2}{k^2} + \frac{M_Z^2 \cdot \eta^2}{\alpha^2}} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[6]{\frac{9 \cdot 3^2}{0,5^2} + \frac{6^2 \cdot 1,258^2}{0,155^2}} = 1,09 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$$

Точка 3: условие прочности  $\sigma_z^{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]$ .

$$b_3 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \left( \frac{|M_X|}{k} + |M_Y| \right)} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \left( \frac{3}{0,5} + 9 \right)} = 1,04 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$$

Выбираем наибольшее из 3-х значений  $b=1,09 \cdot 10^{-1}$  м.

Площадь сечения  $A = k \cdot b^2 = 0,5 \cdot (1,09 \cdot 10^{-1})^2 = 5,96 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ .

Круглое сечение:  $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ЭKB}^{III}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 11,22 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,089 \text{ м};$   
 $\psi + \varphi = 90^\circ: \quad \varphi = 90 - \psi = 18,85^\circ; \quad \gamma = \psi = 71,57^\circ.$

Площадь сечения  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,089^2}{4} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$

4. Участок III  $M_X = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_Y = 25,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_Z = 3,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_{ЭKB} = 25,26 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$\text{tg} \psi = \frac{M_Y}{M_X} = \frac{25}{2} = 12,5; \quad \psi = 85,43^\circ.$

Прямоугольное сечение:  $k = h/b = 0,5; \quad \alpha = 0,155; \quad \eta = 1,258;$

$\text{tg} \varphi = -\frac{1}{k^2 \cdot \text{tg} \psi} = -\frac{1}{0,25 \cdot 12,5} = -0,32; \quad \varphi = -17,74^\circ; \quad \gamma = \mp \varphi \pm 90^\circ = -17,74 + 90 = 72,26^\circ.$

Точка 1:  $b_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[6]{9 \cdot M_Y^2 + \frac{M_Z^2}{\alpha^2}} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[6]{9 \cdot 25^2 + \frac{3^2}{0,155^2}} = 1,25 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$

Точка 2:  $b_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[6]{\frac{9 \cdot M_X^2}{k^2} + \frac{M_Z^2 \cdot \eta^2}{\alpha^2}} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[6]{\frac{9 \cdot 2^2}{0,5^2} + \frac{3^2 \cdot 1,258^2}{0,155^2}} = 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Точка 3:  $b_3 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \left( \frac{|M_X|}{k} + |M_Y| \right)} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \left( \frac{2}{0,5} + 25 \right)} = 1,3 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$

Выбираем наибольшее из 3-х значений  $b = 1,3 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$

Площадь сечения  $A = k \cdot b^2 = 0,5 \cdot (1,3 \cdot 10^{-1})^2 = 8,39 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$

Круглое сечение:  $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ЭKB}^{III}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 25,26 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,117 \text{ м}; \quad \varphi = 90 - \psi = 4,57^\circ.$

Площадь сечения  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,117^2}{4} = 1,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$

5. Участок IV  $M_X = -13,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_Y = 37,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_Z = 25,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_{ЭKB} = 46,51 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$\text{tg} \psi = \frac{M_Y}{M_X} = -\frac{37}{13} = 0,351; \quad \psi = -70,64^\circ.$

Прямоугольное сечение:  $k = h/b = 0,5; \quad \alpha = 0,155; \quad \eta = 1,258;$

$\text{tg} \varphi = -\frac{1}{k^2 \cdot \text{tg} \psi} = \frac{1}{0,25 \cdot 2,846} = 1,405; \quad \varphi = 54,57^\circ; \quad \gamma = \mp \varphi \pm 90^\circ = 54,17 - 90 = -35,43^\circ.$

Точка 1:  $b_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[6]{9 \cdot M_Y^2 + \frac{M_Z^2}{\alpha^2}} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[6]{9 \cdot 37^2 + \frac{25^2}{0,155^2}} = 1,7 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$

Точка 2:  $b_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[6]{\frac{9 \cdot M_X^2}{k^2} + \frac{M_Z^2 \cdot \eta^2}{\alpha^2}} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[6]{\frac{9 \cdot 13^2}{0,5^2} + \frac{25^2 \cdot 1,258^2}{0,155^2}} = 1,76 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$

Точка 3:  $b_3 = \sqrt[3]{\frac{2}{k \cdot [\sigma]}} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \left( \frac{|M_X|}{k} + |M_Y| \right)} = 2,924 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \left( \frac{13}{0,5} + 37 \right)} = 1,68 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$

Выбираем наибольшее из 3-х значений  $b = 1,76 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$

Площадь сечения  $A = k \cdot b^2 = 0,5 \cdot (1,76 \cdot 10^{-1})^2 = 1,55 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ .

Круглое сечение:  $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 45,61 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,144 \text{ м}; \quad \varphi = 90 - \psi = 19,36^\circ$ .

Площадь сечения  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,144^2}{4} = 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ .

## Литература

1. Коргин, А.В. Сопротивление материалов с примерами решения задач в системе Microsoft Excel [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. В. Коргин. – М. : Инфра-М, 2011. – 388 с. : ил.,
2. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст] : учеб. для вузов / Г. С. Варданян [и др.] ; под ред. Г. С. Варданяна и Н.М. Атарова. – 2-у изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2011. – 638 с. : ил.
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Text] : учебник / В. И. Феодосьев. – Изд.14-е, испр. – М. : МГТУ, 2007. – 591 с. : ил.
4. Александров, А. В. Сопротивление материалов [Text] : учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 5-е изд., стер. - М. : Высш.шк., 2007. – 560 с. : ил.
5. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. М. Атаров. – М. : ИНФРА-М, 2010. – 406 с. : ил.
6. Грес, П. В. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] : учеб.пособие для техн.вузов / П. В. Грес. – Изд. 2-е, стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 135 с. : ил.
7. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 2-е изд., перераб.и доп. – Киев : Наук.думка, 1988. – 734 с. : ил.
8. Справочник по сопротивлению материалов [Text]. – Минск : Наука и техника, 1988. – 463 с.