

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Материалы для проведения
Объединенной межвузовской
математической олимпиады
г. Москва**

(рабочая тетрадь для презентации)

МОСКВА 2011

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ 2010 ГОД

Оценки (в порядке убывания): «+», «+», «±», «∓», «-», «-»; за задачу, к решению которой участник не приступал, ставилась оценка «0».

Решенной считалась задача, за которую была поставлена оценка «+», «+» или «±».

За *арифметическую* ошибку в верном решении ставилась оценка «±». За правильный, но необоснованный ответ (в частности, за правильный ответ, полученный рассмотрением частного случая) ставилась оценка «∓».

1. (Вариант 1) Десятичная запись натурального числа n содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четверки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четверок. Найти остаток от деления n на 9.

Ответ. 5.

(Вариант 2) Десятичная запись натурального числа n содержит шестьдесят одну цифру. Среди этих цифр есть тройки, четверки и пятёрки. Других цифр нет. Число троек на 11 больше числа пятёрок. Найти остаток от деления n на 9.

Ответ. 8.

Критерии. «∓» Верный ответ получен рассмотрением частного случая.

2. В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в несколько раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

Ответ. 1341.

3. Перед испытательным пуском одного из агрегатов строящейся гидроэлектростанции выяснилось, что на расстоянии S км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет v км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займет 5 минут. Какова должна быть собственная скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут?

Ответ. $x \geq \frac{3S + \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}$.

Критерии. «+» Ответ $x = \dots$ вместо $x \geq \dots$; «±» ответ найден в других единицах измерений; «∓» при верном решении не проведено сравнение корней квадратного уравнения с нулем, из-за чего возникает дополнительный кусок решения $\left(0; \frac{3S - \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}\right)$.

4. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$, $\angle AEC = 5\angle BAF$, $\angle ABC = 72^\circ$.

Ответ. 3.

5. (Вариант 1) Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{3 - x^3 - x}$.

Ответ. $x = 1$.

(Вариант 2) Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = 2^{-x^2 - x} - 5$.

Ответ. $x = -1$.

Критерии. «∓» Найден верный ответ, но не доказано, что других корней нет (например, не обоснован переход от уравнения $f(f(x)) = f(x)$ к $f(x) = x$ или не доказано, что у уравнения $t^4 + t^3 + 2t^2 + 2t + 1 = 0$ нет корней).

Подробная информация на сайте <http://olimpiada.ru/ommo>

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ 2010 ГОД

6. Найти сумму $\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2^2} + \dots + \frac{\sin \frac{2010\pi}{3}}{2^{2010}}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \frac{1}{2^{2010}})$.

Критерии. «±» В верном решении суммы конечных геометрических прогрессий приближены суммами соответствующих бесконечных геометрических прогрессий (и получен ответ $\approx \frac{\sqrt{3}}{3}$).

7. (Вариант 1) Вершины K, L, M, N четырехугольника $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Найти наименьший возможный периметр четырехугольника $KLMN$, если известно, что $AK = 2$ см, $BK = 4$ см и $AN = ND$.

Ответ. $\sqrt{13} + \sqrt{181}$ см.

(Вариант 2) Вершины K, L, M, N четырехугольника $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Найти наименьший возможный периметр четырехугольника $KLMN$, если известно, что $AK = 4$ см, $BK = 10$ см и $AN = ND$.

Ответ. $3\sqrt{13} + \sqrt{65}$ см.

8. (Вариант 1) Найти все решения системы $\begin{cases} xy - t^2 = 9; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$

Ответ. $(3; 3; 0; 0), (-3; -3; 0; 0)$.

(Вариант 2) Найти все x, y и z , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 1) + \log_2(y^2 + 1) = 4; \\ x^2 + y^2 = 2 \cos^2 z + 4. \end{cases}$$

Ответ. $(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}; \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

9. Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частей. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

Ответ. Ущерб первого фермера больше в 4,5 раза.

Критерии. «±» Верно подсчитан объем хотя бы одной из двух съеденных частей.

10. Изобразить на координатной плоскости множество точек (a, b)

таких, что система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ. $|b| \leq \sqrt{2}|a|$.

Критерии. «±» верно найдено множество параметров a и b , но на координатной плоскости оно не изображено; «∓» ответ верен для $a > 0$, но не для $a < 0$.

Подробная информация на сайте <http://olimpiada.ru/ommo>

